屏東縣第64屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學

組　　別：國中組

作品名稱：積雪成周

關 鍵 詞：科赫雪花、 數列與級數、遞迴關係（最多三個）

編號：B1011

製作說明：

1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。

2.編號：由承辦學校統一編列。

3.封面編排由參展作者自行設計。(←←←←←灰字請自行刪除)

作品名稱

摘要（300字以內含標點符號）

壹、前言(含研究動機、目的、文獻回顧)

貳、研究設備及器材

參、研究過程或方法

肆、研究結果

伍、討論

陸、結論

柒、參考資料及其他

※書寫說明：

1. 作品說明書一律以 A4大小紙張由左至右打字印刷（或正楷書寫影印）並裝訂成冊。
2. 作品說明書內容總頁數以30頁為限（不含封面、封底及目錄)。
3. 內容使用標題次序為壹、一、(一)、１、(１)。
4. 研究動機內容應包括作品與教材相關性（教學單元）之說明。
5. 原始紀錄資料(一律以 A4大小紙張裝訂成冊)於進入複賽時，須攜往評審會場供評審委員查閱，請勿將研究日誌或實驗觀察原始紀錄正本或影本寄交承辦學校，承辦學校將予以退回，不代為轉交評審委員。
6. **作品說明書自本頁起請勿出現校名、作者、校長及指導教師姓名等，並且照片中不得出現作者或指導教師之臉部，以便密封作業。**
7. 作品若有引用他人研究、延續自己先前已發表之研究等，應在作品說明書中詳實寫出本次作品創新部分或自己參與研究之比重。
8. 本作品說明書應於指定時間內，1式4份，逕送明正國中（屏東縣屏東市大連路70號)。如逾期送達，無法事先送交評審做書面審查者，以致影響成績者，概由參展學校或單位負責。
9. 參考資料書寫方式請參考最新 APA 格式。(詳見附件十)

積雪成周

摘要

本研究運用數列和級數的概念來探討幾何雪花的周長。將一個正k邊形的每條邊平分為m份，再以每條邊中間的一份為「邊」，向外做正k邊形。經過一次疊代後，我們再將每條邊平分成m份，向外做更小的正k邊形。然後不停地重複這個過程，直到n-1次疊代後所形成一片幾何雪花的周長。過程中照程序以圖形表徵記錄下周長，尋找其中的數學規律，再藉由所發現的關聯性推論不可見的延伸圖形，最後以數學歸納法證明所猜測一片幾何雪花周長。研究後得知，在邊長為1的正k邊形，在每邊中央的m分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代後，當k-1=m時，第n個圖形周長的一般式$z_n = \mathrm{k} + \frac{k(k-2)}{m}(n-1)$，遞迴關係式$z_n$=$z_{n-1}$+$\frac{k(k-2)}{m}$；當k-1≠m時，第n個圖形周長的一般式

z_n=k$\{1 + \frac{k-2}{m}[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}]\}$，遞迴關係式$z_n$=$z_{n-1}$+$\frac{k(k-2)}{m}\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-2}$。

壹、前言

一、研究動機

「一片兩片三四片，五六七八九十片。

千片萬片無數片，飛入梅花都不見。」

這是一首勾勒下雪天的詠雪佳句，讀之使人宛如置身於廣袤天地大雪紛飛之中，十分動人。在數學課堂上，老師也提及跟雪花相關的問題:「一片雪片的周長和地球的直徑哪個更長？」，這個話題引起了我們的興趣，心理揣測著世界上存有這種神奇雪花嗎？原來是1904年的瑞典數學家科赫(Helge von Koch)所提出的一種幾何學理論—「科赫雪花」(Koch Snowflake)。將一個正三角形的每條邊平分為三份，再以每條邊中間的一份為「邊」，向外做正三角形，這個過程稱為「一次疊代」。經過「一次疊代」，正三角形變為了12條邊。我們再將每條新的邊平分成三份，向外做更小的正三角形，稱為「二次疊代」。然後不停地重複這個過程，就形成了「科赫雪花」。相比來講，地球是一個龐大的橢圓球體，但根據「科赫雪花」論，一片雪花的周長竟然超越了地球的直徑。在好奇心驅使下，我們將三角形換成其他正多邊形，而平分成其它等分，探索隱藏在幾何雪花周長中的數學規律，並發現其中的關聯性，推論不可見的延伸圖形。

二、研究目的與待答問題

本研究主要的目的在探討將一個正k邊形的每條邊平分為m份，再以每條邊中間的一份為「邊」，向外做正k邊形，經過一次疊代後，我們再將每條新的邊平分成m份，向外做更小的正k邊形。然後不停地重複這個過程，直到n-1次疊代後，算出所形成幾何雪花的周長。根據上述研究目的，提出下列待答問題:

(一)邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的二分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代後，則第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式為何？

(二)邊長為1的正三角形中，在每邊中央的m分之一處向外做正三角形，經過n-1次疊代後，則第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式為何？

(三)邊長為1的正方形中，在每邊中央的m分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，則第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式為何？

(四)邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的m分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代後，則第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式為何？

三、研究工具

筆、電腦、繪圖軟體geogebra、文書處理軟體word

貳、研究方法與過程

一、研究方法

探究將一個邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的m分之一處向外做正k邊形，重複這個疊代的過程，隨著k和m的增加，以數列來表示所形成第n個雪花圖形周長的一般式。

	二分之一	三分之一	四分之一	…	m分之一
正三角形	$\langle a_i \rangle$	$\langle f_i \rangle$	$\langle g_i \rangle$		$\langle h_i \rangle$
正方形	$\langle b_i \rangle$	$\langle o_i \rangle$	$\langle p_i \rangle$		$\langle x_i \rangle$
正五邊形	$\langle c_i \rangle$				
正六邊形	$\langle d_i \rangle$				
…					
正k邊形	$\langle e_i \rangle$				$\langle z_i \rangle$

將上表說明如下:

1.邊長為1的正三角形中，在每邊中央的二分之一處向外做正三角形，重複這個疊代的過程，以$\langle a_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$a_1=3$。

2.邊長為1的正方形中，在每邊中央的二分之一處向外做正方形，重複這個疊代的過程，以$\langle b_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$b_1=4$。

3.邊長為1的正五邊形中，在每邊中央的二分之一處向外做正五邊形，重複這個疊代的過程，以$\langle c_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$c_1=5$。

4.邊長為1的正六邊形中，在每邊中央的二分之一處向外做正六邊形，重複這個疊代的過程，以$\langle d_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$d_1=6$。

5. 邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的二分之一處向外做正k邊形，重複這個疊代的過程，以$\langle e_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$e_1=k$。

6.邊長為1的正三角形中，在每邊中央的三分之一處向外做正三角形，重複這個疊代的過程，以$\langle f_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$f_1=3$。

7.邊長為1的正三角形中，在每邊中央的四分之一處向外做正三角形，重複這個疊代的過程，以$\langle g_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$g_1=3$。

8.邊長為1的正三角形中，在每邊中央的m分之一處向外做正三角形，重複這個疊代的過程，以$\langle h_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$h_1=3$。

9.邊長為1的正方形中，在每邊中央的三分之一處向外做正三角形，重複這個疊代的過程，以$\langle o_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$o_1=4$。

10.邊長為1的正方形中，在每邊中央的四分之一處向外做正三角形，重複這個疊代的過程，以$\langle p_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$p_1=4$。

11.邊長為1的正方形中，在每邊中央的m分之一處向外做正三角形，重複這個疊代的過程，以$\langle x_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$x_1=4$。

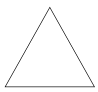
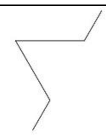
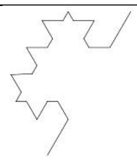
12. 邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的m分之一處向外做正k邊形，重複這個疊代的過程，以$\langle z_i \rangle$表示第i個圖形的周長，i=1,2,3,…,n，其中$z_1=k$。

三、研究過程

(一)探究邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的二分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代的過程，找出第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式。

$m=\frac{1}{2}$ $k=3$	→	$m=\frac{1}{2}$ $k=4$	→	$m=\frac{1}{2}$ $k=5$	→	$m=\frac{1}{2}$ $k=6$	→	推論 e_n

1.邊長為1的正三角形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正三角形，經過n-1次疊代後，找出第n個圖形周長一般式及遞迴關係式。

步驟	圖形	$\langle a_i \rangle$ 遞迴關係式	說明
(1)		a_1=3(1)	邊長為1的正三角形周長。
(2)	 × 3	a_2 =3(1+$\frac{1}{2}$) $a_2=a_1+\frac{3}{2}$	將一個正三角形的每條邊平分成2份，向外做正三角形，經過1次疊代後第2個圖形的周長。
(3)	 × 3	a_3 =3(1+$\frac{1}{2}$+$\frac{2}{4}$) =3(1+$\frac{1}{2}$ × 2) $a_3=a_2+\frac{3}{2}$	經過2次疊代後第3個圖形的周長及遞迴關係式。
(4)	 × 3	a_4 =3(1+$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}$) =3(1+$\frac{1}{2}$ × 3) $a_4=a_3+\frac{3}{2}$	經過3次疊代後第4個圖形的周長及遞迴關係式。
		…	

步驟(5):將一個正三邊形的每條邊平分成2份，向外做正三角形，經過n-1次疊代後，推論第n個圖形的周長a_n =3[1+$\frac{1}{2}(n-1)$]；遞迴關係式$a_n=a_{n-1}+\frac{3}{2}$。

步驟(6):證明

①設n=1時,$a_1=3[1+\frac{1}{2}(1-1)]=3$成立

②設n=t成立,即 $a_t=3[1+\frac{1}{2}(t-1)]$成立

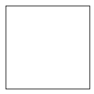
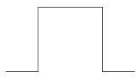
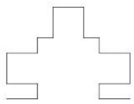
則n=t+1時, $a_{t+1}=a_t+\frac{3}{2}=3[1+\frac{1}{2}(t-1)]+\frac{3}{2}$

=$3(1+\frac{1}{2}t)$= $3\{1+\frac{1}{2}[(t+1)-1]\}$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n,

$a_n=3[1+\frac{1}{2}(n-1)]$恆成立。

2.邊長為1的正方形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正方形，經過n-1次疊代後，找出第n個圖形周長一般式及遞迴關係式。

步驟	圖形	$\langle\ b_i \rangle$	說明
		遞迴關係式	
(1)		$b_1=4(1)$	邊長為1的正方形周長。
(2)	 $\times 4$	$b_2=4(1+\frac{2}{2}\times 1)$	將一個正方形的每條邊平分成2份，向外做正方形，經過1次疊代後第2個圖形的周長及遞迴關係式。
		$b_2=b_1+4\times\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^0$	
(3)	 $\times 4$	$b_3=4\{1+\frac{2}{2}[\left(\frac{3}{2}\right)^0+\left(\frac{3}{2}\right)^1]\}$	經過2次疊代後第3個圖形的周長及遞迴關係式。
		$b_3=b_2+4\times\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^1$	
…			

步驟(4):將一個正方形的每條邊平分成2份，向外做正方形，經過n-1次疊代後，

推論第n個圖形的周長$b_n=4\{1+\frac{2}{2}[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]\}$；遞迴關係式$b_n=b_{n-1}+4\times\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-2}$

步驟(5):證明

①設n=1時, $b_1=4\left\{1+\frac{2}{2}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{1-1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right]\right\}=4$成立

②設n=t成立,即$b_t=4\left\{1+\frac{2}{2}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right]\right\}$成立

則n=t+1時, $b_{t+1}=b_t+4\times\frac{2}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{t+1-2}$

$$=4\left\{1+\frac{2}{2}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right]\right\}+4\times\frac{2}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}=4\left\{1+\frac{2}{2}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}-1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}}{\frac{3}{2}-1}\right]\right\}$$

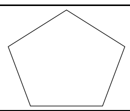
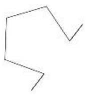
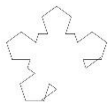
$$=4\left\{1+\frac{2}{2}\left[\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right]\right\}=4\left\{1+\frac{2}{2}\left[\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right]\right\}$$

$$4\left\{1+\frac{2}{2}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{t}-1}{\frac{3}{2}-1}\right]\right\}=4\left\{1+\frac{2}{2}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right]\right\}$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n,

$b_n=4\left\{1+\frac{2}{2}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right]\right\}$恆成立。

3.邊長為1的正五邊形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正五邊形，經過n-1次疊代後，找出第n個圖形周長一般式及遞迴關係式。

步驟	圖形	< c_i > 遞迴關係式	說明
(1)		$c_1=5(1)$	邊長為1的正五邊形周長。
(2)	 × 5	$c_2=5(1+\frac{3}{2})$ $c_2=c_1+5\times\frac{3}{2}\times(\frac{4}{2})^0$	將一個正五邊形的每條邊平分成2份，向外做正五邊形，經過1次疊代後第2個圖形的周長及遞迴關係式。
(3)	 × 5	$c_3=5\{1+\frac{3}{2}[\left(\frac{4}{2}\right)^0+\left(\frac{4}{2}\right)^1]\}$ $c_3=c_2+5\times\frac{3}{2}\times(\frac{4}{2})^1$	經過2次疊代後第3個圖形的周長及遞迴關係式。
…			

步驟(4):將一個正五邊形的每條邊平分成2份，向外做正五邊形，經過n-1次疊代後，推論第n個圖形的周長$c_n=5\{1+\frac{3}{2}[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{4}{2}-1}]\}$；遞迴關係式

$c_n=c_{n-1}+5\times\frac{3}{2}\times(\frac{4}{2})^{n-2}$ 。

步驟(5):證明

①設n=1時,$c_1=5\left\{1+\frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{1-1}-1}{\frac{4}{2}-1}\right]\right\}=5$成立

②設n=t成立,即$c_t=5\left\{1+\frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{4}{2}-1}\right]\right\}$成立

則n=t+1時, $c_{t+1}=c_t+5\times\frac{3}{2}\left(\frac{4}{2}\right)^{t+1-2}=5\left\{1+\frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{4}{2}-1}\right]\right\}+5\times\frac{3}{2}\left(\frac{4}{2}\right)^{t-1}$

$=5\left\{1+\frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{t-1}-1+\frac{2}{2}\left(\frac{4}{2}\right)^{t-1}}{\frac{4}{2}-1}\right]\right\}=5\left\{1+\frac{3}{2}\left[\frac{\frac{4}{2}\left(\frac{4}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{4}{2}-1}\right]\right\}=5\left\{1+\frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{t}-1}{\frac{4}{2}-1}\right]\right\}$

$$=5\left\{1+\frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{4}{2}-1}\right]\right\}$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n,

$c_n=5\left\{1+\frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{4}{2}-1}\right]\right\}$恆成立。

4.邊長為1的正六邊形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正六邊形，經過n-1次疊代後，找出第n個圖形周長一般式及遞迴關係式。

推論	說明
周長d_1 =6(1)	邊長為1的正六邊形周長。
周長d_2 =6(1+$\frac{4}{2}$) 遞迴關係式 $d_2 = d_1 + 6\times\frac{4}{2}\times(\frac{5}{2})^0$	將一個正六邊形的每條邊平分成2份，向外做正六邊形，經過1次疊代後第2個圖形的周長及遞迴關係式。
周長d_3 =6{1+$\frac{4}{2}[\left(\frac{5}{2}\right)^0+\left(\frac{5}{2}\right)^1]$} 遞迴關係式 $d_3 = d_2 + 6\times\frac{4}{2}\times(\frac{5}{2})^1$	經過2次疊代後第3個圖形的周長及遞迴關係式。
…	
周長d_n =6{1+$\frac{4}{2}[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{5}{2}-1}]$} 遞迴關係式 $d_n = d_{n-1} + 6\times\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^{n-2}$	將一個正六邊形的每條邊平分成2份，向外做正六邊形，經過n-1次疊代後，推論第n個圖形的周長及遞迴關係式。

證明:

(1)設n=1時, $d_1 = 6\left\{1+\frac{4}{2}\left[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{1-1}-1}{\frac{5}{2}-1}\right]\right\} = 6$ 成立

(2)設n=t成立,即$d_t = 6\left\{1+\frac{4}{2}\left[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{5}{2}-1}\right]\right\}$成立

則n=t+1時, $d_{t+1} = d_t + 6\times\frac{4}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{t+1-2}$

$$= 6\left\{1+\frac{4}{2}\left[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{5}{2}-1}\right]\right\} + 6\times\frac{4}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{t-1} = 6\left\{1+\frac{4}{2}\left[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{t-1}-1+\frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{t-1}}{\frac{5}{2}-1}\right]\right\}$$

$$= 6\left\{1+\frac{4}{2}\left[\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{5}{2}-1}\right]\right\} = 6\left\{1+\frac{4}{2}\left[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{t}-1}{\frac{5}{2}-1}\right]\right\}=6\left\{1+\frac{4}{2}\left[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{5}{2}-1}\right]\right\}$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n,

$d_n = 6\left\{1+\frac{4}{2}\left[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{5}{2}-1}\right]\right\}$恆成立。

5.邊長為1的正k邊形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正k邊形，經過n-1次，疊代後，推論第n個圖形周長一般式及遞迴關係式

(1) k-1=m ，$e_n = 3+\frac{3}{2}(n-1)$、 $e_n = e_{n-1} + \frac{3}{2}$

(2) k-1 ≠m，e_n=k{1+$\frac{k-2}{2}[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{k-1}{2}\right)-1}]$}、$e_n = e_{n-1} + \frac{k(k-2)}{2}(\frac{k-1}{2})^{n-2}$

證明:

(1)k-1=m時，$e_n=a_n$

證明同上

(2)k-1 ≠m

①設n=1時,$e_1=k\left\{1+\frac{k-2}{2}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{1-1}-1}{\frac{k-1}{2}-1}\right]\right\}=k$,成立

②設n=t成立,即$e_t=k\left\{1+\frac{k-2}{2}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{k-1}{2}-1}\right]\right\}$成立

則n=t+1時, $e_{t+1}=e_t+\frac{k(k-2)}{2}\left(\frac{k-1}{2}\right)^{t+1-2}$

$$=k\left\{1+\frac{k-2}{2}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{k-1}{2}-1}\right]\right\}+\frac{k(k-2)}{2}\left(\frac{k-1}{2}\right)^{t-1}=\ \mathrm{k}\left\{1+\frac{k-2}{2}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{t-1}-1+\frac{k-3}{2}\left(\frac{k-1}{2}\right)^{t-1}}{\frac{k-1}{2}-1}\right]\right\}$$

$$=\mathrm{k}\left\{1+\frac{k-2}{2}\left[\frac{\frac{k-1}{2}\left(\frac{k-1}{2}\right)^{t-1}-1}{\frac{k-1}{2}-1}\right]\right\}=\ k\left\{1+\frac{k-2}{2}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{t}-1}{\frac{k-1}{2}-1}\right]\right\}=k\left\{1+\frac{k-2}{2}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{k-1}{2}-1}\right]\right\}$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n且k≠3,

$e_n=k\left\{1+\frac{k-2}{2}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{k-1}{2}-1}\right]\right\}$恆成立。

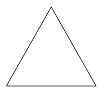
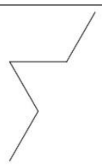
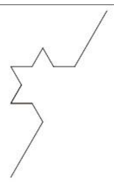
(二)邊長為1的正三角形中，在每邊中央的m分之一處向外做正三角形，經過n-1次疊代後，找出第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式

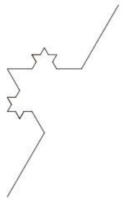
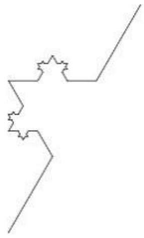
k = 3 m = $\frac{1}{2}$	→	k = 3 m = $\frac{1}{3}$	→	k = 3 m = $\frac{1}{4}$	→	推論 h_n

1.邊長為1的正三角形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正三邊形，經過n-1次疊代後，找出第n個圖形周長a_n =3[1+$\frac{1}{2}(n-1)$]；遞迴關係式$a_n=a_{n-1}+\frac{3}{2}$ 。

(證明同上)

2.邊長為1的正三邊形，在每邊中央三分之一處分別向外做出正三邊形，經過n-1次疊代後，找出第n個圖形周長一般式。

步驟	圖形	＜ f_i＞	說明
(1)		f_1=3(1)	邊長為1的正三角形周長為1。
(2)	 ×3	f_2=3(1+$\frac{1}{3}$) $f_2=f_1+3\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^0$	將一個正三角形的每條邊平分成3份，向外做正三角形，經過1次疊代後第2個圖形的周長及遞迴關係式。
(3)	 ×3	f_3=3(1+$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$) $f_3=f_2+3\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^1$	經過2次疊代後第3個圖形的周長及遞迴關係式。。

(4)	 ×3	$f_4=3(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27})$ $f_4=f_3+3\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2$	經過3次疊代後第4個圖形的周長及遞迴關係式。。
(5)	 ×3	$f_5=3(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81})$ $f_5=f_4+3\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^3$	經過4次疊代後第5個圖形的周長及遞迴關係式。
		…	

步驟(6):邊長為1的正三邊形，在每邊中央三分之一處分別向外做出正三邊形，經過n-1次疊代後，推論第n個圖形周長一般式

$f_n=3〔1+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^0+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^1+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^3+\cdots+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-2}〕$

$=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{(\frac{2}{3})^{n-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]$；遞迴關係式 $f_n=f_{n-1}+3\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-2}$

步驟(7):證明

①設n=1時，$f_1=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{(\frac{2}{3})^{1-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]=3$成立

②設n=t時，$f_t=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{(\frac{2}{3})^{t-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]$成立

則n=t+1時，$f_{t+1}=f_t+3\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{t+1-1}$

$$=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{t-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]+3\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^t$$

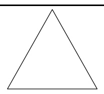
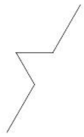
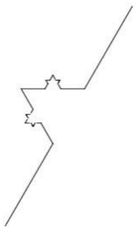
$$=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{t-1}-1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^t}{\frac{2}{3}-1}]=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{t-1}-1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^t}{\frac{2}{3}-1}]$$

$$=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{t-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{t}-1}{\frac{2}{3}-1}]=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n,

$f_n=3[1+\frac{1}{3}\times\frac{(\frac{2}{3})^{n-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]$恆成立。

3.邊長為1的正三邊形，在每邊中央四分之一處分別向外做出正三角形，經過n-1次疊代後，找出第n個圖形周長一般式。

步驟	圖形	$\langle g_i \rangle$	說明
(1)		$g_1=3(1)$	邊長為1的正三角形周長為1。
(2)	 ×3	$g_2=3(1+\frac{1}{4})$ $g_2=g_1+3\times\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^0$	將一個正三角形的每條邊平分成4份，向外做正三角形，經過1次疊代後第2個圖形的周長及遞迴關係式。
(3)	 ×3	$g_3=3(1+\frac{1}{4}+\frac{2}{16})$ $g_3=g_2+3\times\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^1$	經過2次疊代後第3個圖形的周長及遞迴關係式。
(4)	 ×3	$g_i=3(1+\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{4}{64})$ $g_4=g_3+3\times\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^2$	經過3次疊代後第4個圖形的周長及遞迴關係式。
…			

步驟(5):邊長為1的正三角形，在每邊中央四分之一處分別向外做出正三邊形，經過n-1次疊代後，推論第n個圖形周長一般式

$g_n=3〔1+\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2})^0+\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2})^1+\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2})^{n-2}〕$

$=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{(\frac{2}{4})^{n-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]$；遞迴關係式 $g_n=g_{n-1}+3\times\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^{n\ 2}$

步驟(6):證明

①設n=1時，$g_1=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{(\frac{2}{4})^{1-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]=3$成立

②設n=t時，$g_t=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{(\frac{2}{4})^{t-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]$成立

則n=t+1時，$g_{t+1}=g_t+3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^{t+1-2}$

$$=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{t-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]+3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^{t-1}=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{t-1}-1}{\frac{2}{4}-1}+\left(\frac{2}{4}\right)^{t-1}]$$

$$=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{t-1}-1-\frac{2}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^{t-1}}{\frac{2}{4}-1}]=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{\frac{2}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^{t-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]$$

$$=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{t}-1}{\frac{2}{4}-1}]=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n,

$g_n=3[1+\frac{1}{4}\times\frac{(\frac{2}{4})^{n-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]$恆成立。

4.邊長為1的正三角形中，在每邊中央$\frac{1}{2}$ 、$\frac{1}{3}$ 、$\frac{1}{4}$ 、 ... 、$\frac{1}{m}$處分別向外做出正三角形，經過n-1次疊代後，推論第n個圖形周長一般式(1)當k-1=m時，$h_n=3[1+\frac{1}{2}(n-1)]$(2)當k-1 ≠m時，$h_n=3[1+\frac{1}{m}\times\frac{(\frac{2}{m})^{n-1}-1}{\frac{2}{m}-1}]$；遞迴關係式

①當k-1=m時， $h_n=h_{n-1}+\frac{3}{2}$ ②當k-1 ≠m時， $h_n=h_{n-1}+3\times\frac{1}{m}(\frac{2}{m})^{n-2}$

證明:

(1)當k-1=m時，$h_n=a_n$，證明同上。

(2)當k-1 ≠m

①設n=1時，$h_1=3[1+\frac{1}{m}\times\frac{(\frac{2}{m})^{1-1}-1}{\frac{2}{m}-1}]=3$成立

②設n=t時，$h_t=3[1+\frac{1}{m}\times\frac{(\frac{2}{m})^{t-1}-1}{\frac{2}{m}-1}]$成立

則n=t+1時，$h_{t+1}=h_t+3\times\frac{1}{m}\times\left(\frac{2}{m}\right)^{t+1-2}$

$$=3[1+\frac{1}{m}\times\frac{\left(\frac{2}{m}\right)^{t-1}-1}{\frac{2}{m}-1}]+3\times\frac{1}{m}\times\left(\frac{2}{m}\right)^{t-1}$$

$$=3\{1+\frac{1}{m}\times[\frac{\left(\frac{2}{m}\right)^{t-1}-1}{\frac{2}{m}-1}+\left(\frac{2}{m}\right)^{t-1}]\}$$

$$=3\{1+\frac{1}{m}\times[\frac{\left(\frac{2}{m}\right)^{t-1}-1+(\frac{2}{m}-1)\left(\frac{2}{m}\right)^{t-1}}{\frac{2}{m}-1}]\}$$

$$=3\{1+\frac{1}{m}\times[\frac{\frac{2}{m}\left(\frac{2}{m}\right)^{t-1}-1}{\frac{2}{m}-1}]\}=3\{1+\frac{1}{m}\times[\frac{\left(\frac{2}{m}\right)^{t}-1}{\frac{2}{m}-1}$$

$$=3\{1+\frac{1}{m}\times[\frac{\left(\frac{2}{m}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{2}{m}-1}]\}$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n,

$h_n=3[1+\frac{1}{m}\times\frac{(\frac{2}{m})^{n-1}-1}{\frac{2}{m}-1}]$恆成立。

(三)邊長為1的正方形中，在每邊中央的m分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，找出第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式

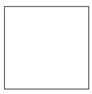
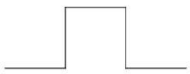
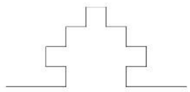
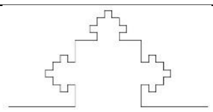
k = 4, $m = \frac{1}{2}$	→	k = 4, $m = \frac{1}{3}$	→	k = 4, $m = \frac{1}{4}$	→	推論 x_n

1.在邊長為1的正方形中，在每邊中央的二分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，找出第n圖形周長的一般式b_n $=4\{1+\frac{2}{2}[\frac{(\frac{3}{2})^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]\}$；遞迴關係式

$$b_n = b_{n-1} + 4 \times \frac{2}{2} \times (\frac{3}{2})^{n-2}$$

(說明同上)

2.在邊長為1的正方形中，在每邊中央的三分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，找出第n圖形周長的一般式。

步驟	圖形	< o_i >	說明
(1)		$o_1 = 4(1)$	邊長為1的正方形周長。
(2)	 × 4	$o_2 = 4 + \frac{8}{3}$ $o_2 = o_1 + \frac{8}{3}$	將一個正方形的每條邊平分成3份，向外做正方形，經過1次疊代後第2個圖形的周長及遞迴關係式。
(3)	 × 4	$o_3 = 4 + \frac{8}{3} \times 2$ $o_3 = o_2 + \frac{8}{3}$	經過2次疊代後第3個圖形的周長及遞迴關係式。
(4)	 × 4	$o_4 = 4 + \frac{8}{3} \times 3$ $o_4 = o_3 + \frac{8}{3}$	經過3次疊代後第4個圖形的周長及遞迴關係式。
…			

步驟(5):在邊長為1的正方形中，在每邊中央的三分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，推論第n圖形周長的一般式$o_n = 4 + \frac{8}{3} \times (n-1)$；遞迴關係式

$$o_n = o_{n-1} + \frac{8}{3}$$

步驟(6):證明

①設n=1時, $o_1 = 4 + \frac{8}{3}(1-1)] = 4$成立

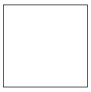
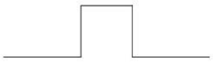
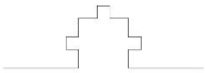
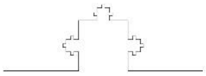
②設n=t成立,即$o_t = 4 + \frac{8}{3}(t-1)]$成立

則n=t+1時, $o_{t+1} = o_t + \frac{8}{3} = 4 + \frac{8}{3}(t-1)] + \frac{8}{3} = 4 + \frac{8}{3}t = 4 + \frac{8}{3}[(t+1)-1]$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n,

$o_n = 4 + \frac{8}{3}(n-1)]$恆成立。

3.在邊長為1的正方形中，在每邊中央的四分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，找出第n圖形周長的一般式及遞迴關係式。

步驟	圖形	＜ p_i＞	說明
(1)		$p_1=4(1)$	邊長為1的正方形周長。
(2)	 ×4	$p_2=4(1+\frac{2}{4})$ $p_2=p_1+4\times\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^0$	將一個正方形的每條邊平分成4份，向外做正方形，經過1次疊代後第2個圖形的周長及遞迴關係式。
(3)	 ×4	$p_3=4(1+\frac{2}{4}+\frac{6}{16})$ $p_3=p_2+4\times\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^1$	經過2次疊代後第3個圖形的周長及遞迴關係式。
(4)	 ×4	$p_4=4(1+\frac{2}{4}+\frac{6}{16}+\frac{18}{64})$ $p_4=p_3+4\times\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^2$	經過3次疊代後第4個圖形的周長及遞迴關係式。
…			

步驟(5):在邊長為1的正方形中，在每邊中央的四分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，推論第n圖形周長的一般式

$p_n=4$【$1+\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^0+\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^1+\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^2+\cdots+\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-2}$

$=4$【$1+\frac{2}{4}\times\frac{(\frac{3}{4})^{n-1}-1}{\frac{3}{4}-1}$】；遞迴關係式 $p_n=p_{n-1}+4\times\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-2}$

步驟(6):證明

①設n=1時, $p_1=4\left\{1+\frac{2}{4}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1}-1}{\frac{3}{4}-1}\right]\right\}=4$成立

②設n=t成立,即$p_t=4\left\{1+\frac{2}{4}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{4}-1}\right]\right\}$成立

則n=t+1時, $p_{t+1}=p_t+4\times\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{t+1-2}=4\left\{1+\frac{2}{4}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{4}-1}\right]\right\}+4\times\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{t+1-2}$

$$=4\left\{1+\frac{2}{4}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{t-1}-1-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{t-1}}{\frac{3}{4}-1}\right]\right\}=4\left\{1+\frac{2}{4}\left[\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{4}-1}\right]\right\}$$

$$=4\left\{1+\frac{2}{4}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{t}-1}{\frac{3}{4}-1}\right]\right\}=4\left\{1+\frac{2}{4}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{3}{4}-1}\right]\right\}$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納知,對任何正整數n, $p_n=4\left\{1+\frac{2}{4}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{4}-1}\right]\right\}$恆成立。

4.邊長為1的正方形中，在每邊中央m分之一處分別向外做出正方形，經過n-1次疊代後，推論第n個圖形周長一般式(1) k-1=m 時，一般式 $x_n = 4 + \frac{8}{3} \times (n-1)$；遞迴關係式 $x_n = x_{n-1} + \frac{8}{3}$；(2) $k-1 \neq m$ 時，一般式 x_n=4【$1+\frac{2}{m}\times\frac{(\frac{3}{m})^{n-1}-1}{\frac{3}{m}-1}$】；遞迴關係式 $x_n = x_{n-1} + 4 \times \frac{2}{m} \times (\frac{3}{m})^{n-2}$

證明:

(1) 當k-1=m ，$x_n = o_n$

(2) 當 $k-1 \neq m$

①設n=1時, $x_1 = 4\left\{1+\frac{2}{m}\left[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{1-1}-1}{\frac{3}{m}-1}\right]\right\} = 4$成立

②設n=t成立,即$x_t = 4\left\{1+\frac{2}{m}\left[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{m}-1}\right]\right\}$成立

則n=t+1時, $x_{t+1} = x_t + 4\times\frac{2}{m}\left(\frac{3}{m}\right)^{t+1-2} = 4\left\{1+\frac{2}{m}\left[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{m}-1}\right]\right\} + 4\times\frac{2}{m}\left(\frac{3}{m}\right)^{t-1}$

$$= 4\left\{1+\frac{2}{m}\left[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{t-1}-1+(\frac{3}{m}-1)\left(\frac{3}{m}\right)^{t-1}}{\frac{3}{m}-1}\right]\right\} = 4\left\{1+\frac{2}{m}\left[\frac{\frac{3}{m}\left(\frac{3}{m}\right)^{t-1}-1}{\frac{3}{m}-1}\right]\right\}$$

$$= 4\left\{1+\frac{2}{m}\left[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{t}-1}{\frac{3}{m}-1}\right]\right\} = 4\left\{1+\frac{2}{m}\left[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{3}{m}-1}\right]\right\}$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納法知,對任何正整數n,

$x_n = 4\left\{1+\frac{2}{m}\left[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{m}-1}\right]\right\}$恆成立。

(四)邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的m分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代的過程，推論:

1.當k-1=m時，第n個圖形周長的一般$z_n = \mathrm{k} + \frac{k(k-2)}{m}(n-1)$；

遞迴關係式 z_n=z_{n-1}+$\frac{k(k-2)}{m}$

2.當k-1 ≠m時，第n個圖形周長的一般式z_n=k【$1+\frac{k-2}{m}\times\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}$】；

遞迴關係式z_n=z_{n-1}+$\frac{k(k-2)}{m}\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-2}$

說明:

(1)邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的二分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代的過程，推論第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式。

m=$\frac{1}{2}$	
k=3	一般式$a_n = 3$+$\frac{3}{2}(n-1)$；遞迴關係式 $a_n = a_{n-1} + \frac{3}{2}$

k=4	一般式$b_n=4\{1+\frac{2}{2}[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]\}$ ；遞迴關係式$b_n=b_{n-1}+4\times\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-2}$
k=5	一般式$c_n=5\{1+\frac{3}{2}[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{4}{2}-1}]\}$ ；遞迴關係式$c_n=c_{n-1}+5\times\frac{3}{2}\times(\frac{4}{2})^{n-2}$
k=6	一般式$d_n=6\{1+\frac{4}{2}[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{5}{2}-1}]\}$ ；遞迴關係式$d_n=d_{n-1}+6\times\frac{4}{2}\times(\frac{5}{2})^{n\ 2}$
↓	
k	①k-1=m 時，一般式$e_n=3+\frac{3}{2}(n-1)$；遞迴關係式$e_n=e_{n-1}+\frac{3}{2}$ ② k-1 ≠m 時，一般式$e_n=k\{1+\frac{k-2}{2}[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{k-1}{2}\right)-1}]\}$； 遞迴關係式$e_n=e_{n-1}+\frac{k(k-2)}{2}(\frac{k-1}{2})^{n-2}$

⇩

(2)邊長為1的正三角形中，在每邊中央m分之一處分別向外做出正三角形，經過n-1次疊代的過程，找出第n個圖形周長一般式及遞迴關係式。

k=3	
$m=\frac{1}{2}$	一般式$a_n=3+\frac{3}{2}(n-1)$；遞迴關係式$a_n=a_{n-1}+\frac{3}{2}$
$m=\frac{1}{3}$	一般式f_n=3〔$1+\frac{1}{3}\times\frac{(\frac{2}{3})^{n-1}-1}{\frac{2}{3}-1}$〕； 遞迴關係式$f_n=f_{n-1}+3\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-2}$
$m=\frac{1}{4}$	一般式g_n=3【$1+\frac{1}{4}\times\frac{(\frac{2}{4})^{n-1}-1}{\frac{2}{4}-1}$】； 遞迴關係式$g_n=g_{n-1}+3\times\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^{n-2}$
↓	
m	①k-1=m 時， 一般式$h_n=3+\frac{3}{2}(n-1)$ ；遞迴關係式$h_n=h_{n-1}+\frac{3}{2}$ ② k-1 ≠m 時， 一般式h_n=3〔$1+\frac{1}{m}\times\frac{(\frac{2}{m})^{n-1}-1}{\frac{2}{m}-1}$〕； 遞迴關係式$h_n=h_{n-1}+3\times\frac{1}{m}(\frac{2}{m})^{n-2}$

(3) 邊長為1的正方形中，在每邊中央m分之一處分別向外做出正方形，經過n-1次疊代的過程，找出第n個圖形周長一般式及遞迴關係式。。

k=4	
$m=\frac{1}{2}$	一般式$b_n=4\{1+\frac{2}{2}[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]\}$；遞迴關係式$b_n=b_{n-1}+4\times\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-2}$
$m=\frac{1}{3}$	一般式$o_n=4+\frac{8}{3}\times(n-1)$；遞迴關係式$o_n=o_{n-1}+\frac{8}{3}$

$m=\frac{1}{4}$	一般式 $p_n=\mathbf{4}〔\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}}\times\frac{(\frac{3}{4})^{n-1}-1}{\frac{3}{4}-1}〕$；遞迴關係式 $p_n=p_{n-1}+4\times\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-2}$
↓	
m	①k-1=m 時， **一般式** $\boldsymbol{x_n=4+\frac{8}{3}(n-1)}$ ；遞迴關係式 $x_n=x_{n-1}+\frac{8}{3}$ ②k-1 ≠m時， **一般式** $\boldsymbol{x_n=4〔1+\frac{2}{m}\times\frac{(\frac{3}{m})^{n-1}-1}{\frac{3}{m}-1}〕}$；遞迴關係式 $x_n=x_{n-1}+4\times\frac{2}{m}\times(\frac{3}{m})^{n-2}$

(4) 邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的m分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代的過程，推論第n個圖形周長及遞迴關係式

	$m=\frac{1}{2}$	$m=\frac{1}{3}$	$m=\frac{1}{4}$		$\frac{1}{m}$
k=3	a_n	f_n	g_n	…	h_n
k=4	b_n	o_n	p_n		x_n
k=5	c_n				↓
k=6	d_n				
…					
k	e_n	→			z_n

①當k-1=m時，第n個圖形周長的一般$z_n=\mathrm{k}+\frac{k(k-2)}{m}(n-1)$；

遞迴關係式z_n=z_{n-1}+$\frac{k(k-2)}{m}$

②當k-1 ≠m時，第n個圖形周長的一般式z_n=k〔$1+\frac{k-2}{m}\times\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}$〕；

遞迴關係式z_n=z_{n-1}+k$\times\frac{k-2}{m}\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-2}$

證明:

①設n=1時，$z_n=k\left\{1+\frac{k-2}{m}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{1-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}\right]\right\}=k$成立

②設n=t成立,即$z_t=k\left\{1+\frac{k-2}{m}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{t-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}\right]\right\}$成立

則n=t+1時，$z_{t+1}=z_t+k\times\frac{k-2}{m}\left(\frac{k-1}{m}\right)^{t+1-2}$

$$=k\left\{1+\frac{k-2}{m}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{t-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}\right]\right\}+k\times\frac{k-2}{m}\left(\frac{k-1}{m}\right)^{t-1}$$

$$=k\left\{1+\frac{k-2}{m}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{t-1}-1+(\frac{k-1}{m}-1)\left(\frac{k-1}{m}\right)^{t-1}}{\frac{k-1}{m}-1}\right]\right\}$$

$$=k\left\{1+\frac{k-2}{m}\left[\frac{\frac{k-1}{m}\left(\frac{k-1}{m}\right)^{t-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}\right]\right\}$$

$$=k\left\{1+\frac{k-2}{m}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{t}-1}{\frac{k-1}{m}-1}\right]\right\}$$

$$=k\left\{1+\frac{k-2}{m}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{(t+1)-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}\right]\right\}$$

∴n=t+1時,等式成立,故由數學歸納知,對任何正整數n,

$z_n=k\left\{1+\frac{k-2}{m}\left[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}\right]\right\}$恆成立。

參、研究結果與討論

一、研究結果

(一)探究邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的二分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代的過程，第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式。

1.邊長為1的正三角形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正三角形，經過n-1次疊代後，第n個圖形的周長$a_n=3[1+\frac{1}{2}(n-1)]$；遞迴關係式$a_n=a_{n-1}+\frac{3}{2}$

邊長為1的正三角形有三個邊，每經過一次疊代，一邊長增加$\frac{1}{2}$，周長增加$\frac{3}{2}$，則遞迴關係式為$a_n=a_{n-1}+\frac{3}{2}$，經過n-1次疊代後，周長的一般式為

$a_n=3+\frac{3}{2}(n-1)$。

2.邊長為1的正方形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正方形，經過n-1次疊代後，第n個圖形的周長$b_n=4\{1+\frac{2}{2}[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]\}$；遞迴關係式 $b_n=b_{n-1}+4\times\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-2}$

邊長為1的正方形有四個邊:

(1) 第一次疊代後，一邊長=$1+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^0$，周長$b_2=4〔1+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^0〕$。

(2) 第二次疊代後，一邊長=$1+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^0+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^1$，周長$b_3=4〔1+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^0+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^1〕$。

(3) 第三次疊代後，一邊長=$1+\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^0+\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^1+\frac{2}{2}+(\frac{3}{2})^2$，周長$b_4=4〔1+\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^0+\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^1+\frac{2}{2}+(\frac{3}{2})^2〕$。

(4) 經過n-1次疊代後，

一邊長=1+$\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^0+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^1+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^2+\cdots+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^{n-2}$=1+$\frac{2}{2}[\frac{(\frac{3}{2})^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]$，可得周長的一般式$b_n$ =4{1+$\frac{2}{2}[\frac{(\frac{3}{2})^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]$}，遞迴關係式 $b_n = b_{n-1} + 4\times\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-2}$ 。

3.邊長為1的正五邊形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正五邊形，經過n-1次疊代後，第n個圖形的周長c_n =5{1+$\frac{3}{2}[\frac{(\frac{4}{2})^{n-1}-1}{\frac{4}{2}-1}]$}；遞迴關係式 $c_{n=}c_{n-1}+5\times\frac{3}{2}\times(\frac{4}{2})^{n-2}$

邊長為1的正五邊形有五個邊:

(1) 第一次疊代後，一邊長=1+$\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^0$，周長$c_2$ = 5[1+$\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^0$〕。

(2) 第二次疊代後，一邊長=1+$\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^0+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^1$，周長$c_3$=5〔1+$\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^0+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^1$〕。

(3) 第三次疊代後，一邊長=1+$\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^0+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^1+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^2$，周長
c_4 =5〔1+$\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^0+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^1+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^2$〕。

(4) 經過n-1次疊代後，

一邊長=1+$\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^0+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^1+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^2+\cdots+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^{n-2}$=1+$\frac{3}{2}[\frac{(\frac{4}{2})^{n-1}-1}{\frac{4}{2}-1}]$，可得

周長的一般式c_n =5{1+$\frac{3}{2}[\frac{(\frac{4}{2})^{n-1}-1}{\frac{4}{2}-1}]$}，遞迴關係式 $c_{n=}c_{n-1}+5\times\frac{3}{2}\times(\frac{4}{2})^{n-2}$ 。

4.邊長為1的正六邊形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正六邊形，經過n-1次疊代後，第n個圖形周長一般式d_n =6{1+$\frac{4}{2}[\frac{(\frac{5}{2})^{n-1}-1}{\frac{5}{2}-1}]$}；遞迴關係式 $d_n = d_{n-1}+6\times\frac{4}{2}\times(\frac{5}{2})^{n-2}$

邊長為1的正六邊形有六個邊:

(1)第一次疊代後，一邊長=1+$\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^0$，周長$d_2$ =6〔1+$\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^0$〕。

(2)第二次疊代後，一邊長=1+$\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^0+\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^1$，周長$d_3$ =6〔1+$\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^0+\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^1$〕。

(3)第三次疊代後，一邊長=1+$\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^0+\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^1+\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^2$，
周長c_4 =6〔1+$\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^0+\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^1+\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^2$〕。

(4)經過n-1次疊代後，

一邊長=1+$\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^0+\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^1+\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^2+\cdots+\frac{4}{2}(\frac{5}{2})^{n-2}$=1+$\frac{4}{2}[\frac{(\frac{5}{2})^{n-1}-1}{\frac{5}{2}-1}]$，可得

周長的一般式d_n =6{1+$\frac{4}{2}[\frac{(\frac{5}{2})^{n-1}-1}{\frac{5}{2}-1}]$}，遞迴關係式 $d_n = d_{n-1}+6\times\frac{4}{2}\times(\frac{5}{2})^{n-2}$ 。

5.邊長為1的正k邊形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正k邊形，經過n-1次疊代後，可得第n個圖形周長一般式及遞迴關係式

①k-1=m ，一般式$e_n=3+\frac{3}{2}(n-1)$，遞迴關係式$e_n=e_{n-1}+\frac{3}{2}$；

② $k-1\neq m$ ，一般式e_n=k$\{1+\frac{k-2}{2}[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{k-1}{2}\right)-1}]\}$，遞迴關係式

$e_n=e_{n-1}+\frac{k(k-2)}{2}(\frac{k-1}{2})^{n-2}$

(1) 邊長為1的正三角形周長

$e_n=3[1+\frac{1}{2}(\frac{2}{2})^0+\frac{1}{2}(\frac{2}{2})^1+\frac{1}{2}(\frac{2}{2})^2+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{2}{2})^{n-2}]=3\{1+\frac{1}{2}[\frac{\left(\frac{2}{2}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{2}{2}\right)-1}]\}$，

當k-1=m，即k=3，m=2時，公比為1，由遞迴關係式$e_n=e_{n-1}+\frac{3}{2}$

推得$e_n=3+\frac{3}{2}(n-1)$。

(2) 邊長為1的正方形周長$b_n=4[1+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^0+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^1+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^2+\cdots+\frac{2}{2}(\frac{3}{2})^{n-2}]$

$=4\{1+\frac{2}{2}[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]\}=4\{1+\frac{2}{2}[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]\}$，遞迴關係式$b_n=b_{n-1}+4\times\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-2}$。

(3) 邊長為1的正五邊形周長$c_n=5[1+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^0+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^1+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^2+\cdots+\frac{3}{2}(\frac{4}{2})^{n-2}]$

$=5\{1+\frac{3}{2}[\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{4}{2}-1}]\}$ ，遞迴關係式$c_n=c_{n-1}+5\times\frac{3}{2}\times(\frac{4}{2})^{n-2}$。

(4) 邊長為1的正六邊形周長$d_n=6[1+\frac{4}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^0+\frac{4}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^1+\frac{4}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2+\cdots+\frac{4}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-2}]$

$=6\left\{1+\frac{4}{2}\left[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{5}{2}-1}\right]\right\}=6\{1+\frac{4}{2}[\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{5}{2}-1}]\}$，遞迴關係式$d_n=d_{n-1}+6\times\frac{4}{2}\times(\frac{5}{2})^{n-2}$

(5)推論邊長為1的正k邊形，當$k-1\neq m$，則周長e_n=k$\{1+\frac{k-2}{2}[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{k-1}{2}\right)-1}]\}$，

遞迴關係式 $e_n=e_{n-1}+\frac{k(k-2)}{2}(\frac{k-1}{2})^{n-2}$。

(二)邊長為1的正三角形中，在每邊中央m分之一處分別向外做出正三角形，經過n-1次疊代的過程，第n個圖形周長一般式及遞迴關係式。

1.邊長為1的正三角形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正三邊形，經過n-1次疊代後，第n個圖形的周長$a_n=3[1+\frac{1}{2}(n-1)]$；遞迴關係式$a_n=a_{n-1}+\frac{3}{2}$。

2.邊長為1的正三邊形，在每邊中央三分之一處分別向外做出正三邊形，經過n-1次疊代後，第n個圖形周長一般式$f_n=3\{1+\frac{1}{3}[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]\}$；遞迴關係式$f_n=f_{n-1}+3\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-2}$。

邊長為1的正三角形有三個邊，在每邊中央三分之一處分別向外做出正三邊形。

(1)第一次疊代後，一邊長=$1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^0$，周長$f_2=3[1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^0]$。

(2)第二次疊代後，一邊長=$1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^0+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^1$，周長$f_3=3[1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^0+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^1]$。

(3)第三次疊代後，一邊長=$1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^0+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2$，周長

$f_4=3[1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^0+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2]$。

(4)經過n-1次疊代後，一邊長=$1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^0+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

$=1+\frac{1}{3}[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]$，可得周長的一般式$f_n=3\{1+\frac{1}{3}[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{3}-1}]\}$，

遞迴關係式$f_n=f_{n-1}+3\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-2}$。

3.邊長為1的正三邊形，在每邊中央四分之一處分別向外做出正三角形，經過n-1次疊代後，第n個圖形周長一般式$g_n=3\{1+\frac{1}{4}[\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]\}$；遞迴關係式$g_n=g_{n-1}+3\times\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^{n-2}$

邊長為1的正三角形有三個邊，在每邊中央四分之一處分別向外做出正三角形。

(1)第一次疊代後，一邊長=$1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^0$，周長$g_2=3[1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^0]$。

(2)第二次疊代後，一邊長=$1+\frac{1}{4}(\frac{2}{4})^0+\frac{1}{4}(\frac{2}{4})^1$，周長$g_3=3[1+\frac{1}{4}(\frac{2}{4})^0+\frac{1}{4}(\frac{2}{4})^1]$。

(3)第三次疊代後，一邊長=$1+\frac{1}{4}(\frac{2}{4})^0+\frac{1}{4}(\frac{2}{4})^1+\frac{1}{4}(\frac{2}{4})^2$，周長

$g_4=3[1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^0+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2]$。

(4) 經過n-1次疊代後，一邊長=$1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^0+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^{n-2}$

$=1+\frac{1}{4}[\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]$，可得

周長的一般式$g_n=3\{1+\frac{1}{4}[\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{4}-1}]\}$，遞迴關係式$g_n=g_{n-1}+3\times\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^{n-2}$。

4.邊長為1的正三角形中，在每邊中央m分之一處分別向外做出正三角形，經過n-1次疊代後，第n個圖形周長一般式及遞迴關係式①k-1=m，$h_n=3+\frac{3}{2}(n-1)$，$h_n=h_{n-1}+\frac{3}{2}$②$k-1\neq m$，h_n=3【$1+\frac{1}{m}\times\frac{(\frac{2}{m})^{n-1}-1}{\frac{2}{m}-1}$】、$h_n=h_{n-1}+3\times\frac{1}{m}(\frac{2}{m})^{n-2}$。

(1)邊長為1的正三角形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正三邊形，周長$h_n=3[1+\frac{1}{2}(\frac{2}{2})^0+\frac{1}{2}(\frac{2}{2})^1+\frac{1}{2}(\frac{2}{2})^2+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{2}{2})^{n-2}]=3\{1+\frac{1}{2}[\frac{\left(\frac{2}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{2}-1}]\}$，當k-1=m，即k=3，m=2時，公比為1，由遞迴關係式$h_n=h_{n-1}+\frac{3}{2}$推得$h_n=3+\frac{3}{2}(n-1)$。

(2)在每邊中央三分之一處分別向外做出正三邊形，

周長$f_n=3\{1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^0+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^1+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2+\cdots+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-2}\}=3\{1+\frac{1}{3}\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{3}-1}\right]\}$，

遞迴關係式$f_n=f_{n-1}+3\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-2}$。

(3)在每邊中央四分之一處分別向外做出正三角形，周長

$$g_n = 3[1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^0+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^{n-2}] = 3\left\{1+\frac{1}{4}\left[\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{4}-1}\right]\right\}$$

，遞迴關係式 $g_n = g_{n-1} + 3\times\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^{n-2}$ 。

(4)推論在每邊中央m分之一處分別向外做出正三角形，當 $k-1\neq m$ ，

周長 h_n =3【$1+\frac{1}{m}\times\frac{(\frac{2}{m})^{n-1}-1}{\frac{2}{m}-1}$】，遞迴關係式 $h_n = h_{n-1} + 3\times\frac{1}{m}(\frac{2}{m})^{n-2}$ 。

(三)邊長為1的正方形中，在每邊中央m分之一處分別向外做出正方形，經過n-1次疊代的過程，第n個圖形周長一般式及遞迴關係式。

1.在邊長為1的正方形中，在每邊中央的二分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，第n圖形周長的一般式 b_n =$4\{1+\frac{2}{2}[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}]\}$；遞迴關係式

$b_n = b_{n-1} + 4\times\frac{2}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-2}$

2.在邊長為1的正方形中，在每邊中央的三分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，第n圖形周長的一般式 $o_n = 4+\frac{8}{3}\times(n-1)$；遞迴關係式 $o_n = o_{n-1}+\frac{8}{3}$ 。

邊長為1的正方形有4個邊，每經過一次疊代，一邊長增加$\frac{2}{3}$，周長增加$\frac{8}{3}$，則遞迴關係式為 $o_n = o_{n-1}+\frac{8}{3}$ ，經過n-1次疊代後，周長的一般式為

$o_n = 4+\frac{8}{3}\times(n-1)$ 。

3.在邊長為1的正方形中，在每邊中央的四分之一處向外做正方形，經過n-1次疊代後，第n圖形周長的一般式 $p_n = 4\{1+\frac{2}{4}[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{4}-1}]\}$；遞迴關係式

$p_n = p_{n-1} + 4\times\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-2}$ 。

邊長為1的正方形有4個邊，在每邊中央四分之一處分別向外做出正方形。

(1)第一次疊代後，一邊長=$1+\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0$，周長$p_2 = 4[1+\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0]$。

(2)第二次疊代後，一邊長=$1+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^0+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^1$，周長$p_3 = 4[1+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^0+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^1]$。

(3)第三次疊代後，一邊長=$1+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^0+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^1+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^2$，周長

$p_4 = 4[1+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^0+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^1+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^2]$。

(4)經過n-1次疊代後，一邊長=$1+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^0+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^1+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^2+\cdots+\frac{2}{4}(\frac{3}{4})^{n-2}$

$=1+\frac{2}{4}[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{4}-1}]$，可得周長的一般式$p_n = 4\{1+\frac{2}{4}[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{4}-1}]\}$，遞迴關係式

$p_n = p_{n-1} + 4\times\frac{2}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-2}$ 。

4.邊長為1的正方形中，在每邊中央m分之一處分別向外做出正方形，經過n-1次疊代後，推論第n個圖形周長一般式及遞迴關係式

(1)k-1=m， $x_n = 4 + \frac{8}{3} \times (n-1)$ ， $x_n = x_{n-1} + \frac{8}{3}$ ；

(2)k-1 ≠m， $x_n = 4\{1 + \frac{2}{m}[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{m} - 1}]\}$， $x_n = x_{n-1} + 4 \times \frac{2}{m} \times (\frac{3}{m})^{n-2}$ 。

(1)邊長為1的正方形，在每邊中央二分之一處分別向外做出正方形，周長 $b_n = 4\{1 + \frac{2}{2}[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}]\}$；遞迴關係式 $b_n = b_{n-1} + 4 \times \frac{2}{2} \times (\frac{3}{2})^{n-2}$ 。

(2)在每邊中央三分之一處分別向外做出正方形周長

$x_n = 4$【$1 + \frac{2}{4} \times (\frac{3}{3})^0 + \frac{2}{4} \times (\frac{3}{3})^1 + \frac{2}{4} \times (\frac{3}{3})^2 + \cdots + \frac{2}{4} \times (\frac{3}{3})^{n-2}$】

$= 4$【$1 + \frac{2}{3} \times \frac{(\frac{3}{3})^{n-1} - 1}{\frac{3}{3} - 1}$】，當k-1=m，即k=4，m=3時，公比為1，由遞迴關係式 $x_n = x_{n-1} + \frac{8}{3}$ 推得 $x_n = 4 + \frac{8}{3} \times (n-1)$ 。

(3)在每邊中央四分之一處分別向外做出正方形，周長 $p_n = 4\left\{1 + \frac{2}{4}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{4} - 1}\right]\right\}$ ，遞迴關係式 $p_n = p_{n-1} + 4 \times \frac{2}{4} \times (\frac{3}{4})^{n-2}$ 。

(4)推論在每邊中央m分之一處分別向外做出正方形周長 $x_n = 4\{1 + \frac{2}{m}[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{m} - 1}]\}$ ，遞迴關係式 $x_n = x_{n-1} + 4 \times \frac{2}{m} \times (\frac{3}{m})^{n-2}$ 。

(四)邊長為1的正k邊形中，在每邊中央的m分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代的過程，第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式

1.邊長為1的正k邊形，隨著每邊中央的m分之一處向外做正k邊形的改變，經過n-1次疊代後，當k-1=m時，第n個圖形周長的一般式 $z_n = k + \frac{k(k-2)}{m}(n-1)$ 及遞迴關係式 $z_n = z_{n-1} + \frac{k(k-2)}{m}$ 。

(1)邊長為1的正三角形有三個邊，每經過一次疊代，一邊長增加 $\frac{1}{2}$，周長增加 $\frac{3}{2}$，則遞迴關係式為 $a_n = a_{n-1} + \frac{3}{2}$ ，經過n-1次疊代後，周長的一般式為 $a_n = 3 + \frac{3}{2}(n-1)$ 。

(2)邊長為1的正方形有4個邊，每經過一次疊代，一邊長增加 $\frac{2}{3}$，周長增加 $\frac{8}{3}$，則遞迴關係式為 $o_n = o_{n-1} + \frac{8}{3}$ ，經過n-1次疊代後，周長的一般式為 $o_n = 4 + \frac{8}{3} \times (n-1)$ 。隨著m和k的改變，結果如下表。

k-1=m		第n個圖形周長的一般式	說明
k	m		
3	2	$3+\frac{3}{2}(n-1)$	原周長為3，每疊代一次，周長皆增加$\frac{3}{2}$，疊代n-1次後，第n個圖形的周長
4	3	$4+\frac{8}{3}(n-1)$	原周長為4，每疊代一次，周長皆增加$\frac{8}{3}$，疊代n-1次後，第n個圖形的周長
5	4	$5+\frac{15}{4}(n-1)$	原周長為5，每疊代一次，周長皆增加$\frac{15}{4}$，疊代n-1 次後，第n個圖形的周長
6	5	$6+\frac{24}{5}(n-1)$	原周長為6，每疊代一次，周長皆增加$\frac{24}{5}$，疊代n-1次後，第n個圖形的周長
7	6	$7+\frac{35}{6}(n-1)$	邊長7，每疊代一次，周長皆增加$\frac{35}{6}$，疊代n-1次後，第n個圖形的周長
…			
k	m	$\text{k}+\frac{k(k-2)}{m}(n-1)$	邊長k，每疊代一次，周長皆增加$\frac{k(k-2)}{m}$，即遞迴關係式z_n=z_{n-1}+$\frac{k(k-2)}{m}$，疊代n-1次後，第n個圖形的周長為$\text{k}+\frac{k(k-2)}{m}(n-1)$

2.邊長為1的正k邊形，隨著每邊中央的m分之一處向外做正k邊形的改變，經過n-1次疊代後，當k-1 ≠m時，第n個圖形周長的一般式z_n=k$\{1+\frac{k-2}{m}[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}]\}$，遞迴關係式$z_n$=$z_{n-1}$+$\frac{k(k-2)}{m}\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-2}$。

第n個圖形周長的一般式根據h_n=3$\{1+\frac{1}{m}[\frac{\left(\frac{2}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{m}-1}]\}$和$x_n=4\{1+\frac{2}{m}[\frac{\left(\frac{3}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{m}-1}]\}$與$e_n$=k$\{1+\frac{k-2}{2}[\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{k-1}{2}\right)-1}]\}$找到關係，得$z_n$=k$\{1+\frac{k-2}{m}[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}]\}$。

二、討論

1.先從邊長為1的正k邊形(k=3,4,5,6)中，在每邊中央的m分之一(m=2)處向外做正k邊形，經過n-1次疊代的過程，得到e_n，但是，仍無法推論其他的規律。所以，換從邊長為1的正k邊形(k=3)中，在每邊中央的m分之一(m=2,3,4)處向外做正k邊形，經過n-1次疊代的過程，得到h_n，結果還是不足以推論其他的問題。接著，再從邊長為1的正k邊形(k=4)中，在每邊中央的m分之一(m=2,3,4)處向外做正k邊形，經過n-1次疊代的過程，得到x_n。在推論的過程，我們發現e_n的一般式要換成另一種的表示方式，最後才能觀察並猜測出結果，以數學歸納法得證。
2.演算過程中，遇到等比級數和的問題，已經超出我們所學範圍，於是，老師提出「棋盤問題」，讓我們自行找出等比級數和的公式(附錄一)

$a_1(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1})=a_1\times\frac{r^n-1}{r-1}$，用來化簡算式。

3.列出算式的過程中，發現當k-1=m時，等比級數的公比為1，於是，第n個圖形周長的一般式及遞迴關係式會分成兩種情形討論:(1)k-1=m(2)k-1 ≠m。

4.用Geogebra電腦繪圖軟體畫圖時，發現正三角形無論幾等分，圖形不會有重疊的部分，正方形要到$\frac{1}{3}$等分、正五邊形要到$\frac{1}{3}$等分、正六邊形要到$\frac{1}{5}$等分、正七邊形要到$\frac{1}{6}$等分、正八邊形要到$\frac{1}{7}$等分、正九邊形要到$\frac{1}{8}$等分、…，才不會重疊(附錄二)。

肆、結論

將一個正k邊形的每條邊平分為m份，再以每條邊中間的一份為「邊」，向外做正k邊形。經過一次疊代後，我們再將每條邊平分成m份，向外做更小的正k邊形。然後不停地重複這個過程，直到n-1次疊代後所形成一片幾何雪花的周長。在邊長為1的正k邊形，以每邊中央的m分之一處向外做正k邊形，經過n-1次疊代後，當k-1=m時，第n個圖形周長的一般式$z_n = \mathrm{k} + \frac{k(k-2)}{m}(n-1)$，遞迴關係式$z_n$=$z_{n-1}$+$\frac{k(k-2)}{m}$；當k-1 ≠m時，第n個圖形周長的一般式$z_n$=k$\{1 + \frac{k-2}{m}[\frac{\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-1}-1}{\frac{k-1}{m}-1}]\}$，遞迴關係式$z_n$=$z_{n-1}$+$\frac{k(k-2)}{m}\left(\frac{k-1}{m}\right)^{n-2}$。

伍、參考文獻

Anne Rooney(2013)。數學為什麼是現在這樣子？:一門不教公式，只講故事的數學課(陳敏皓譯)。臺北市：城邦文化。

高中數學課本第二冊(2022)。翰林版。

國中數學課本第四冊(2022)。康軒版。

附錄

附錄一

西洋棋起源于古印度，據說國王為了獎賞發明者，讓發明者提一個要求。發明者說：“請在棋盤(如圖)的第 1 個格子裡放上 1 顆麥粒，在第 2 個格子裡放上 2 顆麥粒，第 3 個格子裡放上 4 顆麥粒，第 4 個格子裡放上 8 顆麥粒，依此類推，每個格子裡放的麥粒數都是前一個格子裡放的麥粒數的 2 倍，直到第 64 個格子。請國王給我足夠的麥子來實現上述要求。” 國王覺得這事不難辦到，就欣然同意了。

任務1:

你認為國王有能力滿足發明者的這個要求嗎？

任務2:

假如棋盤的第 1 個格子裡放上 1 顆麥粒，在第 2 個格子裡放上 3 顆麥粒，第 3 個格子裡放上 9 顆麥粒，第 4 個格子裡放上 27 顆麥粒，依此類推，每個格子裡放的麥粒數都是前一個格子裡放的麥粒數的 3 倍，直到第 64 個格子。請算出棋盤上的麥粒總數。請說明前一題每個

格子裡放的麥粒數都是前一個格子裡放的麥粒數的 2 倍之解題策略求出總麥粒數，適用於每個格子裡放的麥粒數都是前一個格子裡放的麥粒數的 3 倍？

任務3:

假如棋盤的第 1 個格子裡放上 1 顆麥粒，每個格子裡放的麥粒數都是前一個格子裡放的麥粒數的 r 倍，請算出棋盤上的麥粒總數。

解:

任務1:

$a_1=2^0=1$ $a_2=2^1=2$ $a_3=2^2=4$ $\vdots$ $a_n=2^{n-1}$	⇨	$a_1+a_2=1+2=3=a_3-1$ $a_1+a_2+a_3=1+2+4=7=a_4-1$ $a_1+a_2+\cdots+a_4=1+2+4+8=15=a_5-1$ $\vdots$ $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{n+1}-1=2^{(n+1)-1}-1$ $=2^n-1$

任務2:

$b_1=3^0=1$ $b_2=3^1=3$ $b_3=3^2=9$ … $b_n=3^{n-1}$	⇨	$b_1+b_2=1+3=4=\frac{b3-1}{2}$ $b_1+b_2+b_3=1+3+9=13=\frac{b4-1}{2}$ $b_1+b_2+b_3+b_4=1+3+9+27=40=\frac{b5-1}{2}$ $b_1+b_2+b_3\cdots\cdots+b_n=\frac{bn+1-1}{2}=\frac{3^n-1}{2}$

任務3:

設此遞迴關係式為：$\begin{cases} z_1=1 \\ z_n=z_{n-1}\times r\ \ ,r\neq 0 \end{cases}$

使用數學歸納法證明：$z_1+z_2+\cdots+z_n=\frac{r^n-1}{r-1}$

證明：

(1)設$n=1$時，$z_1=\frac{r^1-1}{r-1}=1$，等式成立。

(2)設$n=k$成立，即$z_1+z_2+\cdots+z_k=\frac{r^k-1}{r-1}$成立。

則$n=k+1$時，

$$z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1}=\frac{r^k-1}{r-1}+z_k\times r=\frac{r^k-1}{r-1}+r^{k-1}\times r$$
$$=\frac{r^k-1}{r-1}+r^k=\frac{r^k-1}{r-1}+\frac{r^k(r-1)}{r-1}$$
$$=\frac{r^k-1+r^{k+1}-r^k}{r-1}=\frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

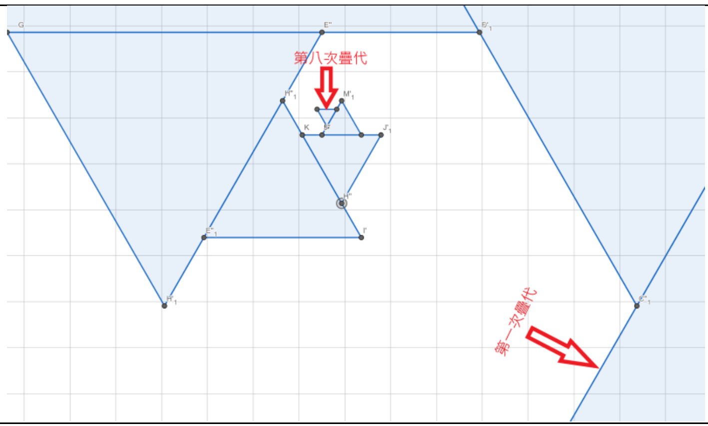
$\therefore n=k+1$時，等式成立，故由數學歸納法知，對任何正整數n，

$z_1+z_2+\cdots+z_n=\frac{r^n-1}{r-1}$恆成立。

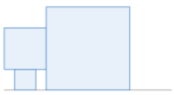
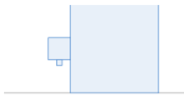
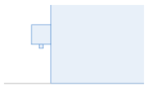
附錄二

操作Geogebra電腦繪圖軟體畫圖時，發現正三角形無論幾等分，圖形不會有重疊的部分，正方形要到$\frac{1}{3}$等分、正五邊形要到$\frac{1}{3}$等分、正六邊形要到$\frac{1}{5}$等分、正七邊形要到$\frac{1}{6}$等分、正八邊形要到$\frac{1}{7}$等分、正九邊形要到$\frac{1}{8}$等分、…，才不會重疊。實作紀錄如下:

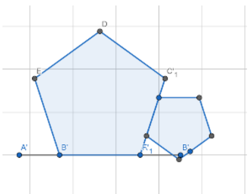
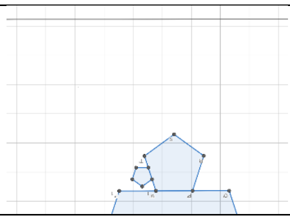
1.正三角形不會重疊

$\frac{1}{2}$等分就不會重疊:圖形會一直往內縮	

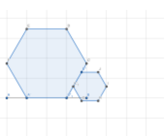
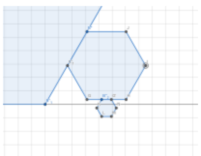
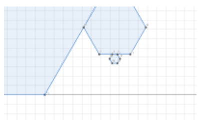
2.正方形要到$\frac{1}{3}$等分才不會重疊

$\frac{1}{2}$等分	$\frac{1}{3}$等分	$\frac{1}{4}$等分	$\frac{1}{5}$等分
			
在第3次疊代處剛好重疊	不會重疊		

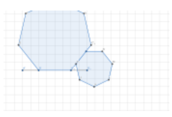
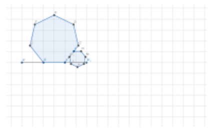
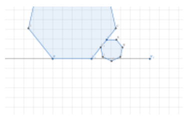
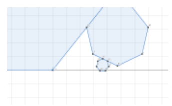
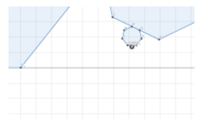
3.正五邊形要到$\frac{1}{3}$等分才不會重疊

$\frac{1}{2}$等分	$\frac{1}{3}$等分
	
第二次疊代重疊	不會重疊

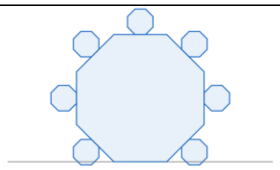
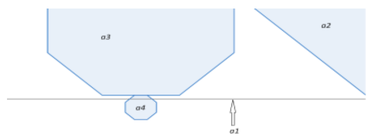
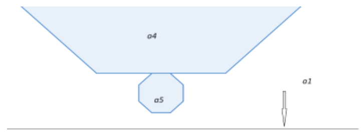
4.正六邊形要到$\frac{1}{5}$等分才不會重疊

$\frac{1}{2}$等分	$\frac{1}{3}$等分	$\frac{1}{4}$等分	$\frac{1}{5}$等分	$\frac{1}{6}$等分
				
會重疊			不會重疊	

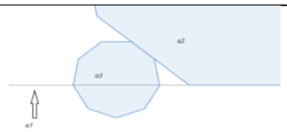
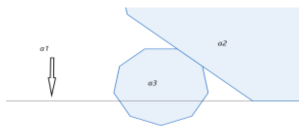
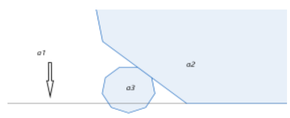
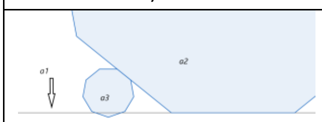
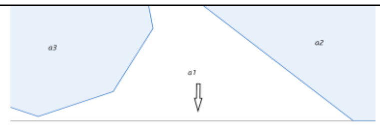
5.正七邊形要到$\frac{1}{6}$等分才不會重疊

$\frac{1}{2}$等分	$\frac{1}{3}$等分	$\frac{1}{4}$等分	$\frac{1}{5}$等分	$\frac{1}{6}$等分
				
會重疊				不會重疊

6.正八邊形要到$\frac{1}{7}$等分才不會重疊

$\frac{1}{5}$等分	$\frac{1}{6}$等分	$\frac{1}{7}$等分
		
第2次疊代會有重疊部分	第3次疊代會有重疊	不會重疊

7.正九邊形要到$\frac{1}{8}$等分才不會重疊

$\frac{1}{4}$等分	$\frac{1}{5}$等分	$\frac{1}{6}$等分
		
第2次疊代會有重疊部分	第2次疊代會有重疊部分	第2次疊代會有重疊部分
$\frac{1}{7}$等分	$\frac{1}{8}$等分	
		
第二次疊代會有重疊部分	不會重疊	