

屏東縣第 64 屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：硬幣相切鋪排之凸包性質探究

關 鍵 詞：凸包問題、正則鑲嵌、硬幣鋪排

編號：B1018

硬幣相切鋪排之凸包性質探究

摘要

這次的研究受到地理課堂上曾出現過在阿拉伯的中樞灌溉系統的圖樣啟發，探討如何在二維平面上有效率的以相同大小的圓形鋪排平面。並討論若今天以多個相同大小的硬幣作相切鋪排後，接著以棉繩進行圍繞後拉緊，那麼這條棉繩所需長度的性質會是如何？

根據我們的研究脈絡，我們首先導出平面區域中正則鑲嵌的所有形式，接著以二維晶格切割的方式找出圓鋪排在平面空間使用效率，藉此決定接下來的鋪排模式。最後再透過結構變化的遞迴關係式，成功找出在二維平面上相同圓相切鋪排時，其凸包結構周長之極值通式與鋪排規律。



圖 01：硬幣鋪排示意圖，研究者自製。

壹、前言

一、研究動機

這次的研究受地理課堂上曾出現過在阿拉伯的中樞灌溉系統的圖樣啟發（圖 02）並產生延伸性的想法。為了因應沙漠氣候等因素所導致的缺水環境，部分國家使用這樣的灌溉方式，才能夠更有效率地使用地下水資源，那麼在此同時，我們要如何更進一步，

更有效率地使用有限的土地面積呢？這樣的問題，就像是我們生活中隨處可見的圓筒狀堆疊收納的行為，下可到課間拿硬幣鋪排的遊戲，上可到經濟化的效率政策，同時也是一種特殊條件下電腦程式方面的凸包問題，又或是物理系統中橡皮筋的能量課題。為了能夠解決這個問題與探索該數學系統會產生的規律，我們展開了這次的研究。



圖 02：^[1]阿拉伯高原的地下水井灌溉區，取自：

<http://sip.csjh.tp.edu.tw/sites/geology/DocLib11/%E9%BB%83%E4%BA%88%E6%9A%84%E8%80%81%E5%B8%AB/%E4%B8%96%E7%95%8C%E5%9C%B0%E7%90%86%E8%A3%9C%E5%85%85%E7%B4%A0%E6%9D%90/%E8%A5%BF%E4%BA%9E.pdf>。

二、研究目的

- (一) 找出硬幣相切鋪排時所使用之鑲嵌結構。
- (二) 討論 k 個半徑為 r 的相同硬幣，相切鋪排時可形成之最小凸包線周長。
- (三) 討論 k 個半徑為 r 的相同硬幣，相切鋪排時可形成之最大凸包線周長。

三、文獻回顧

^[2]李志皓、葉聿文、鍾馥羽所研究之「硬幣相切的圖形探討」中曾研究過類似之主題，並指出周長與面積極值之圖形規律的形式以及存在性，並且以全同圓間相切點之數量來將圖形量化討論，最終找出其文中「完美圖形」之函數解。該「完美圖形」之函數方程為我們研究中 $k = \{n\}$ 之情況。此外他們在文中亦提及非完美圖形之存在性與部分規律特性，藉此該部分即為我們接下來內文所更進一步探究之方向，同時我們也將以不同的方式將各項目的與背景條件進行論證。

貳、研究設備及器材

筆記型電腦、A4 紙、圓規、原子筆、GeoGebra、Word、Canva。

參、研究過程或方法

一、名詞定義

- (一) ^[3]正則鑲嵌：以單一種全等並含邊與頂點之正多邊形，透過頂點接頂點、邊接邊且不重疊的形式於平面上無限延伸地鋪排。
- (二) ^[4]天花板函數 $[x]$ ：為一種上取整函數，表示為不小於 x 之最小整數，在內文中以 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\lceil \frac{\epsilon}{x} \right\rceil$ 作為圖樣狀態之判別手段，當判別條件 $x > 0$ ，則函數之取值為 1，而當 $x < 0$ 時則該函數之取值為 0。
- (三) ^[4]高斯地板函數 $[x]$ ：為一種下取整函數，表示為不大於 x 之最大整數。
- (四) ^[5]凸包問題：指當平面中散佈著一群點和一條封閉的環，其中能完全包覆這些物件且周長最小之封閉環即稱為「凸包」，簡單來說其性質就如同以橡皮筋將物件套起來一樣。

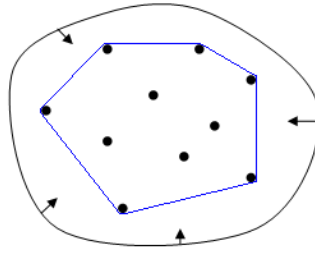


圖 03：^[5]凸包結構示意圖，取自：<https://sam571128.codes/2020/10/05/Convex-Hull/>。

二、研究架構與流程

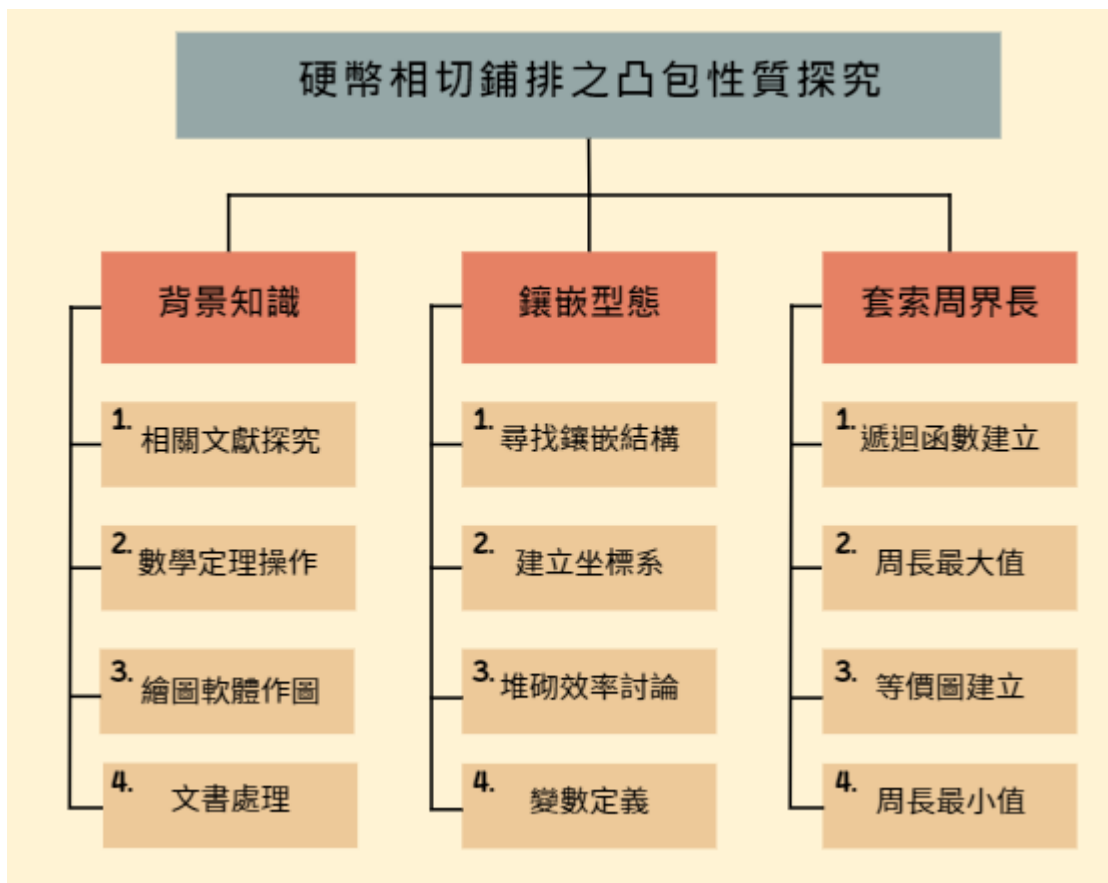


圖 04：研究流程圖，研究者以 Canva 軟體自製。

三、^[3]正則鑲嵌結構

在本次研究中，我們使用正則鑲嵌的座標鋪排法來達到最有效率之鋪排手段，其中

在平面上的正則鑲嵌之意義，在名詞定義中提及，是由相同正多邊形所組成的鋪排結構，也就是說，假如我們在鑲嵌結構中找到一個頂點，這個頂點的組成就會由 a 個正 b 邊形的各一個內角所組成，也就是說所有的正則鑲嵌結構都應該滿足 (1.1) 式：

$$a \times \frac{(b-2) \times 180^\circ}{b} = 360^\circ \quad (1.1)$$

接著因為正多邊形的內角值最小的就是正三角形，且正多邊形內角不可能超過 180° ，所以我們可以列出下式 (1.2)：

$$60^\circ \leq \frac{(b-2) \times 180^\circ}{b} < 180^\circ \quad (1.2)$$

其中因為 b 是正整數，所以將 b 的值從 3 開始依序代入 (1.1) 式後可以得到下方表 01：

表 01：正則鑲嵌頂點組成之變數 a 、 b 值對應表

| | | | | | | |
|------------------------------------|------------|------------|----------------|-------------|----------------------|-----|
| b | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
| $\frac{(b-2) \times 180^\circ}{b}$ | 60° | 90° | 108° | 120° | $\cong 128.57^\circ$ | ... |
| a | 6 | 4 | $\frac{10}{3}$ | 3 | 2.8 | ... |

因為 a 也是正整數，也就是說 b 在大於 7 之後， a 的下一個可能整數應該要是 2，但因為 $\frac{(b-2) \times 180^\circ}{b} < 180^\circ$ 的緣故， a 的最小值只可能是 3。也就是說當 a 、 b 都符合正整數的解就只有 $(a, b) = (6, 3)$ 、 $(4, 4)$ 、 $(3, 6)$ 這三種，也就是下圖 05 中的正三角形鑲嵌、正方形鑲嵌、正六邊形鑲嵌。此外我們也用 $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ 、 $(4, 4, 4, 4)$ 、 $(6, 6, 6)$ 來表示一個頂點的組成方式。

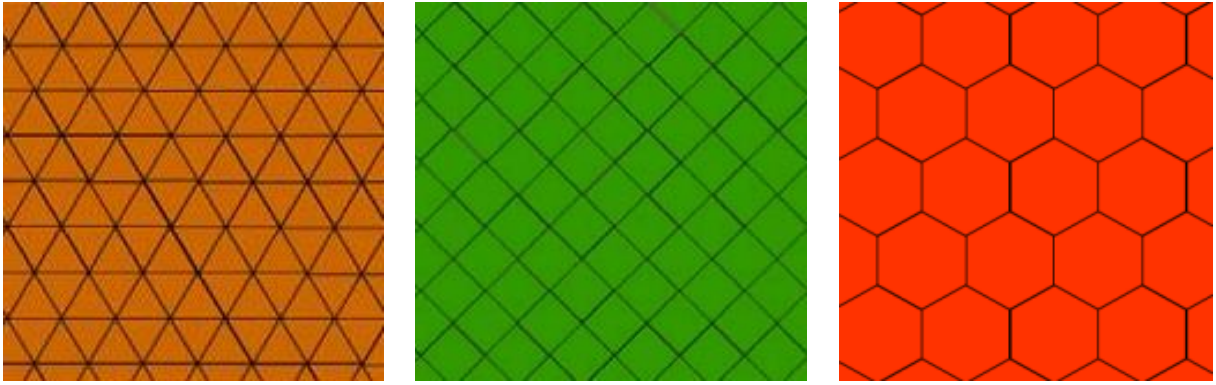


圖 05：^[6]正則鑲嵌 (3,3,3,3,3,3)、(4,4,4,4)、(6,6,6) 之結構示意圖，取自：

<https://mathseed.ntue.edu.tw/mathpicture/98/elementary-16.pdf>。

四、^[7]鑲嵌結構於平面空間中之空間使用效率

我們以化學中單位晶格界定的技巧類比鑲嵌圖形的二維分割的方式，討論在平面中堆砌相同圓形時空間的使用效率，並稱此分割單位為二維基本晶格。(3,3,3,3,3,3)、(4,4,4,4)、(6,6,6) 正則鑲嵌法中，對於平面空間使用率依序分別為 $\frac{2\pi r^2}{6\sqrt{3} r^2} \cong 60.46\%$ 、 $\frac{\pi r^2}{4r^2} \cong 78.54\%$ 、 $\frac{(\frac{1}{2}\pi r^2)}{\sqrt{3}r^2} \cong 90.69\%$ ，故 (6,6,6) 鑲嵌法之平面空間使用效率最高，作為我們後續之探討手段。

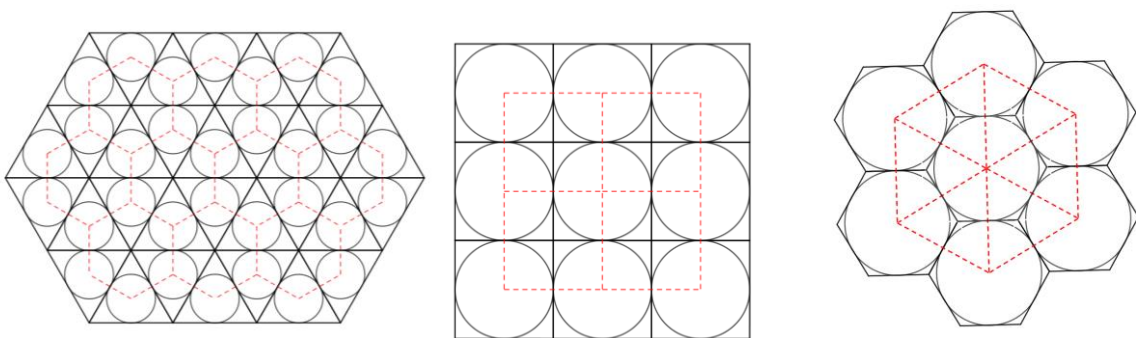


圖 06：(3,3,3,3,3,3)、(4,4,4,4)、(6,6,6) 對應之二維基本晶格分割圖，研究者以

GeoGebra 軟體自製。

肆、研究結果

一、討論 k 個半徑為 r 的相同硬幣，相切鋪排時可形成之最小凸包線周長。

表 02： $k = 1 \sim 20$ 鋪排圖形之規律圖，研究者以 GeoGebra 軟體自製

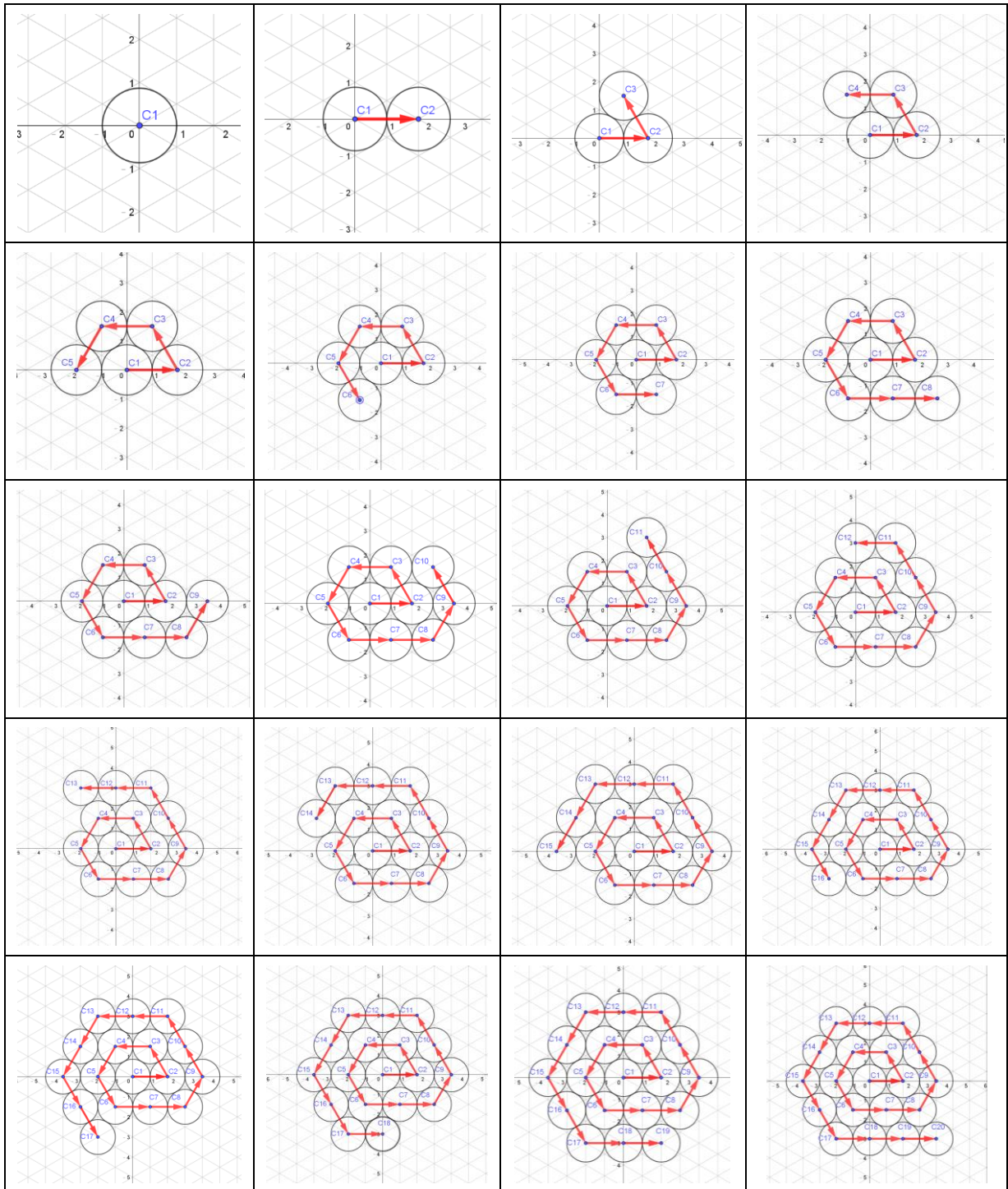


表 03 : $k = 1 \sim 20$ 鋪排圖形之凸包周常最小值 $L_{min}(k)$ 列表

| | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $L_{min}(k = 1)$ | $L_{min}(k = 2)$ | $L_{min}(k = 3)$ | $L_{min}(k = 4)$ | $L_{min}(k = 5)$ |
| $2\pi r$ | $2\pi r + 4r$ | $2\pi r + 6r$ | $2\pi r + 8r$ | $2\pi r + 10r$ |
| $L_{min}(k = 6)$ | $L_{min}(k = 7)$ | $L_{min}(k = 8)$ | $L_{min}(k = 9)$ | $L_{min}(k = 10)$ |
| $2\pi r$ $+ (2\sqrt{3} + 8)r$ | $2\pi r + 12r$ | $2\pi r + 14r$ | $2\pi r$ $+ (2\sqrt{3} + 12)r$ | $2\pi r + 16r$ |
| $L_{min}(k = 11)$ | $L_{min}(k = 12)$ | $L_{min}(k = 13)$ | $L_{min}(k = 14)$ | $L_{min}(k = 15)$ |
| $2\pi r$ $+ (2\sqrt{3} + 14)r$ | $2\pi r + 18r$ | $2\pi r$ $+ (2\sqrt{3} + 16)r$ | $2\pi r + 20r$ | $2\pi r$ $+ (2\sqrt{3} + 18)r$ |
| $L_{min}(k = 16)$ | $L_{min}(k = 17)$ | $L_{min}(k = 18)$ | $L_{min}(k = 19)$ | $L_{min}(k = 20)$ |
| $2\pi r + 20r$ | $2\pi r$ $+ (2\sqrt{7} + 16)r$ | $2\pi r$ $+ (2\sqrt{3} + 18)r$ | $2\pi r + 22r$ | $2\pi r$ $+ (2\sqrt{3} + 20)r$ |

凸包線周長最小值 $L_{min}(k)$ 的部分，透過研究方法中效率鋪排的原理，我們以 (6,6,6) 鑲嵌形式作鋪排，並且發現鋪排的規律中，若滿足螺旋狀緊密鋪排之結構恰可符合最小周長的條件。

並且隨 k 增加之鋪排過程，會依次過渡當 $k = 3n^2 - 3n + 1$ 時的完美正六邊形圖形，其中 n 為滿足 $k \geq 3n^2 - 3n + 1$ 之最大整數，我們又稱為完美正六邊形的層數，如下圖 07 所表示。

其中 $3n^2 - 3n + 1$ 值的由來在於每一層所使用的正六邊形數恰好等於 $6(n - 1)$ 個圓，但除第一層僅使用一個圓，也就是說：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= 1 + 6 + 12 + 18 + \cdots + 6(n - 1) = 1 + \frac{(6 + 6(n - 1)) \times (n - 1)}{2} \\ \therefore S_n &= 3n^2 - 3n + 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

藉此我們先令 $S_n = \{n\} = 3n^2 - 3n + 1$ 表示鋪排 n 層正六邊形所使用之圓形數，且 $\{n'\} = k - \{n\}$ 表剩餘鋪排在第 $n + 1$ 層之圓形數，以方便後續計算時使用。

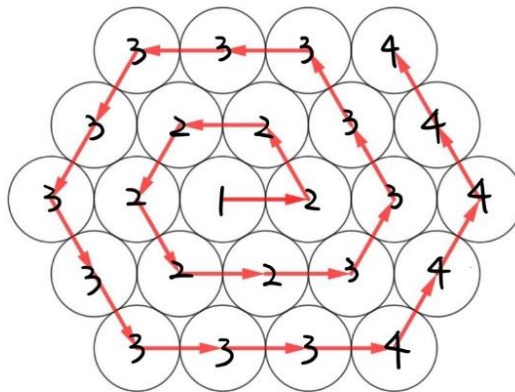


圖 07：完美正六邊形圖形之層數示意圖，研究者以 GeoGebra 軟體自製。

緊接著，在鋪排的過程中，我們不難從上述表 02 的圖形、表 03 的數值中發現，凸包線中的部分線段會有規律地產生 E_{z1} 線段循環（由表 04 作呈現），而 E_{z1} 是用來表示由 $z + 2$ 個圓所組成的一種結構，如下圖 08。以一個圓為圓心，以 120° 為夾角向兩個方向分別相切鋪排 1、 z 個圓，如圖 08。故藉由作通過 $\overline{C_0C_z}$ 延伸之直線，並作通過 C_1 且垂直於前述直線之輔助線後，兩條直線交於點 h ，則可由 30° 、 60° 、 90° 直角三角形之邊長比，並透過畢氏定理導出下式 (2.2) [9]：

$$|E_{z1}| = 2r\sqrt{(C_1h)^2 + (C_zh)^2} = \sqrt{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2r\sqrt{z^2 + z + 1} \quad (2.2)$$

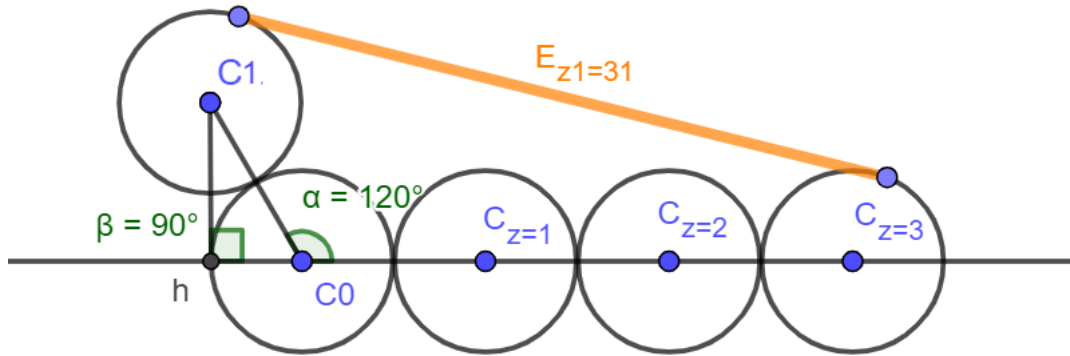


圖 08： E_{z1} 結構示意圖，研究者以 GeoGebra 軟體自製。

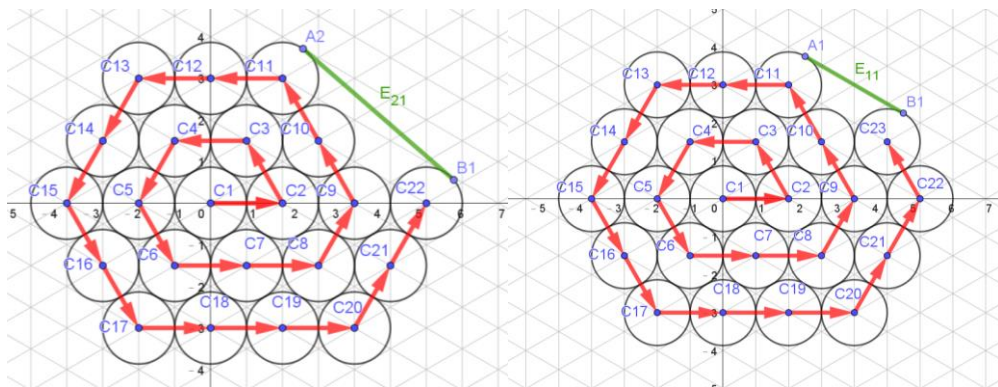


圖 09：凸包線段中 E_{z1} 出現位置示意圖，研究者以 GeoGebra 軟體自製。

接著我們透過遞迴關係法製作下列 $k = 1 \sim 40$ 凸包周長值之表 04，以 L_k 表示 $L_{min}(k)$ 。同時可以觀察到 E_{z1} 項與其後方 aR 項呈現之規律有兩種循環，我們稱為循環步驟數 s 、循環規律數 p 。

這部分在表 04 中我們以不同色的大括弧表示不同的規律數，如橘色為 $p = 1$ ，綠色為 $p = 2$ 以此類推，在經歷完每個循環 p 時最小周長值剛好會變大 $2r$ ，而 s 則代表目前第 k 個圓處在某個循環規律數 p （括號範圍）內的第幾個步驟。

表 04：k = 1~40 最小凸包周長值之遞迴關係表。

| | | | | |
|--|--|---|---|---|
| $L_1 = 2\pi R^{\leftarrow}$ | $L_9 = L_8 + E_{11} - 2R^{\leftarrow}$ | $L_{17} = L_{16} + E_{12} - 4R^{\leftarrow}$ | $L_{25} = L_{24} + E_{12} - 4R^{\leftarrow}$ | $L_{33} = L_{32} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ |
| $L_2 = L_1 + E_{10} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{10} = L_9 - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{18} = L_{17} - E_{12} + E_{11} + 2R^{\leftarrow}$ | $L_{26} = L_{25} - E_{12} + E_{11} + 2R^{\leftarrow}$ | $L_{34} = L_{33} + E_{13} - 6R^{\leftarrow}$ |
| $L_3 = L_2 + E_{10} + 2R^{\leftarrow}$ | $L_{11} = L_{10} + E_{11} - 2R^{\leftarrow}$ | $L_{19} = L_{18} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{27} = L_{26} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{35} = L_{34} - E_{13} + E_{12} + 2R^{\leftarrow}$ |
| $L_4 = L_3 + E_{10} + 2R^{\leftarrow}$ | $L_{12} = L_{11} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{20} = L_{19} + E_{11} - 2R^{\leftarrow}$ | $L_{28} = L_{27} + E_{12} - 4R^{\leftarrow}$ | $L_{36} = L_{35} - E_{12} + E_{11} + 2R^{\leftarrow}$ |
| $L_5 = L_4 + E_{10} + 2R^{\leftarrow}$ | $L_{13} = L_{12} + E_{11} - 2R^{\leftarrow}$ | $L_{21} = L_{20} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{29} = L_{28} - E_{12} + E_{11} + 2R^{\leftarrow}$ | $L_{37} = L_{36} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ |
| $L_6 = L_5 + E_{11} - 2R^{\leftarrow}$ | $L_{14} = L_{13} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{22} = L_{21} + E_{12} - 4R^{\leftarrow}$ | $L_{30} = L_{29} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{38} = L_{37} + E_{12} - 4R^{\leftarrow}$ |
| $L_7 = L_6 - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{15} = L_{14} + E_{11} - 2R^{\leftarrow}$ | $L_{23} = L_{22} - E_{12} + E_{11} + 2R^{\leftarrow}$ | $L_{31} = L_{30} + E_{12} - 4R^{\leftarrow}$ | $L_{39} = L_{38} - E_{12} + E_{11} + 2R^{\leftarrow}$ |
| $L_8 = L_7 + E_{10} + 2R^{\leftarrow}$ | $L_{16} = L_{15} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{24} = L_{23} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ | $L_{32} = L_{31} - E_{12} + E_{11} + 2R^{\leftarrow}$ | $L_{40} = L_{39} - E_{11} + 4R^{\leftarrow}$ |

其中我們也可以發現恰好 p 的值剛好等於內部循環的總步驟數，即 $1 \leq r \leq p$ ，接著我們將 p 出現的順序以數列的形式列出下式 (2.3)：

$$\{p\}_{i=1}^u = 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4, \dots, \left(\left\lfloor \frac{u+6}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(u-6)\lfloor \frac{u}{6} \rfloor}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{u-6\lfloor \frac{u}{6} \rfloor}{5} \right\rfloor \right) \quad (2.3)$$

p_u 一般式中 $u - 6\lfloor \frac{u}{6} \rfloor$ 之中括弧表示高斯地板函數，由於 p_u 之數列規律為六個一循環，故以該式來作為判別第 u 項處於循環中的第幾項所用。

又因為 p 數列為每六個完成一次循環規律，且每個循環中在滿足每層完美正六邊形後之循環數可視為 $x - 1, x, x, x, x, x + 1$ ，如 $p_4, p_{10}, p_{16}, \dots$ 恰完成第 2, 3, 4, ... 層的完美正六邊形，所以我們透過設定新的變數 C ，以 (2.4) 式用於判斷第 k 個圓處在此六個循環數所形成的循環節中的哪一個。

緊接著我們將先前討論之變數 s 、 p 、 C 以 k 、 n 作表示：

$$C(k) = \left\lfloor \frac{\{n'\}}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\{n'\}}{6n} \right\rfloor + 1 \quad (2.4)$$

$$p(k) = n + \left\lfloor \frac{C}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{C} \right\rfloor \quad (2.5)$$

其中 $s(k)$ 我們討論第 $n+1$ 層剩餘圓個數 $\{n'\}$ 減去已完成循環之圓個數

$\left(\left\lfloor \frac{\{n'\}}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\{n'\}}{6n} \right\rfloor \right) \times n + (-1)^{\left\lfloor \frac{\frac{\epsilon}{n-1}}{\{n'\}-1} \right\rfloor}$ 後剩餘的數量來計算，簡單來說，就是把前面完成規律的所有圓扣除，剩下的圓就是最新一個規律的內容物，有幾個就是這個規律的第幾項。

$$\begin{aligned} s(k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\{n'\} - \left(\left\lfloor \frac{\{n'\}}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\{n'\}}{6n} \right\rfloor \right) \times n + (-1)^{\left\lfloor \frac{\frac{\epsilon}{n-1}}{\{n'\}-1} \right\rfloor} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(C + \{n'\} - 1 + (-1)^{\left\lfloor \frac{\epsilon}{n-1-\{n'\}} \right\rfloor} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

有了上方變數的結果，對照表 03 與表 04 之規律，我們可得出凸包線周長的最小值的 $L_{min}(k)$ 如下：

$$L_{min}(k) = 2r \left(\pi + 6n - 6 + \left\lfloor \frac{\{n'\}}{n} \right\rfloor + \sqrt{(p-s)^2 + (p-s) + 1} - (p-s) + \left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor \right) \quad (2.7)$$

二、討論 k 個半徑為 r 的相同硬幣，相切鋪排時可形成之最大凸包線周長。

為了能夠組成最大凸包線的周長，代表著每個圓都要能夠讓圖形凸包線有變長的貢獻在，例如圖 10 中的 C_2 、 C_9 就是不影響凸包線周長的圓，此為必須避免的鋪排結構。

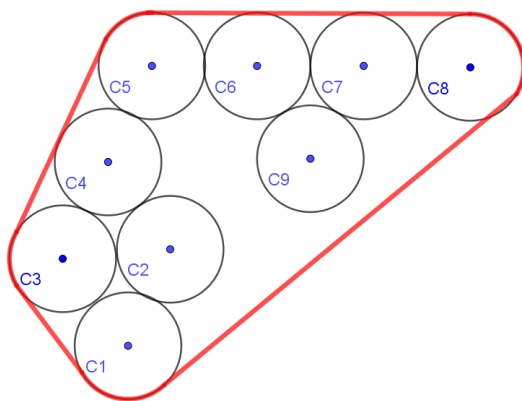


圖 10：含有未貢獻周長之硬幣之結構示意圖，研究者以 GeoGebra 軟體自製。

為了解決這樣的問題，我們將 k 個圓所鋪排的結構，以一個圓為初始情況，每多鋪排一個圓就給與 $2r$ 長度之線段作連結，並以線段的端點代表圓的圓心位置，就可以將圖由圖 11 轉換成圖 12 的樣子，值得一提的是這個方式並不受順序影響解的結果。

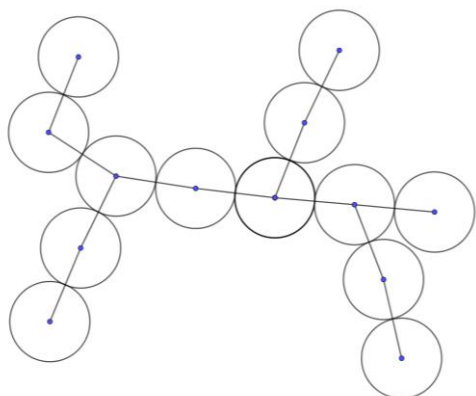


圖 11：圓心線段連結示意圖，研究者以 GeoGebra 軟體自製。

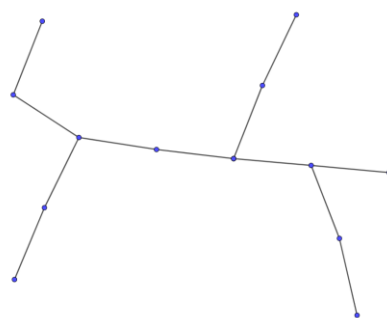


圖 12：圖 11 轉化後之結構示意圖，研究者以 GeoGebra 軟體自製。

以上述圖 12 轉換之結果為例，我們可以將每一線段簡易區分成「單圓連結」與「多圓連結」來表示一個圓中所延伸出去的線段數，如下圖 13，單圓連結以綠色線段標註，多圓連結以藍色線段標註。藉此我們得以分辨線段是否進行繼續的延伸，或是成為該路徑的終點。

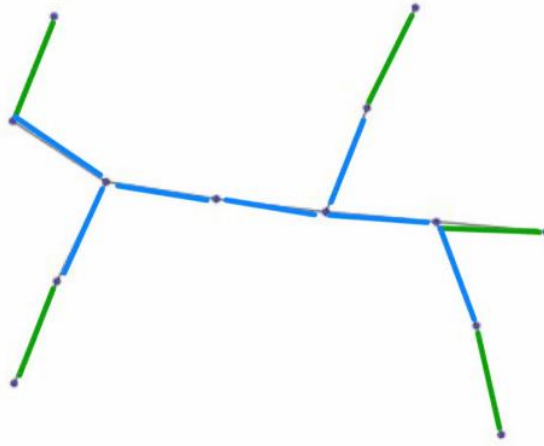


圖 13：將圖 12 作單圓連結與多圓連結線段標示，研究者以 GeoGebra 軟體自製。

接下來的討論中，我們以圖 14 之較複雜的結構為例，並將圖 14 中的凸包代表點依照順時針方向連結後組成圖 15 中的紅色線段，就可以找出跨越或未跨越凸包線的單圓連結線段，如圖 15 至圖 16 之修改過程。

若將這些線段上的圓消除後可得到新的結構圖中沿著線段繞著逆時針方向行走，每個凸包代表點走到另一個凸包代表點前不會遇到其他分支路徑，對於這樣的路徑假設今天鋪排的圖形有 n 個凸包代表點 $a_1 \sim a_n$ ，我們將 $a_1 \sim a_2$ 、 $a_2 \sim a_3$... $a_{n-1} \sim a_n$ 、 $a_n \sim a_1$ 內路徑做畫線區分，如圖 17 中黃色線所標記之路徑。且透過黃色線段之區分就可以得到由多個多邊形所拼成的圖 14（見圖 17 中以各色彩之塗色區分方式）。

故透過三角不等式的推廣可以知道，對於每個多邊形而言（凸或凹多邊形都有可能），任一邊長必小於其餘邊長之總和。也就是說外路徑（凸包線） $\overline{a_1 a_2}$ 、 $\overline{a_2 a_3}$ 、 $\overline{a_3 a_4}$ 、...、 $\overline{a_{n-1} a_n}$ 、 $\overline{a_n a_1}$ 的距離和會小於內路徑 $\overline{a_1 \sim a_2}$ 、 $\overline{a_2 \sim a_3}$ 、 $\overline{a_3 \sim a_4}$ 、...、 $\overline{a_{n-1} \sim a_n}$ 、 $\overline{a_n \sim a_1}$ 之距離和。

又上述 n 段總內路徑長看似複雜，其實恰好等於 $4r(k-1)$ ，這是因為這 k 個圓會產生 $k-1$ 個分支，每個分支長為 $2r$ 且會經過兩次，故內路徑總長為 $4r(k-1)$ 。

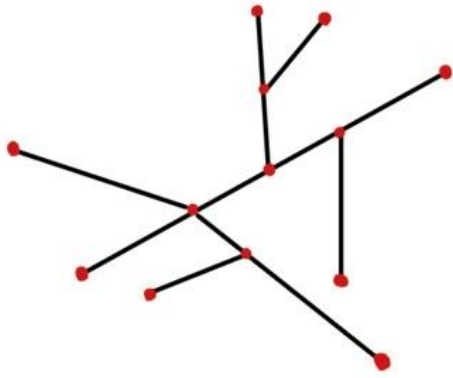


圖 14：另類轉化結構圖，研究者自行繪製。

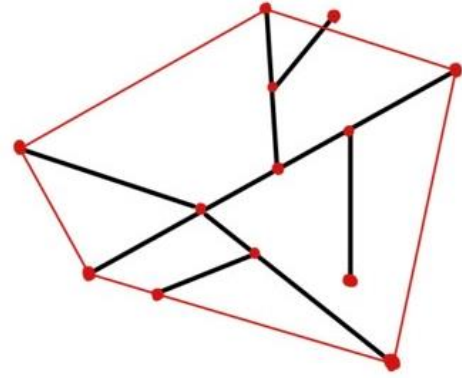


圖 15：將圖 14 中凸包代表點作逆時針方向依序連接，可透過是否有越出凸包線支線段判斷是否畫錯，研究者自行繪製。

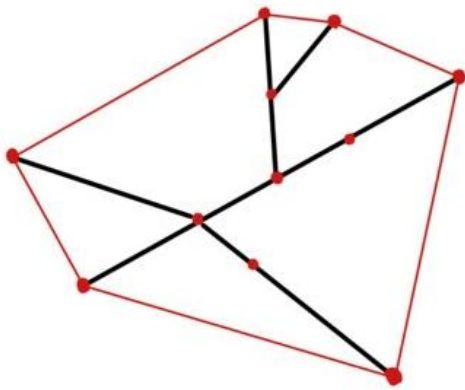


圖 16：將圖 15 之線段作等價消除與重製凸包線，研究者自行繪製。

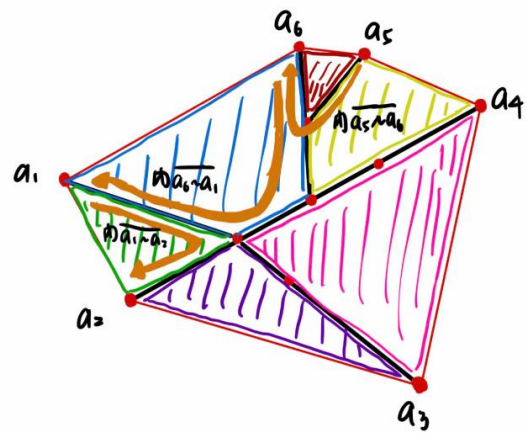


圖 17：圖 16 之多邊形分割、凸包代表點與內路徑示意圖，研究者自行繪製。

接著我們將初始的鋪排情形的凸包線長稱為 $L_{k,a}$ ，轉化成線段圖的凸包線長稱為 $M_{k,a}$ ，這兩個變數會滿足 $L_{k,a} = 2\pi r + M_{k,a}$ ，接著將總內路徑長稱為 $I_{k,a}$ ，則滿足(3.1)式：

$$4r(k - 1) = I_{k,a} \geq M_{k,a} = L_{k,a} - 2\pi r \quad (3.1)$$

簡單來說我們可以用轉化圖形的凸包線長來表示初始圖形的凸包線長，再來就是轉

化圖形的凸包線長必不大於內路徑總長。這也就代表 $L_{k,a} \leq 4r(k-1) + 2\pi r$ ，又因為如果今天我們把圓做直線鋪排如下圖 18，其周長恰為 $4r(k-1) + 2\pi r$ ，所以上述不等式的相等情況成立，也就代表以 k 個半徑為 r 的相同硬幣，相切鋪排時可形成之最大凸包線周長 $L_{max}(k) = 4r(k-1) + 2\pi r$ 。

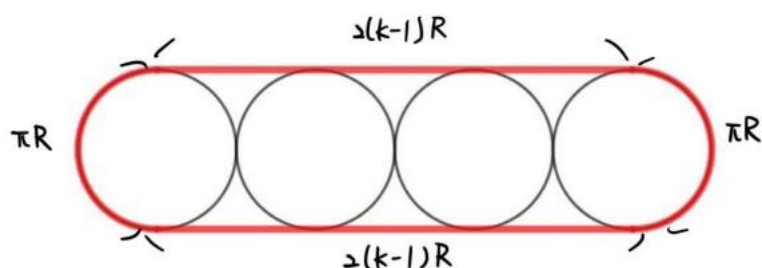


圖 15：直線鋪排圓之凸包線長示意圖，研究者以 GeoGebra 軟體自製。

伍、討論

在這次的研究中，我們成功透過單位晶格法與正則鑲嵌的結構計算，推導出最具空間使用效率的鋪排模式，藉此進行最小凸包線周長的討論。接著利用遞迴關係、等價結構、三角不等式的方式導出相同圓相切鋪排時，凸包線長的最大值與最小值鋪排規律、結構與通解方程式，解決了目的中的所有問題。

不過在推導的過程中我們尚未掌握較好的數學描述方式，多以敘述的方式呈現規律。但若不這樣處理，也會因大量的特殊情況，導致推導過程出現大量變數，導致我們沒辦法做有效的計算整理。這是這份研究目前正在持續努力的地方，同時最小周長的部分，我們也希望能找到一個合理的方式進行數學歸納法的證明其螺旋鋪排之性質。

同時在未來我們也希望能同文獻探討中前人的研究目的，繼續以新的理論討論凸包線所圍繞之封閉面積之最大值與最小值，並嘗試推廣應用在多圓情形的^[8]迪索公式，以及證明是否真如文獻所言鋪排的現象與卡塔蘭數列有關。

陸、結論

一、全等圓相切鋪排以 (6,6,6) 鋪排法具有最大的空間使用效率，並達到 $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cong 90.69\%$ 。

二、以 k 個半徑為 r 的相同硬幣，相切鋪排時可形成之最小凸包線周長 $L_{min}(k)$ 滿足：

$$L_{min}(k) = 2r \left(\pi + 6n - 6 + \left[\frac{\{n'\}}{n} \right] + \sqrt{(R-s)^2 + (R-s) + 1} - (R-s) + \left[\frac{s}{R} \right] \right)。$$

三、以 k 個半徑為 r 的相同硬幣，相切鋪排時可形成之最大凸包線周長 $L_{max}(k)$ 滿足：

$$L_{max}(k) = 4r(k-1) + 2\pi r。$$

以上，本篇研究將參考文獻[1]中前人之研究中部分目的進行延伸性探討，以不同的論證思路進行研究，並成功解出最小周長在任意圓數 k 時之通解方程式，解決前人尚未完成之非「完美圖形」情形，並且以三角不等式的推廣方式論證最大周長的不等式解，與最大值情況的存在性舉證。

柒、參考資料及其他

- [1] 黃予暄 (2013 年 10 月 20 日)。「Ch1-西亞與中亞」。介壽國中地理科網頁與教學檔案。2023 年 11 月 28 日，取自：
<http://sip.csjh.tp.edu.tw/sites/geology/DocLib11/%E9%BB%83%E4%BA%88%E6%9A%84%E8%80%81%E5%B8%AB/%E4%B8%96%E7%95%8C%E5%9C%B0%E7%90%86%E8%A3%9C%E5%85%85%E7%B4%A0%E6%9D%90/%E8%A5%BF%E4%BA%9E.pdf>。
- [2] 李志皓、葉聿文、鍾馥羽 (2019)。中學生網站小論文：「硬幣相切的圖形探討」。2023 年 11 月 21 日，取自：<https://www.shs.edu.tw/Customer/Winning/EssayIndex>。
- [3] 蕭慶利 (2007)。「運用二維對稱特性建構雙瓦片鋪磚之研究」。交通大學，碩士論文。

2023 年 12 月 24 日，取自 <https://reurl.cc/QmjYo>。

- [4] 維基百科。「取整函數」。2023 年 12 月 17 日，取自：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%96%E6%95%B4%E5%87%BD%E6%95%B0>。
- [5] 山姆的競程日記（2020 年 10 月 5 日）。「凸包 Convex Hull」。2023 年 12 月 12 日，取自：
<https://sam571128.codes/2020/10/05/Convex-Hull/>。
- [6] 洪雪芬、陳幸永、余淑娟、王淑華、許俊文（2009）。「數學 PBL/專題式學習：鑲嵌圖形探索－數學繪本之教學運用 I」。2023 年 11 月 20 日，取自：
<https://mathseed.ntue.edu.tw/mathpicture/98/elementary-16.pdf>。
- [7] 國立臺灣大學化學系：黎哲豪、陳藹然（2011 年 07 月 27 日）。「立方晶格」。科學 Online。2024 年 01 月 08 日，取自 <https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=31205>。
- [8] 老王的夢田（2012 年 12 月 16 日）。「索迪公式（Soddy formula）」。痞客邦。2024 年 03 月 08 日，取自：<https://lyingheart6174.pixnet.net/blog/post/5121475>。
- [9] 左台益等人（2023 年 08 月 01 日）「數學課本二上」（頁 75-110）。南一書局企業股份有限公司。