屏東縣第65屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：「抓不到」之延伸與研究

關 鍵 詞：外接圓、抓不到、抓得到

編　　號：B1001

摘要

本研究參考自《科學研習雙月刊》第 63 卷第 1 期中「森棚教官的數學題－抓不到」。內容先證明在一個任意四邊形中，一定可以找到一條對角線，使分割出的兩個三角形的外接圓都「抓不到」第四個頂點。接著，又證明一定不可能找到一條對角線，使分割出的兩個三角形的外接圓，一個「抓得到」第四個頂點，另一個「抓不到」第四個頂點。最後，證明在一個任意五邊形中，利用所有對角線，把五邊形分別分割成一個三角形和一個四邊形，一定可以找到一個三角形的外接圓無法同時「抓得到」另外兩個頂點。

壹、前言

一、研究動機

上數學課時，老師講到有關於外心和外接圓的相關內容，讓我們想探討外接圓與各種凸多邊形的關係，在我們上網查詢資料時發現了「抓不到」這個問題，於是就展開了我們的研究過程。

國立臺灣科學教育館 科學研習　第 63 卷第 1 期

森棚教官數學題——抓不到

文／游森棚

正方形的一條對角線，把正方形分成兩個等腰直角三角形。則任一個三角形的外接圓會剛好通過第四個頂點，也就是說，外接圓無法將第四個頂點包圍在內部。我們就說這個外接圓「抓不到」第四個頂點。

對於任意的四邊形。是否一定可以找到一條對角線，把四邊形分成兩個三角形，然後其中有一個三角形的外接圓「抓不到」另一個頂點？有沒有可能兩個三角形的外接圓一個「抓得到」第四個頂點，另一個「抓不到」第四個頂點？

二、目的

(一)在一個任意四邊形中，是否一定可以找到一條對角線，把四邊形分割成任意兩個三角形，然後其中有一個三角形的外接圓「抓不到」第四個頂點？

(二)承目的(一)，有沒有可能兩個三角形的外接圓，一個「抓得到」第四個頂點，另一個「抓不到」第四個頂點？

(三)在一個任意五邊形中，利用所有對角線，把五邊形分別分割成一個三角形和一個四邊形，是否一定可以找到一個三角形的外接圓無法同時「抓得到」另外兩個頂點？

三、文獻回顧

我們上網搜尋資料做文獻分析時，發現大多數涉及多邊形和外接圓性質的學術文獻都聚焦於外接圓的存在性、數學結構以及對頂點的影響，並未深入探討「抓不到」這個創新性概念。而我們的研究對於理解外接圓與多邊形頂點之間的關係提供了具體的數學應用實例。

貳、研究設備及器材

電腦、紙、筆。

參、研究過程或方法

一、在一個任意四邊形中，是否一定可以找到一條對角線，把四邊形分割成任意兩個三角形，然後其中有一個三角形的外接圓「抓不到」第四個頂點？

如圖 1，在一個任意四邊形 ABCD 中，設∠BAC＝θ_1，∠ABC＝θ_2，∠CAD＝θ_3，∠ACD＝θ_4。

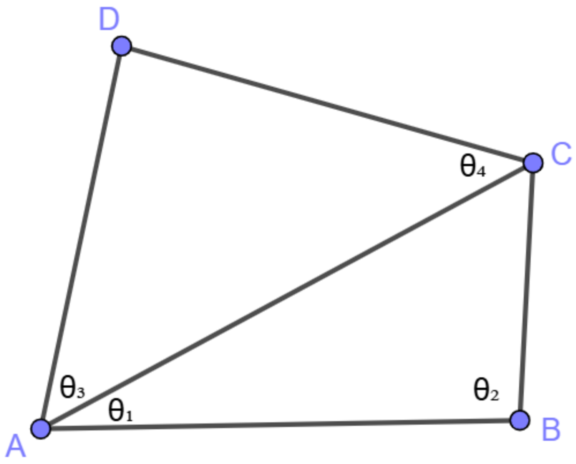


圖 1

(一)以△ABC 作外接圓

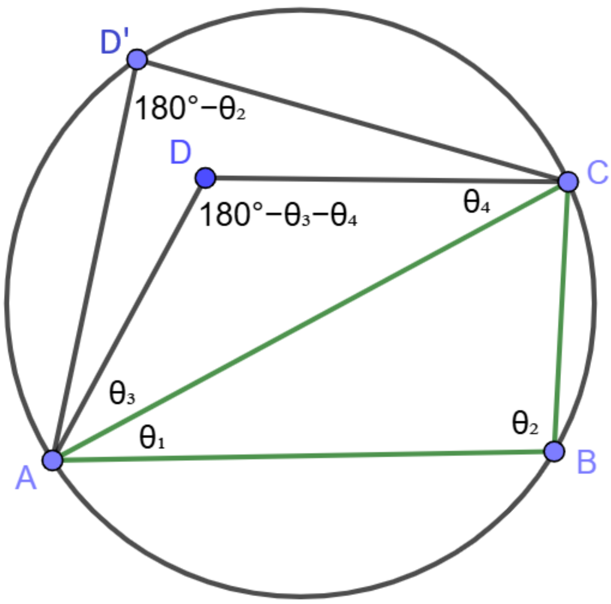


圖 1.1

如圖 1.1，∠ADC＝$180°-\theta_3-\theta_4$，∠AD'C＝$180°-\theta_2$，若△ABC 的外接圓要「抓得到」D 點，則∠ADC＞∠AD'C，即 $180°-\theta_3-\theta_4>180°-\theta_2$，最後得到 $\theta_2>\theta_3+\theta_4$。

(二)以△ACD 作外接圓

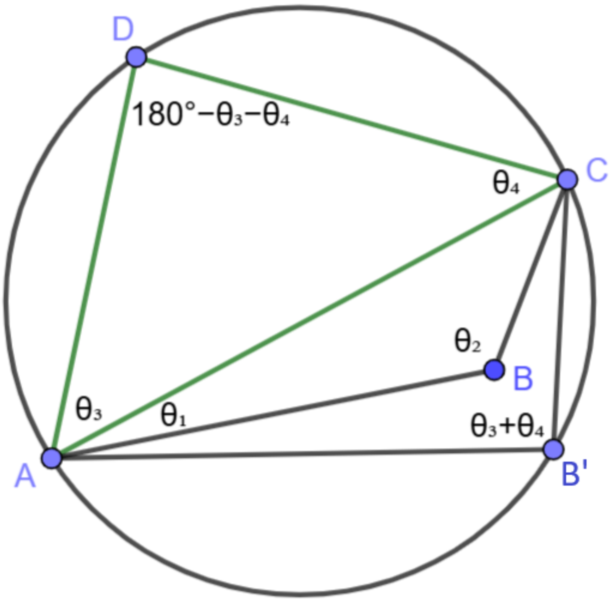


圖 1.2

如圖 1.2，∠ADC＝180°－θ_3－θ_4，∠AB'C＝180°－∠ADC＝180°－(180°－θ_3－θ_4)＝θ_3＋θ_4，若△ACD 的外接圓要「抓得到」B 點，則∠ABC＞∠AB'C，即 θ_2＞θ_3＋θ_4，最後得到 θ_2＞θ_3＋θ_4。

小結：由 $\overline{AC}$ 為對角線所分割出的△ABC 和△ACD 的外接圓若要「抓得到」第四個頂點，則需滿足相同的條件 θ_2＞θ_3＋θ_4。

(三)以△ABD 作外接圓

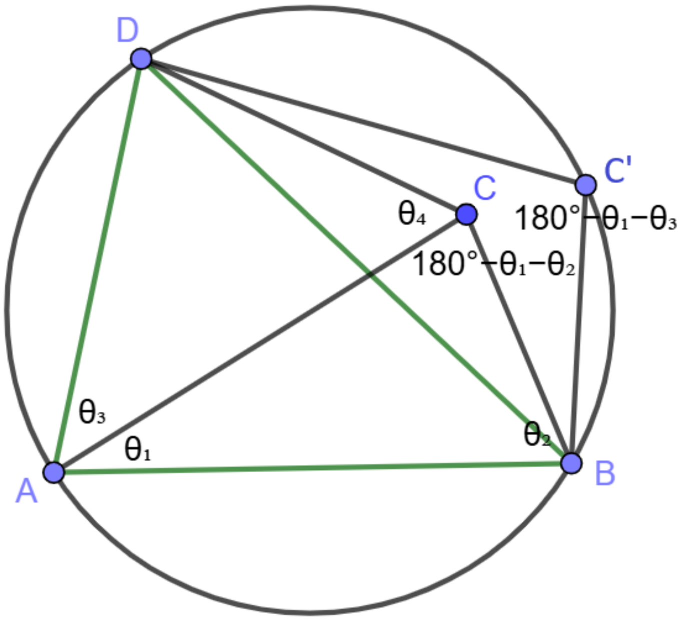


圖 1.3

如圖 1.3，∠BCD＝∠BCA＋∠ACD ＝180°－θ_1－θ_2＋θ_4，∠BC'D＝180°－∠BAD＝180°－θ_1－θ_3，若△ABD 的外接圓要「抓得到」C 點，則∠BCD＞∠BC'D，即 180°－θ_1－θ_2＋θ_4＞180°－θ_1－θ_3，最後得到 $\theta_3+\theta_4>\theta_2$。

(四)以△BCD 作外接圓

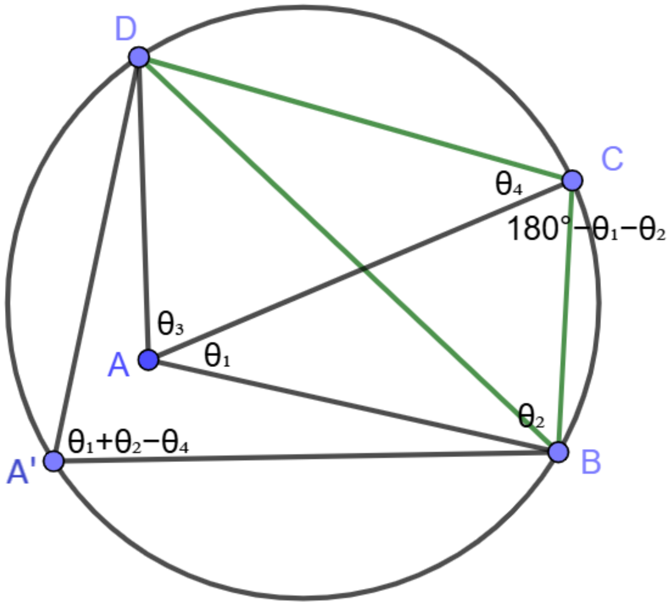


圖 1.4

如圖 1.4，∠BAD＝∠BAC＋∠CAD ＝θ_1＋θ_3，∠BA'D＝180°－∠BCD＝180°－ (180°－θ_1－θ_2＋θ_4)＝θ_1＋θ_2－θ_4，若△BCD 的外接圓要「抓得到」A 點，則∠BAD＞∠BA'D，即 θ_1＋θ_3＞θ_1＋θ_2－θ_4，最後得到 $\theta_3+\theta_4>\theta_2$。

小結：由 $\overline{BD}$ 為對角線所分割出的△ABD 和△BCD 的外接圓若要「抓得到」第四個頂點，則需滿足相同的條件 θ_3＋θ_4＞θ_2。

由(一)到(四)的結果，我們可以得到：

【推論 1】：

在一個任意四邊形中，一定可以找到一條對角線，使分割出的兩個三角形的外接圓都「抓不到」第四個頂點。

【證明 1】：

在一個任意四邊形中，同一條對角線所分割出的兩個三角形的外接圓要「抓得到」第四個頂點的條件相同。因此，我們將同一條對角線所分割出的兩個三角形歸類為一

組。在一個任意四邊形中，這樣的三角形一共有兩組，而這兩組所需滿足的條件恰好相反。所以，一定可以找到一條對角線，使分割出的兩個三角形的外接圓都「抓不到」第四個頂點。

二、承目的一，有沒有可能兩個三角形的外接圓，一個「抓得到」第四個頂點，另一個「抓不到」第四個頂點？

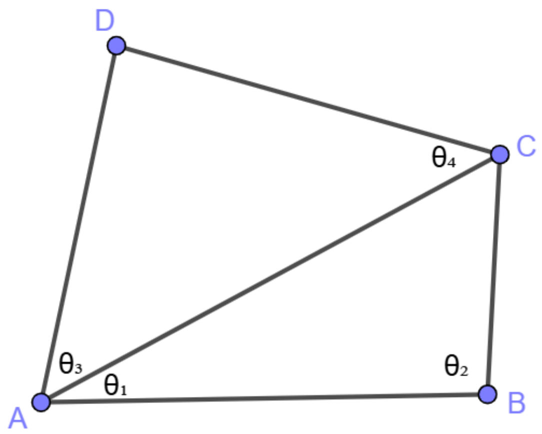


圖 2

由目的一的結果可知，在一任意四邊形 ABCD 中，如圖 2。

(一)若 $\theta_2 > \theta_3 + \theta_4$

則由 $\overline{AC}$ 為對角線所分割出的△ABC 和△ACD 的外接圓一定都「抓得到」 第四個頂點；而由 $\overline{BD}$ 為對角線所分割出的△ABD 和△BCD 的外接圓一定都「抓不到」第四個頂點。

(二)若 $\theta_2 = \theta_3 + \theta_4$

則 $\angle B + \angle D = \theta_3 + \theta_4 + \angle D = 180°$，所以 A、B、C、D 四點共圓，由 $\overline{AC}$ 為對角線所分割出的△ABC 和△ACD 的外接圓一定都「抓不到」第四個頂點；而由 $\overline{BD}$ 為對角線所分割出的△ABD 和△BCD 的外接圓也一定都「抓不到」第四個頂點。

(三)若 $\theta_2 < \theta_3 + \theta_4$

則由 $\overline{BD}$ 為對角線所分割出的△ABD 和△BCD 的外接圓一定都「抓得到」第四個頂點；而由 $\overline{AC}$ 為對角線所分割出的△ABC 和△ACD 的外接圓一定都「抓不到」第四個頂點。

由(一)到(三)的結果，我們可以得到：

【推論 2】：

在一個任意四邊形中，一定不可能找到一條對角線，使分割出的兩個三角形的外接圓，一個「抓得到」第四個頂點，另一個「抓不到」第四個頂點。

【證明 2】：

在一個任意四邊形中，不管滿足的條件為何，同一條對角線所分割出的兩個三角形的外接圓一定都同時「抓得到」或同時「抓不到」第四個頂點，不可能一個外接圓「抓得到」第四個頂點，另一個外接圓「抓不到」第四個頂點。

三、在一個任意五邊形中，利用所有對角線，把五邊形分別分割成一個三角形和一個四邊形，是否一定可以找到一個三角形的外接圓無法同時「抓得到」另外兩個頂點？

如圖 3，在一個任意五邊形 ABCDE 中，設∠DAE＝θ_1，∠AEB＝θ_1'，∠ABE＝θ_2，∠BAC＝θ_2'，∠ACB＝θ_3，∠CBD＝θ_3'，∠BDC＝θ_4，∠DCE＝θ_4'，∠CED＝θ_5，∠ADE＝θ_5'。

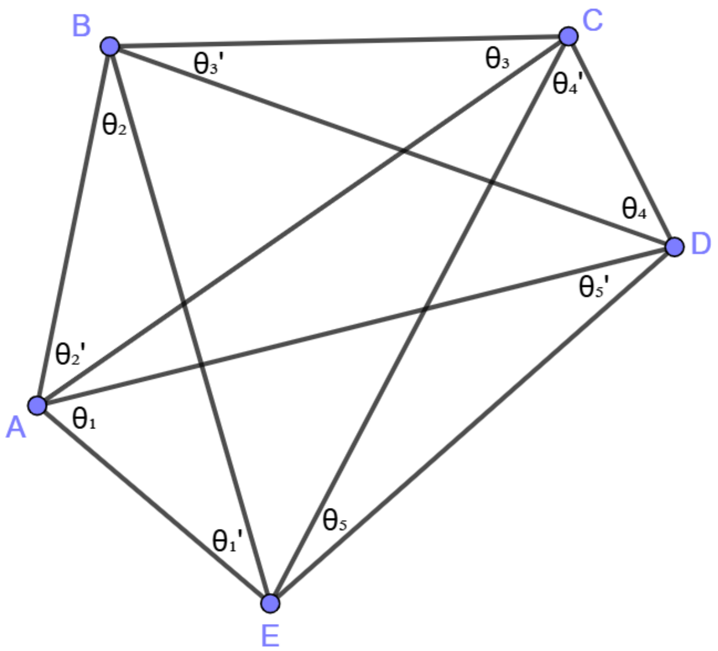


圖 3

由圖 3，我們可以得到：

【推論 3.1】：

$\theta 1+\theta 1'+\theta 2+\theta 2'+\theta 3+\theta 3'+\theta 4+\theta 4'+\theta 5+\theta 5'=360°$。

【證明 3.1】：

$\theta 1+\theta 1'+\theta 2+\theta 2'+\theta 3+\theta 3'+\theta 4+\theta 4'+\theta 5+\theta 5'=540°-(\angle CAD+\angle DBE+\angle ACE+\angle ADB+\angle BEC)=540°-180°=360°$。

(一)以△ABC 作外接圓

1.「抓得到」D 點

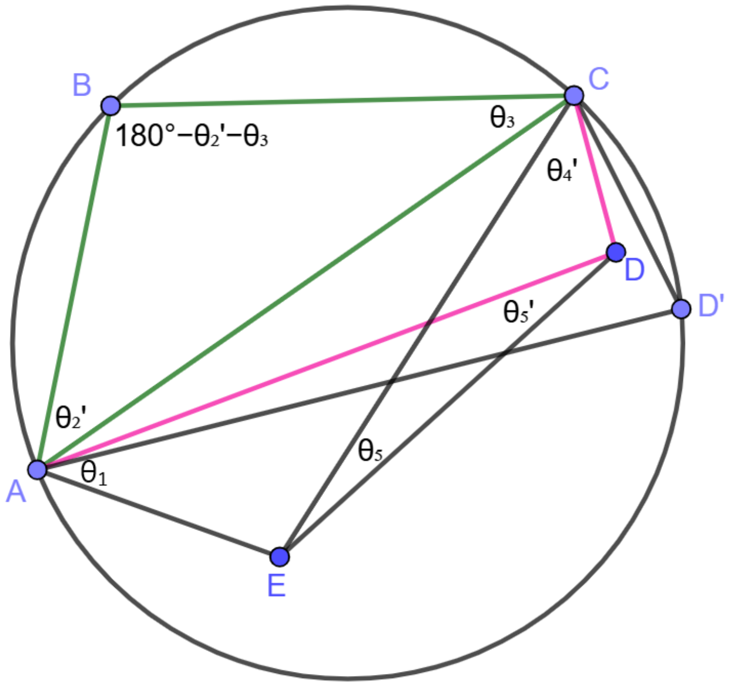


圖 3.1.1

如圖 3.1.1，$\angle ADC = 180° - \theta_4' - \theta_5 - \theta_5'$，$\angle AD'C = 180° - \angle ABC = 180° - (180° - \theta_2' - \theta_3) = \theta_2' + \theta_3$，若△ABC 的外接圓要「抓得到」D 點，則$\angle ADC > \angle AD'C$，即 $180° - \theta_4' - \theta_5 - \theta_5' > \theta_2' + \theta_3$，最後得到 $180° > \theta_2' + \theta_3 + \theta_4' + \theta_5 + \theta_5'$.....①。

2.「抓得到」E 點

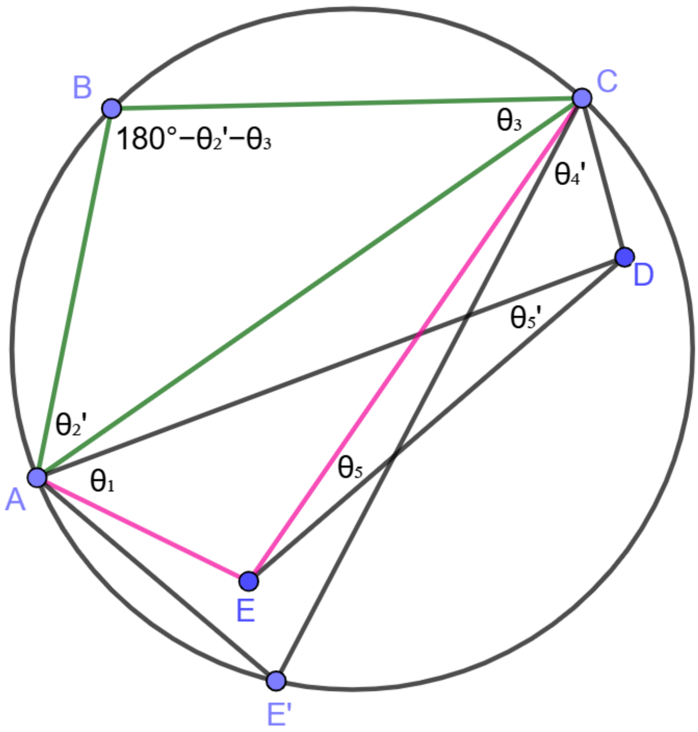


圖 3.1.2

如圖 3.1.2，$\angle AEC=180°-\theta_1-\theta_5-\theta_5'$，$\angle AE'C=180°-\angle ABC=180°-(180°-\theta_2'-\theta_3)=\theta_2'+\theta_3$，若△ABC 的外接圓要「抓得到」E 點，則$\angle AEC>\angle AE'C$，即 $180°-\theta_1-\theta_5-\theta_5'>\theta_2'+\theta_3$，最後得到 $180°>\theta_1+\theta_2'+\theta_3+\theta_5+\theta_5'$.....②。

(二)以△BCD 作外接圓

1.「抓得到」E 點

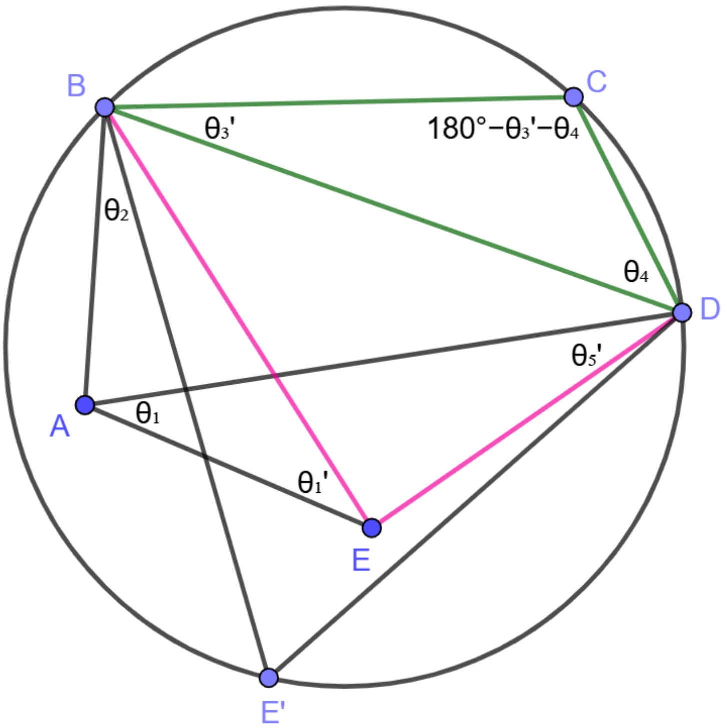


圖 3.2.1

如圖 3.2.1，$\angle BED = 180° - \theta_1 - \theta_1' - \theta_5'$，$\angle BE'D = 180° - \angle BCD = 180° - (180° - \theta_3' - \theta_4) = \theta_3' + \theta_4$，若△BCD 的外接圓要「抓得到」E 點，則$\angle BED > \angle BE'D$，即 $180° - \theta_1 - \theta_1' - \theta_5' > \theta_3' + \theta_4$，最後得到 $180° > \theta_1 + \theta_1' + \theta_3' + \theta_4 + \theta_5'$.....③。

2.「抓得到」A 點

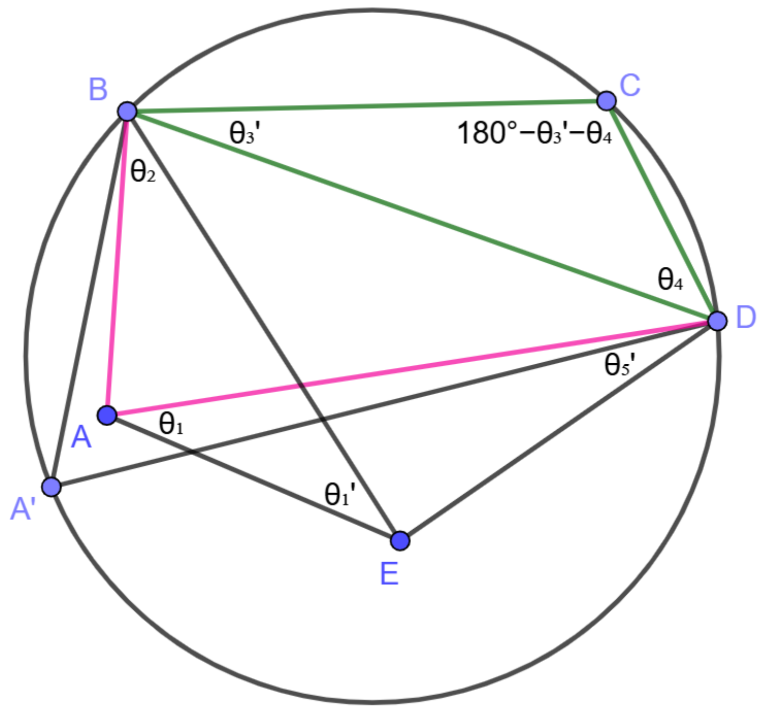


圖 3.2.2

如圖 3.2.2，$\angle BAD = 180° - \theta_1 - \theta_1' - \theta_2$，$\angle BA'D = 180° - \angle BCD = 180° - (180° - \theta_3' - \theta_4) = \theta_3' + \theta_4$，若△BCD 的外接圓要「抓得到」A 點，則$\angle BAD > \angle BA'D$，即 $180° - \theta_1 - \theta_1' - \theta_2 > \theta_3' + \theta_4$，最後得到 $180° > \theta_1 + \theta_1' + \theta_2 + \theta_3' + \theta_4$ .....④。

(三)以△CDE 作外接圓

1.「抓得到」A 點

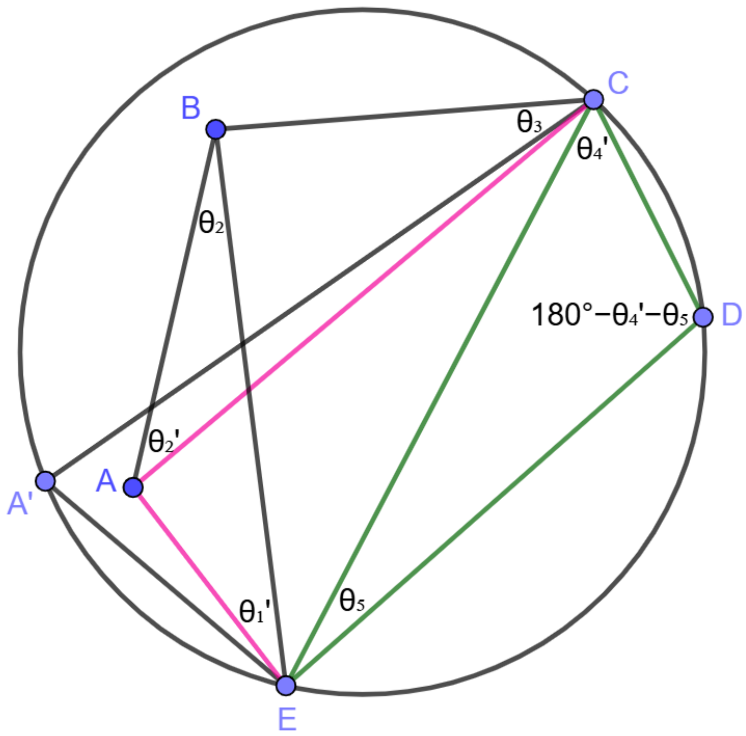


圖 3.3.1

如圖 3.3.1，$\angle CAE = 180° - \theta_1' - \theta_2 - \theta_2'$，$\angle CA'E = 180° - \angle CDE = 180° - (180° - \theta_4' - \theta_5) = \theta_4' + \theta_5$，若△CDE 的外接圓要「抓得到」A 點，則$\angle CAE > \angle CA'E$，即 $180° - \theta_1' - \theta_2 - \theta_2' > \theta_4' + \theta_5$，最後得到 $180° > \theta_1' + \theta_2 + \theta_2' + \theta_4' + \theta_5$ .....⑤。

2.「抓得到」B 點

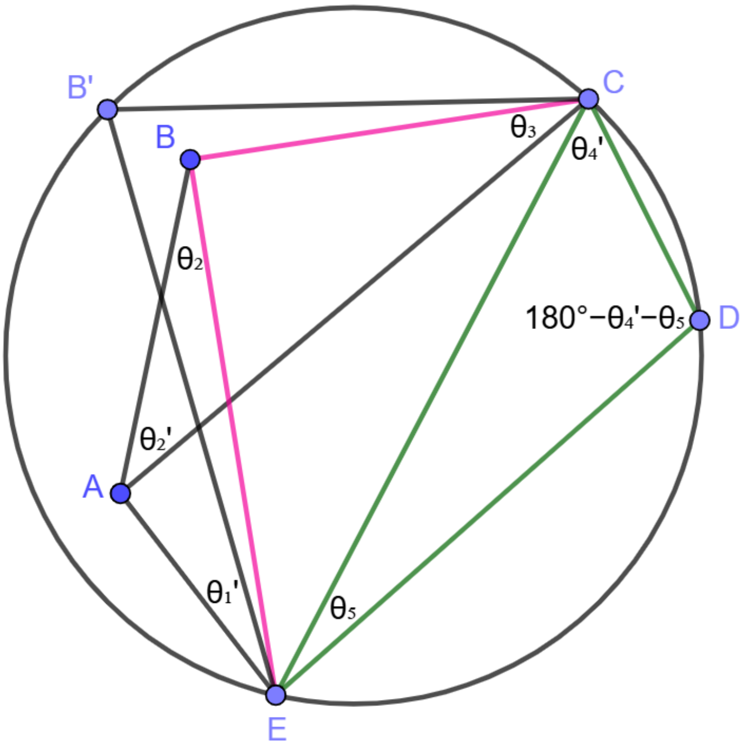


圖 3.3.2

如圖 3.3.2，$\angle CBE = 180° - \theta_2 - \theta_2' - \theta_3$，$\angle CB'E = 180° - \angle CDE = 180° - (180° - \theta_4' - \theta_5) = \theta_4' + \theta_5$，若△CDE 的外接圓要「抓得到」B 點，則$\angle CBE > \angle CB'E$，即 $180° - \theta_2 - \theta_2' - \theta_3 > \theta_4' + \theta_5$，最後得到 $180° > \theta_2 + \theta_2' + \theta_3 + \theta_4' + \theta_5$ .....⑥。

(四)以△ADE 作外接圓

1.「抓得到」B 點

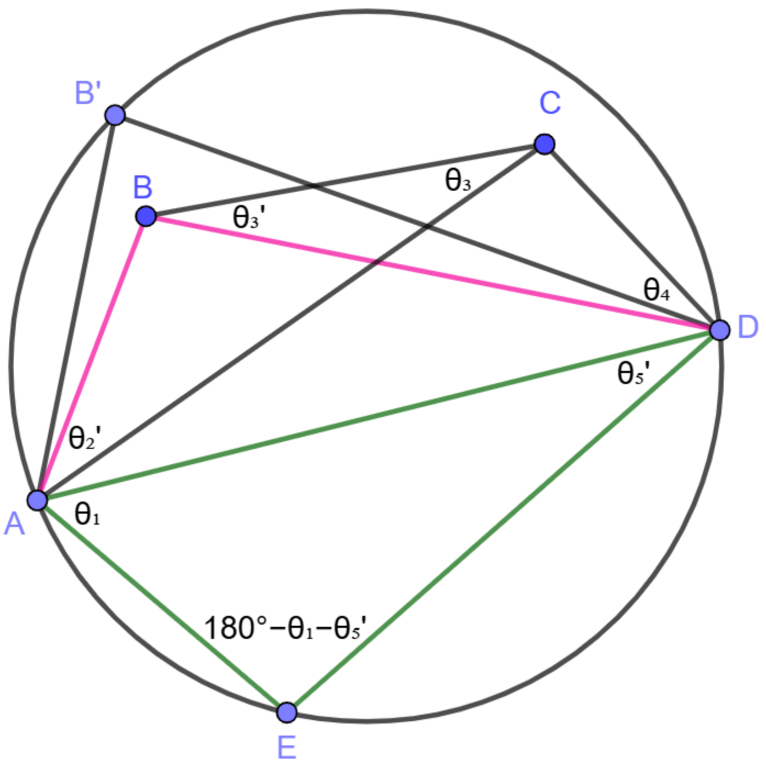


圖 3.4.1

如圖 3.4.1，∠ABD＝180°－θ_2'－θ_3－θ_3'，∠AB'D＝180°－∠AED＝180°－ (180°－θ_1－θ_5')＝θ_1＋θ_5'，若△ADE 的外接圓要「抓得到」B 點，則∠ABD＞∠AB'D，即 180°－θ_2'－θ_3－θ_3'＞θ_1＋θ_5'，最後得到 180°＞θ_1＋θ_2'＋θ_3＋θ_3'＋θ_5'.....⑦。

2.「抓得到」C 點

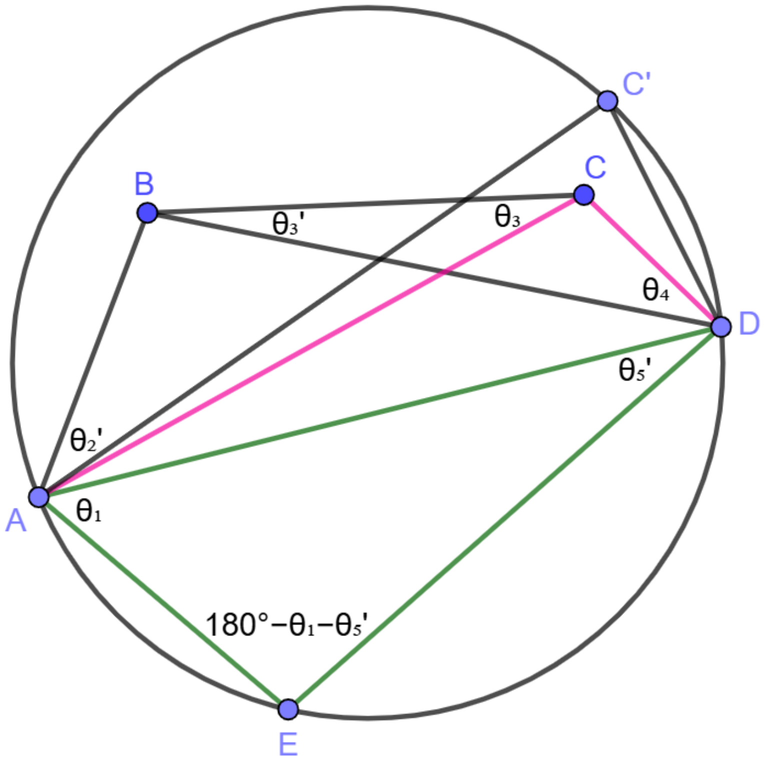


圖 3.4.2

如圖 3.4.2，$\angle ACD = 180° - \theta_3 - \theta_3' - \theta_4$，$\angle AC'D = 180° - \angle AED = 180° - (180° - \theta_1 - \theta_5') = \theta_1 + \theta_5'$，若△ADE 的外接圓要「抓得到」C 點，則$\angle ACD > \angle AC'D$，即 $180° - \theta_3 - \theta_3' - \theta_4 > \theta_1 + \theta_5'$，最後得到 $180° > \theta_1 + \theta_3 + \theta_3' + \theta_4 + \theta_5'$.....⑧。

(五)以△ABE 作外接圓

1.「抓得到」C 點

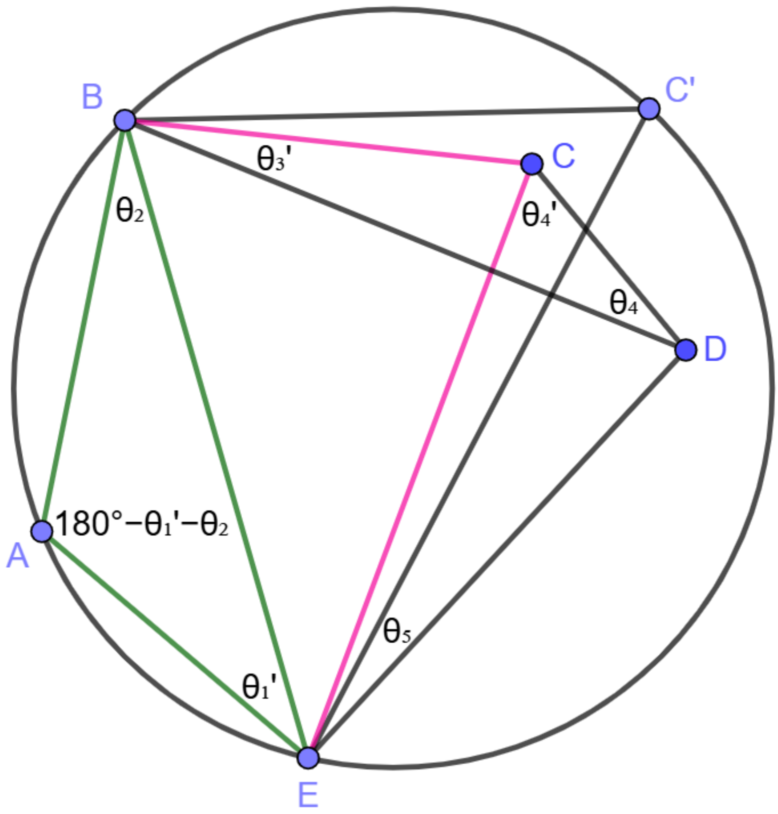


圖 3.5.1

如圖 3.5.1，$\angle BCE = 180° - \theta_3' - \theta_4 - \theta_4'$，$\angle BC'E = 180° - \angle BAE = 180° - (180° - \theta_1' - \theta_2) = \theta_1' + \theta_2$，若△ABE 的外接圓要「抓得到」C 點，則$\angle BCE > \angle BC'E$，即 $180° - \theta_3' - \theta_4 - \theta_4' > \theta_1' + \theta_2$，最後得到 $180° > \theta_1' + \theta_2 + \theta_3' + \theta_4 + \theta_4'$.....⑨。

2.「抓得到」D 點

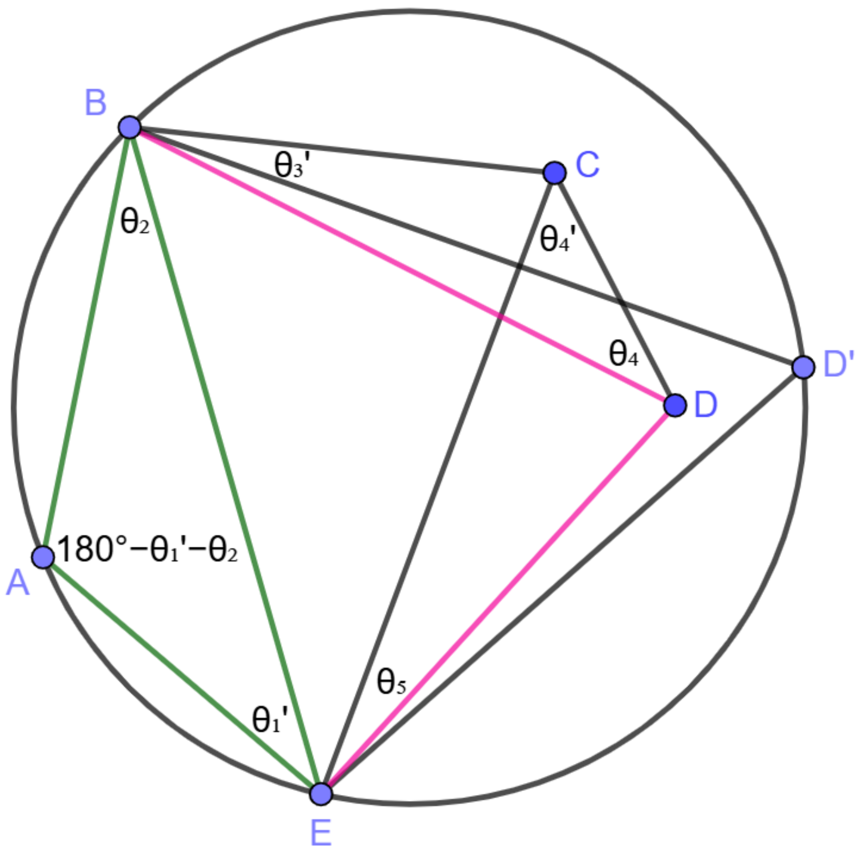


圖 3.5.2

如圖 3.5.2，$\angle BDE = 180° - \theta_4 - \theta_4' - \theta_5$，$\angle BD'E = 180° - \angle BAE = 180° - (180° - \theta_1' - \theta_2) = \theta_1' + \theta_2$，若△ABE 的外接圓要「抓得到」D 點，則$\angle BDE > \angle BD'E$，即 $180° - \theta_4 - \theta_4' - \theta_5 > \theta_1' + \theta_2$，最後得到 $180° > \theta_1' + \theta_2 + \theta_4 + \theta_4' + \theta_5$.....⑩。

小結：由【推論 3.1】和(一)到(五)的結果，我們可以整理出下列式子：

$$\begin{cases} \theta1+\theta1'+\theta2+\theta2'+\theta3+\theta3'+\theta4+\theta4'+\theta5+\theta5'=360° \\ 180°>\theta2'+\theta3+\theta4'+\theta5+\theta5' \quad \ldots..① \\ 180°>\theta1+\theta2'+\theta3+\theta5+\theta5' \quad \ldots..② \\ 180°>\theta1+\theta1'+\theta3'+\theta4+\theta5' \quad \ldots..③ \\ 180°>\theta1+\theta1'+\theta2+\theta3'+\theta4 \quad \ldots..④ \\ 180°>\theta1'+\theta2+\theta2'+\theta4'+\theta5 \quad \ldots..⑤ \\ 180°>\theta2+\theta2'+\theta3+\theta4'+\theta5 \quad \ldots..⑥ \\ 180°>\theta1+\theta2'+\theta3+\theta3'+\theta5' \quad \ldots..⑦ \\ 180°>\theta1+\theta3+\theta3'+\theta4+\theta5' \quad \ldots..⑧ \\ 180°>\theta1'+\theta2+\theta3'+\theta4+\theta4' \quad \ldots..⑨ \\ 180°>\theta1'+\theta2+\theta4+\theta4'+\theta5 \quad \ldots..⑩ \end{cases}$$

並且得到：

【推論 3.2】：

在一個任意五邊形中，利用所有對角線，把五邊形分別分割成一個三角形和一個四邊形，一定可以找到一個三角形的外接圓無法同時「抓得到」另外兩個頂點。

【證明 3.2】：

由①＋④，360°＞θ1＋θ1’＋θ2＋θ2’＋θ3＋θ3’＋θ4＋θ4’＋θ5＋θ5’，得 360°＞360°，產生矛盾。

由③＋⑥，360°＞θ1＋θ1’＋θ2＋θ2’＋θ3＋θ3’＋θ4＋θ4’＋θ5＋θ5’，得 360°＞360°，產生矛盾。

由⑤＋⑧，360°＞θ1＋θ1’＋θ2＋θ2’＋θ3＋θ3’＋θ4＋θ4’＋θ5＋θ5’，得 360°＞360°，產生矛盾。

由⑦＋⑩，360°＞θ1＋θ1’＋θ2＋θ2’＋θ3＋θ3’＋θ4＋θ4’＋θ5＋θ5’，得 360°＞360°，產生矛盾。

由⑨＋②，360°＞θ1＋θ1’＋θ2＋θ2’＋θ3＋θ3’＋θ4＋θ4’＋θ5＋θ5’，得 360°＞360°

，產生矛盾。

所以，一定可以找到一個三角形的外接圓無法同時「抓得到」另外兩個頂點。

肆、研究結果

一、在一個任意四邊形中，是否一定可以找到一條對角線，把四邊形分割成任意兩個三角形，然後其中有一個三角形的外接圓「抓不到」第四個頂點？

【推論 1】：

在一個任意四邊形中，一定可以找到一條對角線，使分割出的兩個三角形的外接圓都「抓不到」第四個頂點。

二、承目的一，有沒有可能兩個三角形的外接圓，一個「抓得到」第四個頂點，另一個「抓不到」第四個頂點？

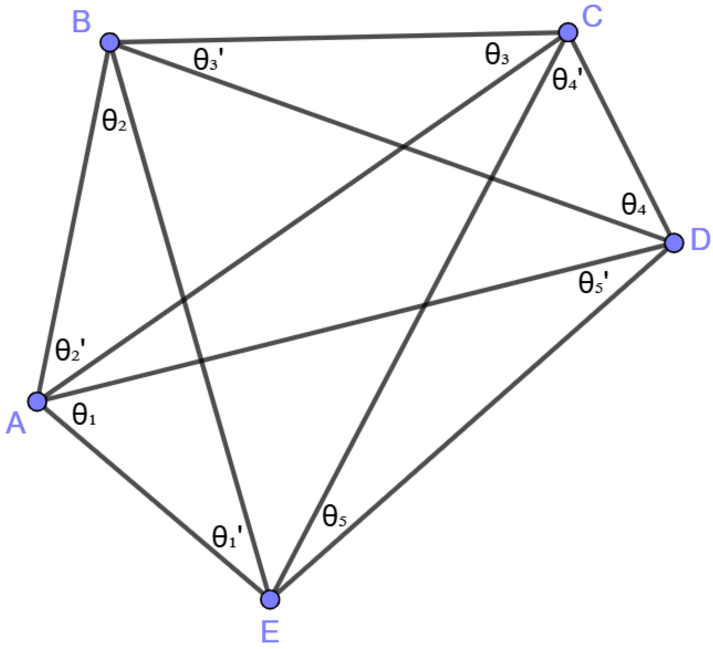
【推論 2】：

在一個任意四邊形中，一定不可能找到一條對角線，使分割出的兩個三角形的外接圓，一個「抓得到」第四個頂點，另一個「抓不到」第四個頂點。

三、在一個任意五邊形中，利用所有對角線，把五邊形分別分割成一個三角形和一個四邊形，是否一定可以找到一個三角形的外接圓無法同時「抓得到」另外兩個頂點？

【推論 3.1】：

如圖，在一個任意五邊形 ABCDE 中，設$\angle DAE=\theta_1$，$\angle AEB=\theta_1'$，$\angle ABE=\theta_2$，$\angle BAC=\theta_2'$，$\angle ACB=\theta_3$，$\angle CBD=\theta_3'$，$\angle BDC=\theta_4$，$\angle DCE=\theta_4'$，$\angle CED=\theta_5$，$\angle ADE=\theta_5'$，則 $\theta1+\theta1'+\theta2+\theta2'+\theta3+\theta3'+\theta4+\theta4'+\theta5+\theta5'=360°$。



【推論 3.2】：

在一個任意五邊形中，利用所有對角線，把五邊形分別分割成一個三角形和一個四邊形，一定可以找到一個三角形的外接圓無法同時「抓得到」另外兩個頂點。

伍、討論

我們目前的研究內容已經完成任意四邊形和五邊形「抓得到」或「抓不到」角度條件的探討，將來會繼續朝六邊形和其他多邊形去努力，期望能在這些方面有更深入的研究進展和突破。

陸、結論

關於「抓不到」這個題目，我們一開始就先以四邊形去研究，證明在一個任意四邊形中，一定可以找到一條對角線，使分割出的兩個三角形的外接圓都「抓不到」第四個頂點。接著，我們又證明在一個任意四邊形中，一定不可能找到一條對角線，使分割出的兩個三角形的外接圓，一個「抓得到」第四個頂點，另一個「抓不到」第四個頂點。最後，我們更進一步往五邊形去研究，並證明在一個任意五邊形中，利用所有對角線，把五邊形分別分割成一個三角形和一個四邊形，一定可以找到一個三角形的外接圓無法同時「抓得到」另外兩個頂點。

研究過程中遇到了很多瓶頸，經過不斷地上網搜尋資料並和老師討論之後，終於皇天不負苦心人，我們順利地完成這份科展報告。

柒、參考文獻資料

一、游森棚(2024)・森棚教官的數學題－抓不到・科學研習雙月刊，63(1)。