

屏東縣第65屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：有趣的規律

關 鍵 詞：因數、倍數、規律

編號：A1008

有趣的規律

摘要

有些遊戲看似沒有技巧只能盲猜，但仔細研究下可以發現遊戲的軌跡是有規律性的，生活中也充滿了規律性，了解彼此間的關係，這些規律性還可以讓我們預判結果。數學從來就不是只有數字間的加減乘除，透過看懂數字間的關係後，數學還能培養邏輯能力。「有趣的規律」是透過搶數字過程中的實際操作、觀察、討論，試圖找出數字間的關係，進而找到關鍵數字、算式中的數字和關鍵字的關聯性，掌握先機以開啟勝利大門。

壹、前言

有一次看到老師頭低低的，很認真的在寫著什麼，湊過去看時，看到一列一列的數字，這些數字看起來像是隨意亂寫的樣子，但老師說這些數字的產生都有一定的規律，而這數字遊戲就是要找出題目的規律性並解題，而且每題的規律性都不一樣。我們覺得這些題目很好玩，且六年級上學期才剛學過數與量的關係，我們有自信可以根據之前學過的找到規律性並完成解題，老師就把題目拿給我們，讓我們試著去找出每列數字的規律性。

後來老師和我們玩起搶 30 的遊戲，老師贏的次數比我們多很多，我們覺得很奇怪，要怎樣才能贏老師？老師開玩笑說天機不可洩漏，不過給了一個小提示，說獲勝方法和規律性有關。我們滿臉問號，為什麼搶數字的遊戲也會有規律性，所以我們就決定好好研究一下，下次才能打敗老師。

貳、研究設備及器材

- 一、彩色筆或螢光筆。
- 二、原子筆或鉛筆。
- 三、紙張。
- 四、白板。
- 五、白板筆。

參、研究過程或方法

一、二人搶 30 遊戲

(一) 二人 (A 和 B) 一組，從 1 開始，每人輪流取 1~2 個數字，直到取到「30」這

個數字的人就獲勝。

1. 為了方便紀錄，我們寫出多組的 1~30 的數字，將 2 個人所取的數字用不同顏色的筆做記號，就能清楚將取數字過程呈現並紀錄下來。
2. 經過多次的取數字結果中，我們發現能取到的最後一個數字為「27」的人都能獲得最後的勝利（如取「27」或「26、27」），這是為什麼呢？我們決定用回推的方法來找出這個遊戲是否有什麼規律性。

（1）如果 A 取到「27」，B 可以有二種選擇，B 若只取「28」，A 可以取「29、30」；或者 B 取「28、29」，A 則取「30」，這二種取法都是 A 贏。（如下表）

取號者	A	B	A
選擇一	27	28	29、30
選擇二	27	28、29	30

（2）但要如何做才能確保 A 可以取到「27」呢？以「27」這個數字再往前推算，若 A 取到 27 時，前一輪 B 一定會取到「26」，但若 A 的最後一個數字取「25」時，B 就有機會取「26、27」，這樣無法保證讓 A 可以取到「27」；若前一輪 A 最後一數數字取到「24」，不管 B 是取「25」或「25、26」，A 都能取到「27」這個數字。所以 A 要能先取得「24」才能確保可以取得「27」。（如下表）

取號者	A	B	A
選擇一	25	26、27	28
選擇二	24	25	26、27
選擇三	24	25、26	27

再往前推論，A 要如何取才能確保取到「24」呢？用同樣的步驟我們發現，要取到「24」就要先取到「21」，要取到「21」就要先取到「18」，再往前推就是要取到 15、12、9、6、3。

3. 我們發現若要贏就要能搶得先機，所以要先能取到 3、6、9、12、15、18、

21、24、27，最後才能取到 30，而這些數字都是 3 的倍數。

(二) 二人 (A 和 B) 一組，從 1 開始，每人輪流取 1~3 個數字，直到取到「30」這個數字的人就獲勝。

1. 根據上一個題目的推論方法，我們試著用相同的方法進行研究。若 A 要取得 30，他上一輪的最後一個數字若是「28」，B 就可以取「29、30」；若 A 最後一個數字是「27」，B 就可以取「28、29、30」；若 A 最後一個數字為「26」，不管 B 是取「27」、「27、28」、「27、28、29」，B 都無法取到 30，所以 A 上一輪若取到「26」就一定能搶得「30」。

取號者	A	B	A
選擇一	28	29、 <i>30</i>	
選擇二	27	28、29、 <i>30</i>	
選擇三	26	27	28、29、 <i>30</i>
		27、28	29、 <i>30</i>
		27、28、29	<i>30</i>

2. 再往前推論，A 要如何取才能確保取到「26」呢？用同樣的步驟我們發現，要取到「26」就要先取到「22」，要取到「22」就要先取到「18」，再往前推就是要取到 14、10、6、2。
3. 我們發現若要贏就要能搶得先機，所以要先能取到 2、6、10、14、18、22、26，最後才能取到 30。前一題取 1~2 個數字時，只要依 3 的倍數取號就可以獲勝，但這一題是從取得 2 開始再依次加上 4 的倍數才能獲勝。

(三) 二人 (A 和 B) 一組，從 1 開始，每人輪流取 1~4 個數字，直到取到「30」這個數字的人就獲勝。

1. 根據上一個題目的推論方法，我們試著用相同的方法進行研究。若 A 要取得 30，他上一輪的最後一個數字若是「28」，B 就可以取「29、30」；若 A 最後一個數字是「27」，B 就可以取「28、29、30」；若 A 最後一個數字為「26」，B 就可以取「27、28、29、30」；若 A 最後一個數字為「25」，不管 B 是取

「26」、「26、27」、「26、27、28」、「26、27、28、29」，B 都無法取到 30，所以 A 上一輪若取到「25」就一定能搶得「30」。

取號者	A	B	A
選擇一	28	29、 <i>30</i>	
選擇二	27	28、29、 <i>30</i>	
選擇三	26	27、28、29、 <i>30</i>	
選擇四	25	26	27、28、29、 <i>30</i>
		26、27	28、29、 <i>30</i>
		26、27、28	29、 <i>30</i>
		26、27、28、29	<i>30</i>

2. 再往前推論，A 要如何取才能確保取到「25」呢？用同樣的步驟我們發現，要取到「25」就要先取到「20」，要取到「20」就要先取到「15」，再往前推就是要取到 10、5。

3. 我們發現若要贏就要能搶得先機，所以要先能取到 5、10、15、20、25，最後才能取到 30，這些數字都是 5 的倍數。

（四）依上面的結果可知，取的數字數量不同就有不同的方法可以獲勝，但這些獲勝方法只能慢慢回推找出關聯性的數字嗎？我們能不能從中再找出更簡易判斷規律的方法呢？

1. 把 3 組的答案做整理

（1）當每人可取 1~2 個數字，取得 3、6、9、12、15、18、21、24、27 的人能順利取到 30，從取得第一個數字 3 開始，之後每個數字都是 3 的倍數。

（2）當每人可取 1~3 個數字，取得 2、6、10、14、18、22、26 的人能順利取到 30，從取得第一個數字 2 開始，之後每個數字都是以 4 的倍數累加上去。

（3）當每人可取 1~4 個數字，取得 5、10、15、20、25 的人能順利取到 30，從取得第一個數字 5 開始，之後每個數字都是 5 的倍數。

2. 奇妙的數字關係

(1) 當每人可取 1~2 個數字時，關鍵的獲勝數字和 3 的倍數有關；當每人可取 1~3 個數字時，關鍵的獲勝數字和 4 的倍數有關；當每人可取 1~4 個數字時，關鍵的獲勝數字和 5 的倍數有關。這時我們發現每次可以取得數字和倍數有奇妙的關係，如：最多可取 2 個數字時，我們要取 3、6、9、12……才能獲勝；最多可取 3 個數字時，我們要取 2、6、10、14……才能獲勝，也就是從數字 2 開始，每次都要以多加 4 的倍數為獲勝的方法；最多可取 4 個數字時，我們要取 5、10、15、20 才能獲勝。

(2) 但取 1~3 個數字時獲勝的關鍵數字不是單純的 4 的倍數，所以我們又將數字以遞減的方式寫出來再加以觀察。

當每人可取 1~2 個數字時，取最少和最多的數字量加起來 (1+2) 剛好是 3 的倍數，也就是由 30 往回推每 3 個數字為一組，3 剛好是 30 的因數，所以取號到第 10 輪就可取到 30。

③⑦ 29 28 ②⑦ 26 25 ④④ 23 22 ②① 20 19 ①⑧ 17 16 ①⑤ 14 13
①② 11 10 ②⑨ 8 7 ⑥⑥ 5 4 ③③ 2 1

當每人可取 1~3 個數字時，取最少和最多的數字量加起來 (1+3) 剛好是 4 的倍數，也就是由 30 往回推每 4 個數字為一組，但 4 不是 30 的因數，所以輪流取號 7 輪後，最後還會剩下 2 個數字。而依之前的結果來看，每人可取 1~3 個數字時，第 1 個數字就是要取到 2 這個數字。

③⑦ 29 28 27 ②⑥ 25 24 23 ②② 21 20 19 ①⑧ 17 16 15 ①④ 13 12 11
①⑩ 9 8 7 ⑥⑥ 5 4 3 ② 1

當每人可取 1~4 個數字時，取最少和最多的數字量加起來 (1+4) 剛好是 5 的倍數，也就是由 30 往回推每 5 個數字為一組，5 剛好是 30 的因數，所以取號到第 6 輪就可取到 30。

③⑩ 29 28 27 26 ②⑤ 24 23 22 21 ②⑩ 19 18 17 16 ①⑤ 14 13 12 11
①⑩ 9 8 7 6 ⑤ 4 3 2 1

3. 歸納結果

當每人可取 1~2 個數字時，取最少和最多的數字量加起來（1+2）剛好是 3 的倍數，以除式計算來看， $30 \div 3 = 10 \cdots 0$ ，商為 10 代表 2 人輪流取號共取 10 輪就可以定勝負，餘數 0 代表這次的取號的第一個數要先搶到 3 的第 1 個倍數，也就是 3；當每人可取 1~3 個數字時，取最少和最多的數字量加起來（1+3）剛好是 4 的倍數，以除式計算來看， $30 \div 4 = 7 \cdots 2$ ，餘數 2 代表這次的取號的第一個數要先搶到第 2 個數字，也就是 2；當每人可取 1~4 個數字時，取最少和最多的數字量加起來（1+3）剛好是 5 的倍數，以除式計算來看， $30 \div 5 = 6 \cdots 0$ ，餘數 0 代表這次的取號的第一個數要先搶到 5 的第一個倍數，也就是 5。

二、三人搶數字遊戲

（一）搶 10

如果三個人來玩遊戲應該會更有趣，但三個人玩是不是也可以找出規律性呢？所以我們照著上面的方法想回推以找出遊戲的規律性，但一開始回推就發現三個人的搶 30 遊戲變化性與複雜度高了很多，我們決定把數字變小試試看，所以我們決定改成搶 10。

假設要讓 A 能順利取得 10 而獲勝，A 前一個數字可能是多少呢？當 A 取得 7，會是 C 取得 10；當 A 取得 6 時，會有不同的獲勝者，當 B 取 7，C 取 8 或 8、9 時，A 都可以取得 10 而獲勝，但當 B 取得 7、8，C 就可以取得 9、10 而獲勝。我們猜測無法因取得那一個數字而保證 A 一定獲勝，但我們很想知道這種玩法能不能也找出什麼規律性或關聯性，所以決定做了以下設定。

以 A 為最終獲勝者來做所有推論，取號過程中依序取號，不論 A 的取號是第幾順位，當 A 取得某數後，接下來只記錄 B 和 C 所取的所有號碼，B 和 C 也會盡

其所能想辦法獲勝，絕不放水，這樣的設定是方便觀察、記錄。

1. 當 A 取數字 1 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A	B+C	A
類型一	2、3	4	5、6、7、8	9、10
		4、5	6、7、8	9、10
			6、7、8、9	10
類型二	2、3、4	5	6、7、8	9、10
			6、7、8、9	10
		5、6	7、8	9、10
			7、8、9	10
類型三	2、3、4、5	6	7、8	9、10
			7、8、9	10

當 A 第 1 輪取數字 1 時，第 2 輪取得 4、5 或 6 都有可能獲勝，但也有可能輸，也就是無法找出某個關鍵數字可以讓 A 一定能獲勝，但 A 取得的最大數字為 5 或 6 時，獲勝的次數會比取得 4 時還多次。將上表結果統計，當 A 取得的最大數字 4 而獲勝的機會有 1 次，取得 5 而獲勝的機會有 4 次，取得 6 而獲勝的機會有 4 次。

2. 當 A 取數字 2 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A	B+C	A
類型一	3、4	5	6、7、8	9、10
			6、7、8、9	10
		5、6	7、8	9、10
			7、8、9	10
類型二	3、4、5	6	7、8	9、10
			7、8、9	10

當 A 第 1 輪取數字 2 時，第 2 輪最大數字只有取得 5 或 6 才有機會獲勝。將

上表結果統計，當 A 取得的最大數字 5 而獲勝的機會有 2 次，取得 6 而獲勝的機會有 4 次。

3. 當 A 取數字 3 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A	B+C	A
類型一	4、5	6	7、8	9、10
			7、8、9	10

當 A 第 1 輪取數字 3 時，第 2 輪最大數字只有取得 6 才有機會獲勝。將上表結果統計，當 A 的最大數字取得 6 而獲勝的機會有 4 次。

4. 當 A 取數字 4 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A
類型一	5、6、7、8	9、10

當 A 取得數字 4 時，只有 B 和 C 總共取 4 個數字時 A 才能獲勝，而且這和 A 第二輪取得最大數字為 4 的結果相同，當 A 取得的最大數字 4 而獲勝的機會只有 1 次。

5. 當 A 取數字 5 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A
類型一	6、7、8	9、10
	6、7、8、9	10

當 A 取得數字 5 時，只有 B 和 C 總共取 3~4 個數字時 A 才能獲勝，而且這和 A 第二輪取得最大數字為 5 的結果相同，當 A 取得的最大數字 5 而獲勝的機會有 2 次。

6. 當 A 取數字 6 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A
類型一	7、8	9、10
	7、8、9	10

當 A 取得數字 6 時，只有 B 和 C 總共取 2~3 個數字時 A 才能獲勝，而且這

和 A 第二輪取得最大數字為 6 的結果相同，當 A 取得的最大數字 6 而獲勝的機會有 2 次。

7. 綜合上面的紀錄與統計結果，獲勝前一輪 A 取得的最大數字為 4 時，有 2 次獲勝機會；獲勝前一輪 A 取得的最大數字為 5 時，有 8 次獲勝機會；獲勝前一輪 A 取得的最大數字為 6 時，有 12 次獲勝機會。

(二) 搶 11

再試試看把數字 10 改成 11，並觀察其結果。

1. 當 A 取數字 1 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A	B+C	A	B+C	A
類型一	2、3	4	5、6	7	8、9	10、 <i>11</i>
					8、9、10	<i>11</i>
		4、5	6、7、8、9	10、 <i>11</i>		
類型二	2、3、4	5	6、7、8、9	10、 <i>11</i>		
		5、6	7、8、9	10、 <i>11</i>		
			7、8、9、10	<i>11</i>		
類型三	2、3、4、5	6	7、8、9	10、 <i>11</i>		
			7、8、9、10	<i>11</i>		
		6、7	8、9	10、 <i>11</i>		
			8、9、10	<i>11</i>		

當 A 第 1 輪取數字 1 時，獲勝前 1 輪取得 5、6 或 7 都有可能獲勝，但也有可能輸，但 A 取得的最大數字為 6 或 7 時，獲勝的次數會比取得 5 時還多次。

當 A 第 1 輪取數字 1 時，獲勝前一輪最大數字取得 5 或 6 才有機會獲勝。將上表結果統計，當 A 取得的最大數字 5 而獲勝的機會有 2 次，取得 6 而獲勝的機會有 4 次，取得 7 而獲勝的機會有 4 次。

2. 當 A 取數字 2 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A	B+C	A
-----	-----	---	-----	---

類型一	3、4	5	6、7、8、9	10、11
		5、6	7、8、9	10、11
			7、8、9、10	11
類型二	3、4、5	6	7、8、9	10、11
			7、8、9、10	11
		6、7	8、9	10、11
			8、9、10	11
類型三	3、4、5、6	7	8、9	10、11
			8、9、10	11

當 A 第 1 輪取數字 2 時，第 2 輪最大數字取得 5、6、7 都有機會獲勝。將上表結果統計，當 A 取得的最大數字 5 而獲勝的機會有 1 次，取得 6 而獲勝的機會有 4 次，取得 7 而獲勝的機會有 4 次。

3. 當 A 取數字 3 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A	B+C	A
類型一	4、5	6	7、8、9	10、11
			7、8、9、10	11
		6、7	8、9	10、11
			8、9、10	11

當 A 第 1 輪取數字 3 時，第 2 輪最大數字取得 6、7 都有機會獲勝。將上表結果統計，當 A 取得的最大數字 6 而獲勝的機會有 2 次，取得 7 而獲勝的機會有 2 次。

4. 當 A 取數字 4 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A	B+C	A
類型一	5、6	7	8、9	10、11
			8、9、10	11

當 A 第 1 輪取數字 4 時，第 2 輪最大數字取得 7 才有機會獲勝。將上表結果

統計，當 A 取得的最大數字 7 而獲勝的機會有 2 次。

5. 當 A 取數字 5 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A
類型一	6、7、8、9	10、 <i>11</i>

當 A 取得數字 5 時，只有 B 和 C 總共取 4 個數字時 A 才能獲勝，而且這和 A 獲勝前 1 輪取得最大數字為 5 的結果相同，當 A 取得的最大數字 5 而獲勝的機會有 1 次。

6. 當 A 取數字 6 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A
類型一	7、8、9	10、 <i>11</i>
類型二	7、8、9、10	<i>11</i>

當 A 取得數字 6 時，只有 B 和 C 總共取 3~4 個數字時 A 才能獲勝，而且這和 A 獲勝前 1 輪取得最大數字為 6 的結果相同，當 A 取得的最大數字 6 而獲勝的機會有 2 次。

7. 當 A 取數字 7 時，A 能獲勝的方式。

取號者	B+C	A
類型一	8、9	10、 <i>11</i>
類型二	8、9、10	<i>11</i>

當 A 取得數字 7 時，只有 B 和 C 總共取 2~3 個數字時 A 才能獲勝，而且這和 A 獲勝前一輪取得最大數字為 7 的結果相同，當 A 取得的最大數字 7 而獲勝的機會有 2 次。

8. 綜合上面的紀錄與統計結果，獲勝前一輪 A 取得的最大數字為 5 時，有 4 次獲勝機會；獲勝前一輪 A 取得的最大數字為 6 時，有 12 次獲勝機會；獲勝前一輪 A 取得的最大數字為 7 時，有 14 次獲勝機會。

三、當 3 人玩搶數字遊戲時，數字的組合變化較多、複雜性較高，難以如 2 人玩遊戲時可找出規律或關鍵數字來讓某人獲勝。在搶 10 遊戲中，在獲勝前 1 輪取得數字 6

時的獲勝機會較高，取得數字 5 時的獲勝機會次高；搶 11 遊戲中，在獲勝前 1 輪取得數字 7 時的獲勝機會較高，取得數字 6 時的獲勝機會次高。從這個結果又可以發現，10 和 6、11 和 7 都相差 4，4 剛好是玩遊戲人數+1。故推論若要提高獲勝機會，就要想辦法取得要搶的數字減 4 與這個數字的前一個數字，如搶 10 時，就要先取得 $10-4=6$ 的數字 6，和 6 的前一個數字 5，這樣獲勝機會會比較高。

肆、 研究結果

根據上面的推論，我們得到一些結論：

1. 當 2 人參與遊戲時，若是對方不知道這遊戲的技巧，我們就可以根據遊戲規則搶得先機。把最後要取得的那個數除以每次能取最少數字和最多的數字的「和」，若餘數為 0，則要取得「最少數字和最多的數字的倍數」；若有餘數，則要取得「餘數加上最少數字和最多的數字的倍數」。
2. 當 3 人參與遊戲時，遊戲過程組合變化多，無法找出必勝的關鍵數字。

伍、 討論

一、當 2 人參與遊戲時，若是雙方都知道遊戲的技巧，要怎麼做才能獲勝？

- (一) 假設取得 30 者獲勝，一次最多可取 1~2 個數字，根據 $30 \div 3 = 10 \cdots 0$ 的算式，餘數為 0，所以要取 3 的倍數才能立於不敗之地，但不論前者是取 1 或 2 個數字，後者都能根據前者取的數字來取 2 或 1 個數字，也就是後者能持續取到 3 的倍數直到遊戲結束。
- (二) 假設取得 30 者獲勝，一次最多可取 1~3 個數字，根據 $30 \div 4 = 7 \cdots 2$ 的算式，餘數為 2，當前者第 1 個數字就取到數字 2 時，不論後者是取 1 或 2 個數字，前者都能根據前者取的數字來取 2 或 1 個數字，讓數字以 2 再加上 4 的倍數持續下去直到遊戲結束。
- (三) 根據以上的討論我們發現，若餘數為 0 時，要當第 2 個取號的人才能獲勝；若有餘數時，則當第 1 個取號的人才能獲勝。

二、原本的題目是取 30 者獲勝，也看過有人的題目是取 24 者獲勝，30 和 24 都是偶

數，也都有 2 個以上的因數，若是改成只有 1 和數字本身 2 個因數的數字（如 47），是否會影響推算的方法與結論嗎？

- （一）依前面的推論來試試看，當 2 個人玩遊戲，一次最多可取 1~2 個數字， $47 \div 3 = 15 \cdots 2$ ，若第 1 個人就先取 2 個數字，後面再加上 3 的倍數為原則來取號，第 1 個取號的人能獲勝。
- （二）當一次最多可取 1~3 個數字， $47 \div 4 = 11 \cdots 3$ ，若第 1 個人就先取 3 個數字，後面再加上 4 的倍數為原則來取號，第 1 個取號的人能獲勝。
- （三）根據以上討論我們發現，最後要取得數字不論大小、偶數或奇數、數字本身有多少因數，都不會影響遊戲的推算方法。

陸、 結論

- 一、2 人玩搶數字遊戲時，有一定的規律可循，若只有其中 1 人知道遊戲技巧，不管是先取號還是後取號，只要能在遊戲過程中掌握關鍵數字，就能獲得勝利。
- 二、2 人玩搶數字遊戲時，若 2 人都知道遊戲技巧，當能取的最多和最少的數字和為最終取得那個數字的因數，後面取號的人必勝；但若能取的最多和最少的數字和不是最終取得那個數字的因數，前面取號的人必勝。
- 三、2 人玩搶數字遊戲時，不管要取的最終數字是奇數或偶數、有 3 個以上的因數或只有 2 個因數，都不會影響遊戲的推算方法。
- 四、3 人玩搶數字遊戲時，因數字的組合變化較多、複雜性較高，無法斷定那一個人一定能獲勝，但若能取得最終數字前的 4 或 5 個數字，獲勝機會會比較高。

柒、 參考資料及其他

南一書局（民 113）。數學第九冊（5 上）第三單元因數和倍數。台南市：南一

南一書局（民 113）。數學第十一冊（6 上）第八單元數量關係。台南市：南一