

屏東縣第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：「一塊拼，兩塊拼」之延伸與研究

關 鍵 詞：T 拼片、L 拼片、O 拼片

編 號：B1002

摘要

本研究參考自《科學研習雙月刊》第 62 卷第 5 期中「森棚教官的數學題——一塊拼，兩塊拼」。內容先找出用 16 個 T 拼片拼成 8×8 的大正方形，全部共有 15 種拼法。接著，找出用 a 個 T 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形，全部共有 31 種拼法。最後，找出用 c 個 L 拼片加上 d 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形，目前共有 129 種拼法。

壹、前言

一、研究動機

我們在《科學研習雙月刊》中發現了「一塊拼，兩塊拼」這個題目，內容使用三種四連方拼片拼成 8×8 的大正方形，和數學課學到的幾何圖形鑲嵌有關，我們認為相當有趣且頗具挑戰性，便想將題目進一步延伸並研究其排列方式。

國立臺灣科學教育館 科學研習 第 62 卷第 5 期

森棚教官數學題 —— 一塊拼，兩塊拼

文／游森棚

玩具店為了吸引小客人，在店裡的一角設置了遊戲區。遊戲區的桌上有三種用四個單位小方塊構成的拼片，如圖。為了方便起見，由左至右分別叫做 T 拼片、L 拼片、O 拼片。數量皆有非常多。



聰明的小動喜歡在這裡玩拼圖，他發現用 16 個 O 拼片可以拼成 8×8 的大正方形；用 16 個 L 拼片也可以拼成 8×8 的大正方形。

聰明的讀者：

- 1、你也可以辦到嗎？
- 2、你可以用 16 個 T 拼片可以拼成 8×8 的大正方形嗎？
- 3、你可以用 15 個 L 拼片加上 1 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形嗎？
- 4、你可以用 15 個 T 拼片加上 1 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形嗎？
- 5、如果用 a 個 T 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形， (a, b) 可以是多少？

二、目的

- (一)如果用 16 個 T 拼片拼成 8×8 的大正方形，有幾種拼法？
- (二)如果用 a 個 T 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形， (a, b) 可以是多少？有幾種拼法？
- (三)如果用 c 個 L 拼片加上 d 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形， (c, d) 可以是多少？有幾種拼法？

三、文獻回顧

我們上網搜尋文獻時發現，以連方塊發展相關主題的數學著作頗多，歷屆科展作品和早期研究已有探討 T 拼片來平鋪矩形，以及多連方所能拼成的最小矩形。我們知道，T 拼片能夠拼成的最小矩形是 4×4 矩形，L 拼片能夠拼成的最小矩形是 2×4 矩形，O 拼片本身就是 2×2 矩形，在 $4m \times 4n$ 的矩形中，任何兩種不同拼片的拼法都可以透過兩個或四個拼片的小範圍變換互相轉換。因此，將兩種不同拼片混合平鋪矩形並計算拼法數量是我們研究的最大創新。

貳、研究設備及器材

電腦、紙、筆、尺。

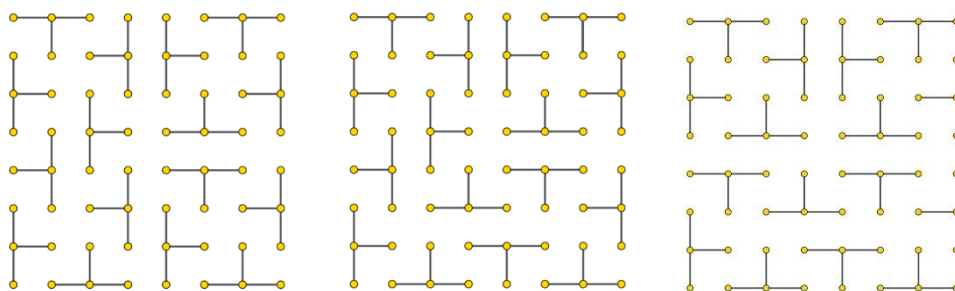
參、研究過程或方法

可透過鏡像、旋轉、翻轉任意組成而完成的組合方式皆視為同一種拼法，不重覆計算。

一、如果用 16 個 T 拼片拼成 8×8 的大正方形，有幾種拼法？

T 拼片拼成的最小矩形是 4×4 的正方形，因此，只有 $4m \times 4n$ 的矩形可以由 T 拼片平鋪而成。所以，我們先將四個 4×4 的正方形以不同方向組合成 8×8 的正方形，再作內部結構的替換。我們完成的拼法如下：



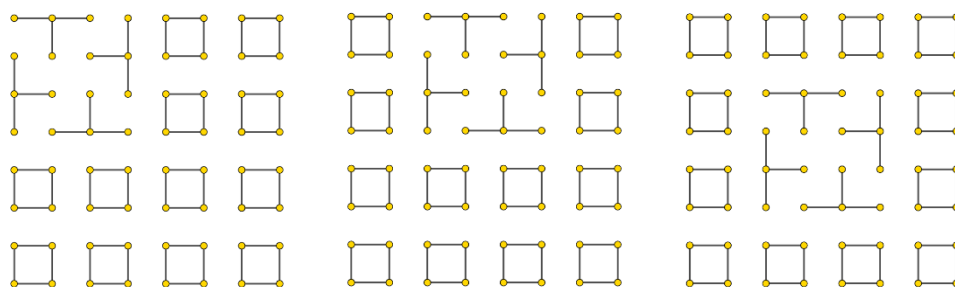


小結：由上面圖形可以歸納出共有 15 種拼法。

二、如果用 a 個 T 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形， (a, b) 可以是多少？有幾種拼法？

(一)當 $(a, b) = (4, 12)$

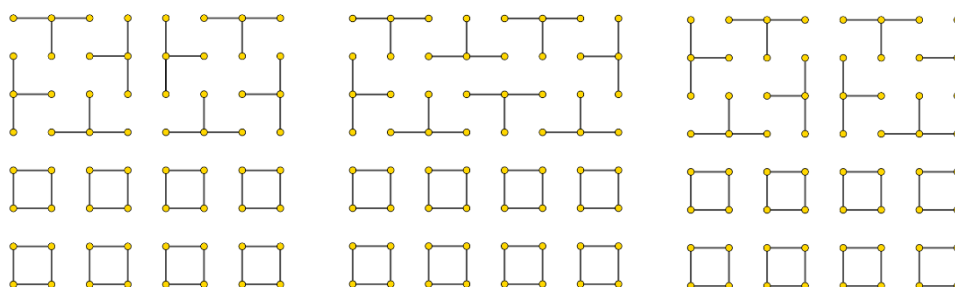
T 拼片的位置只有接觸兩邊、接觸一邊和不接觸邊的情形，我們完成的拼法如下：

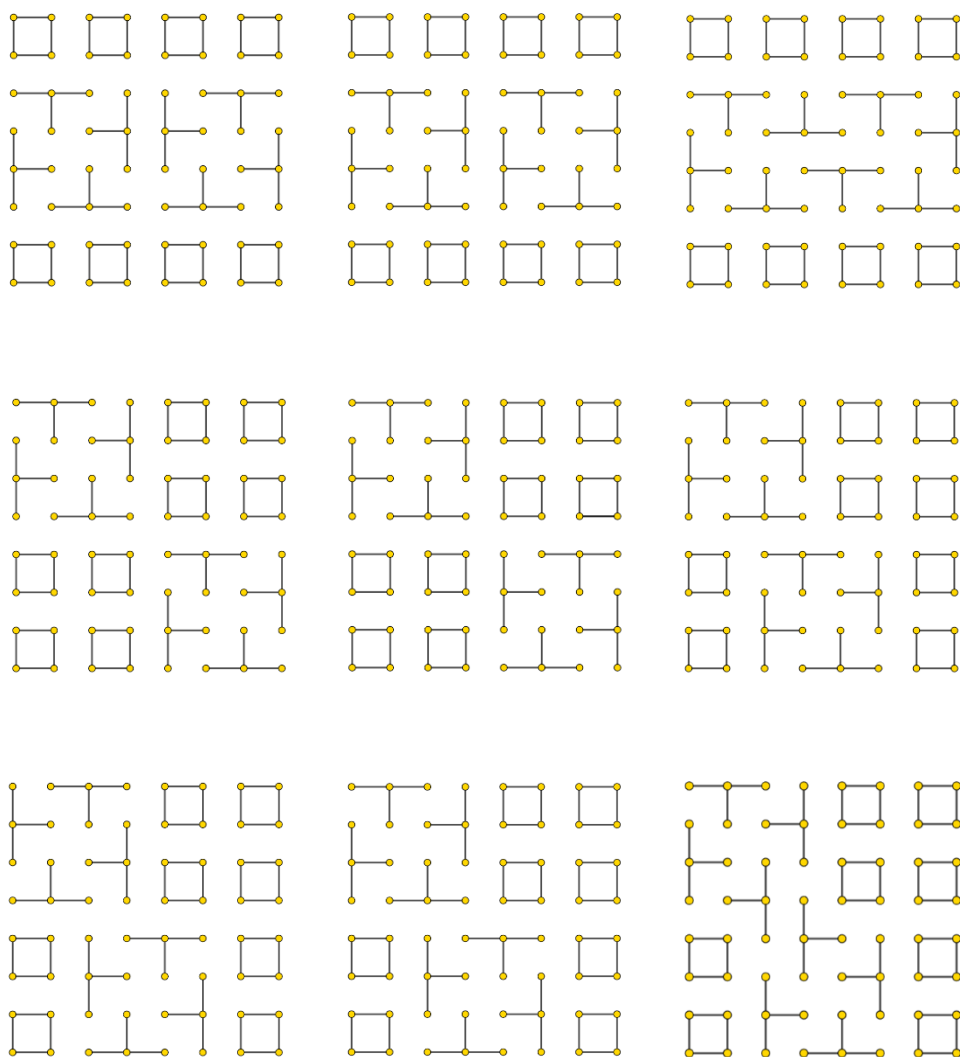


由上面圖形可以知道有 3 種拼法。

(二)當 $(a, b) = (8, 8)$

我們完成的拼法如下：

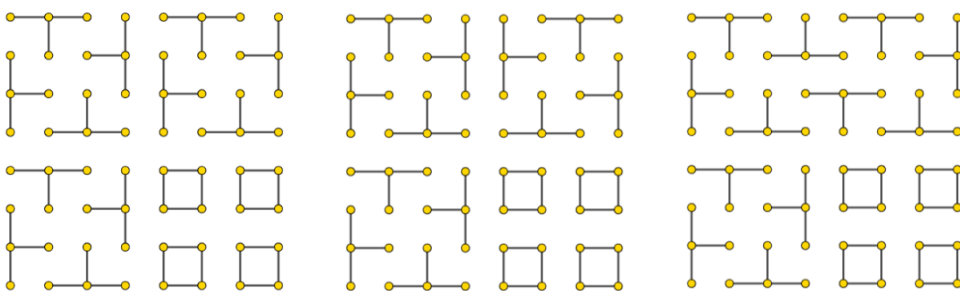


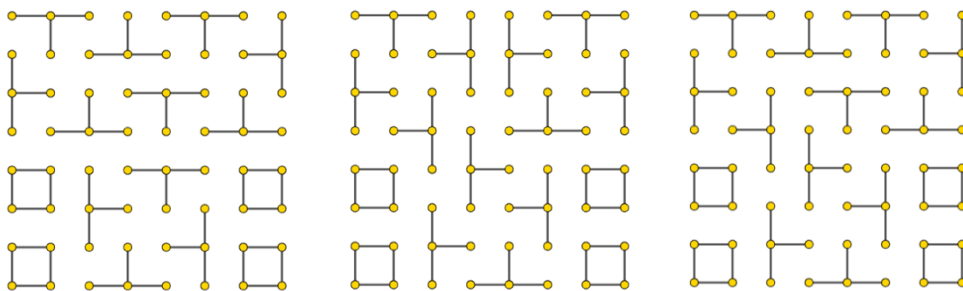
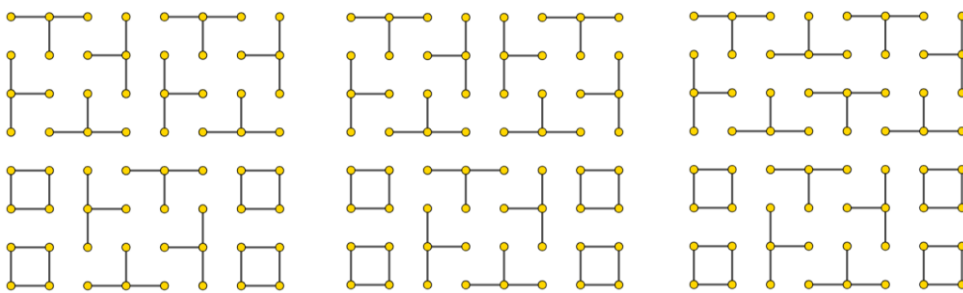
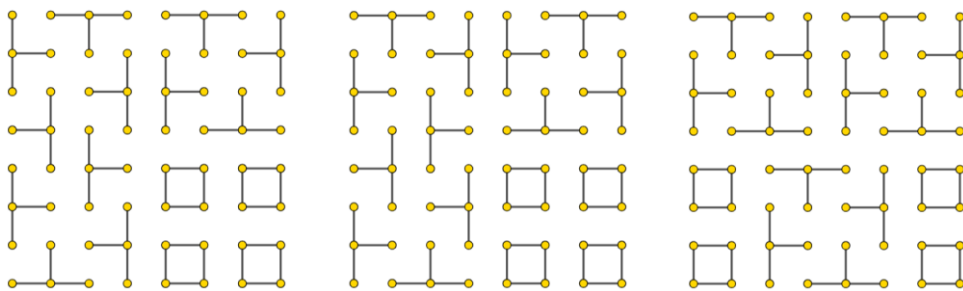
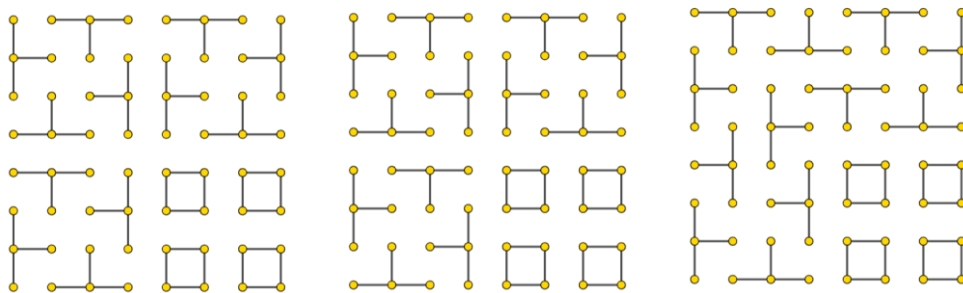


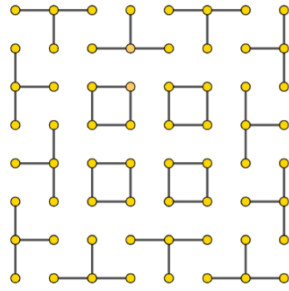
由上面圖形可以知道有 12 種拼法。

(三)當 $(a, b)=(12, 4)$

我們完成的拼法如下：







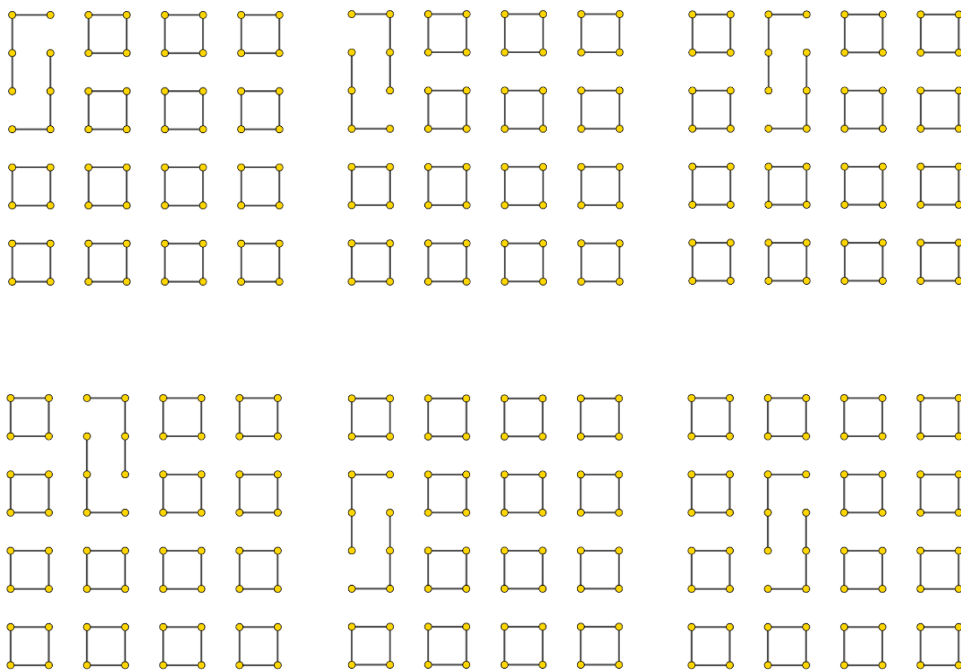
由上面圖形可以知道有 16 種拼法。

小結：由(一)到(三)的結果，我們可以歸納出共有 $3 + 12 + 16 = 31$ 種拼法。

三、如果用 c 個 L 拼片加上 d 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形， (c, d) 可以是多少？有幾種拼法？

(一)當 $(c, d) = (2, 14)$

我們完成的拼法如下：

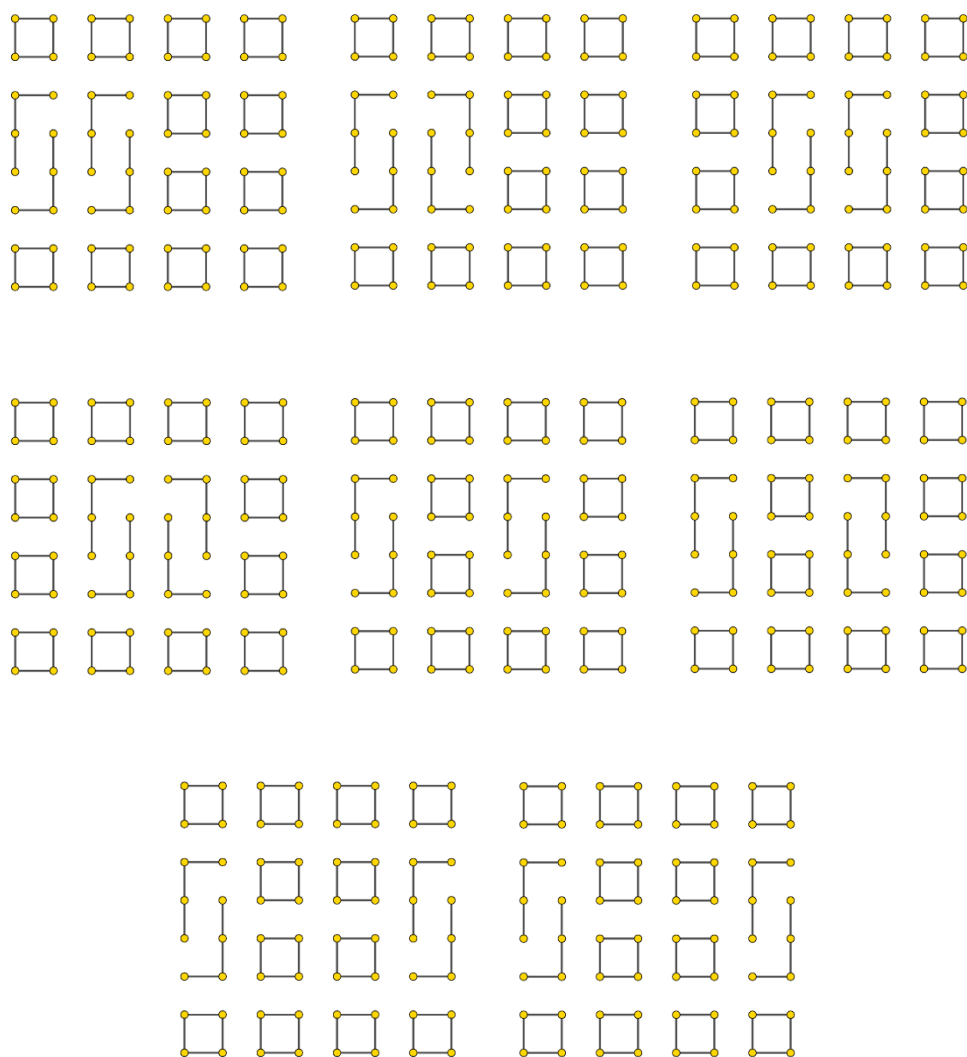


由上面圖形可以知道有 6 種拼法。

(二)當 $(c, d) = (4, 12)$

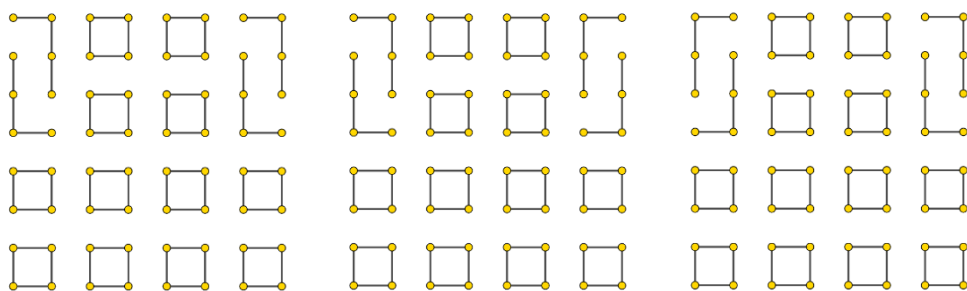
L 拼片拼成的最小矩形是 2×4 的長方形，將兩個一組的 L 拼片視為 2×4 的封閉長方形，在 4L12O 中，我們可以分為以下四種情況：

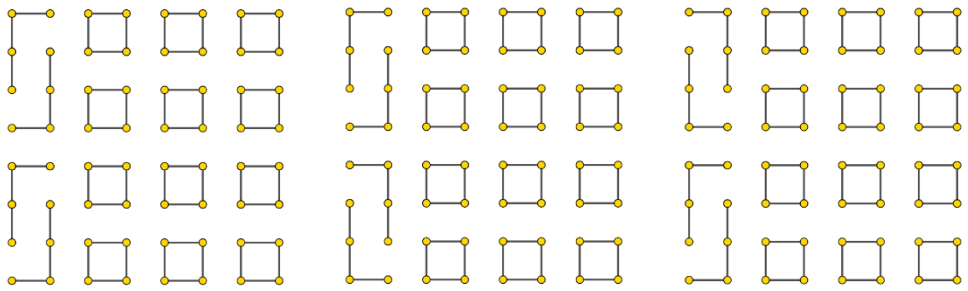
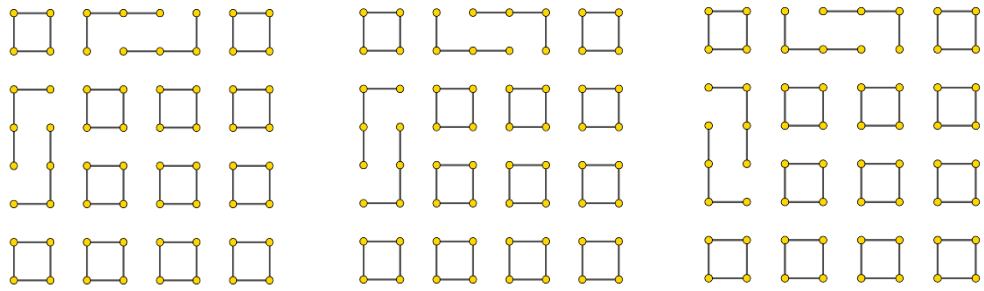
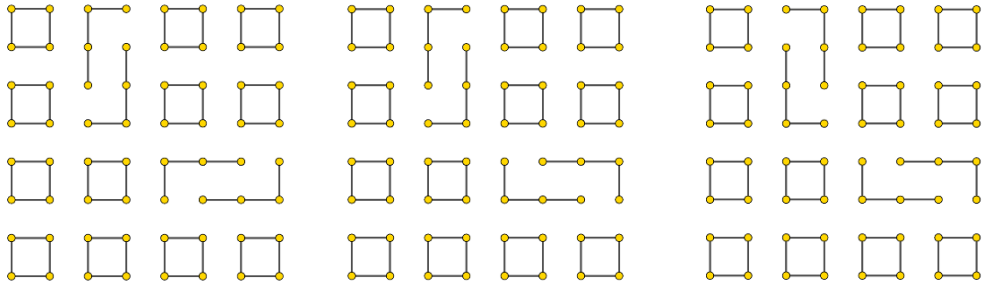
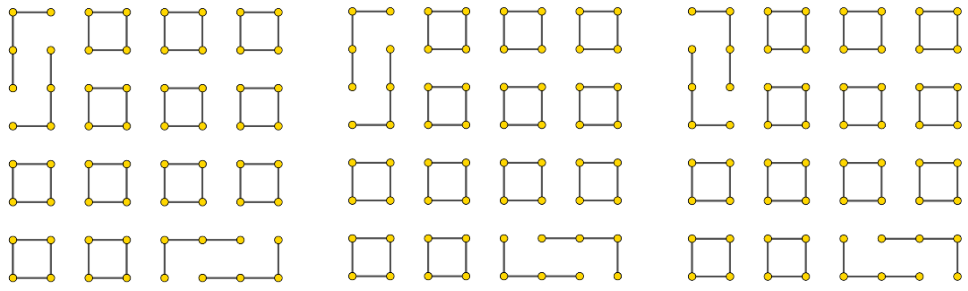
1.拼片的分布成線對稱圖形，且對稱軸通過封閉長方形，我們完成的拼法如下：

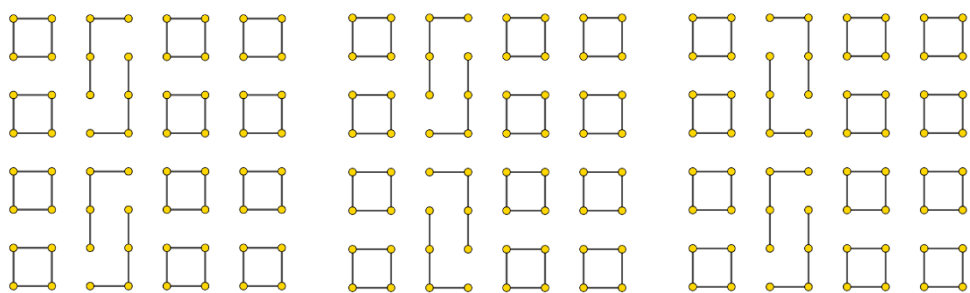


由上面圖形可以知道有 8 種拼法。

2.拼片的分布成線對稱圖形，且對稱軸不通過封閉長方形，我們完成的拼法如下：

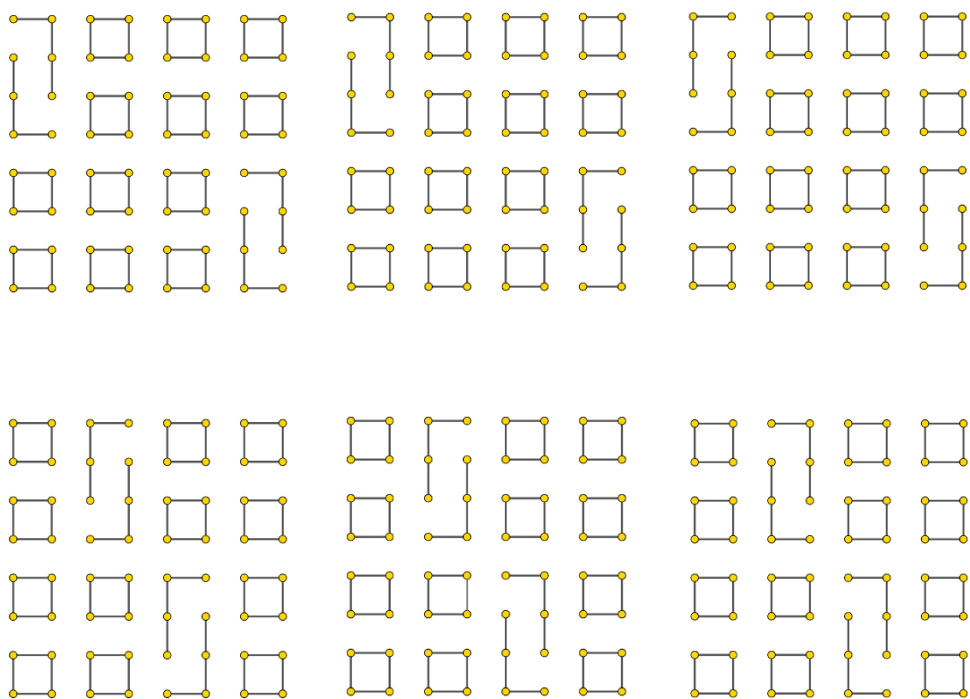






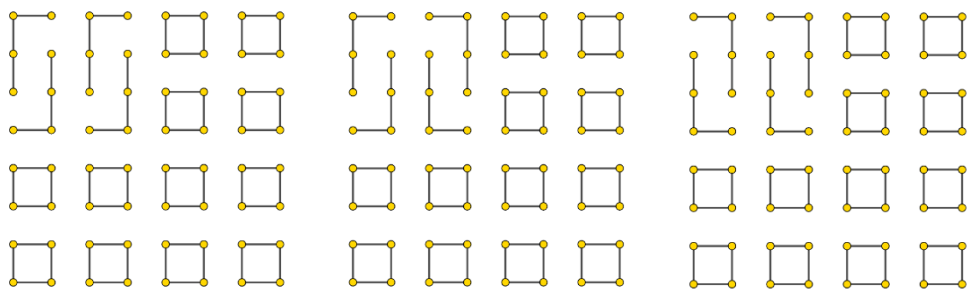
由上面圖形可以知道有 18 種拼法。

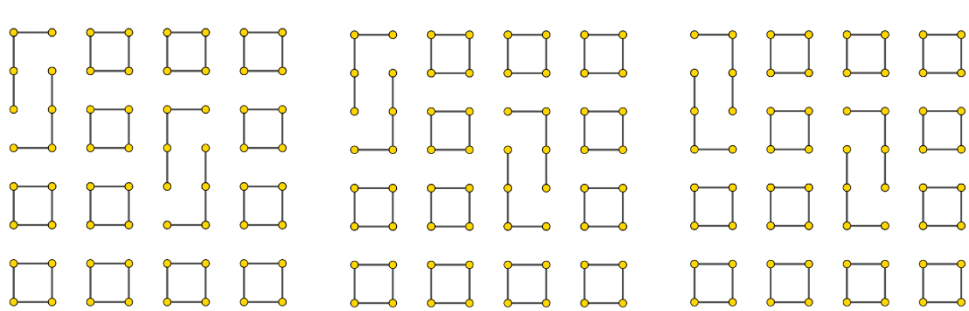
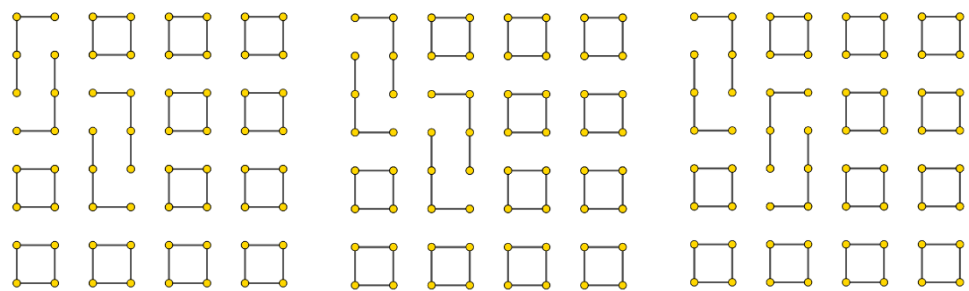
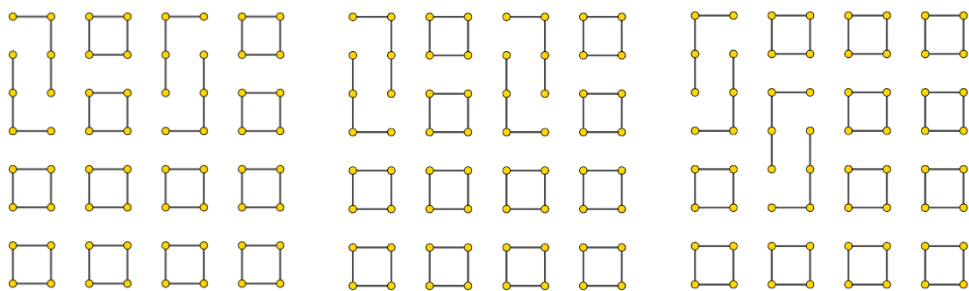
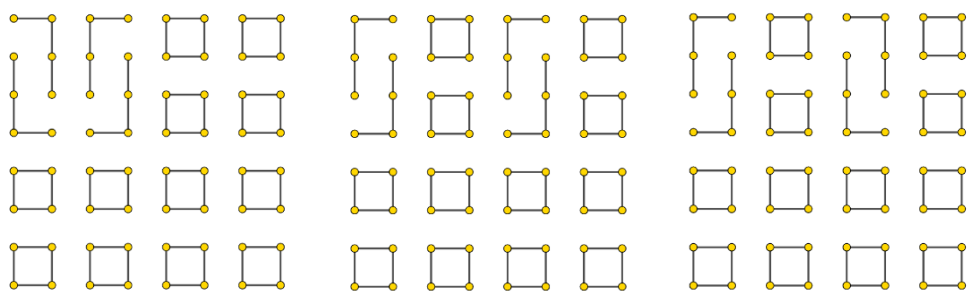
3. 拼片的分布成點對稱圖形，我們完成的拼法如下：

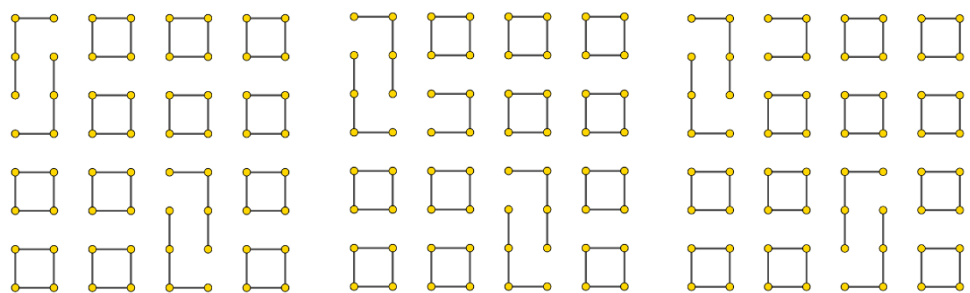
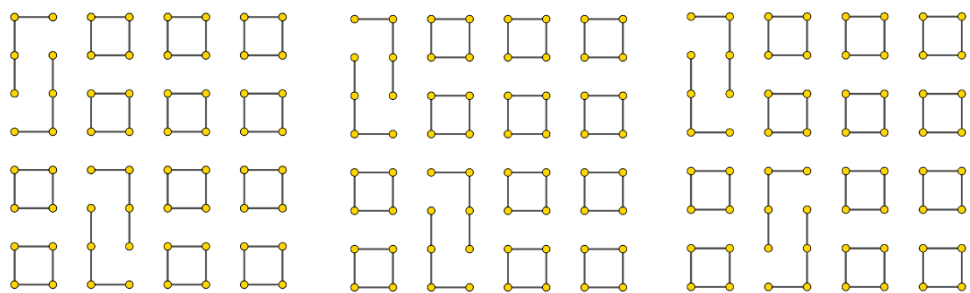
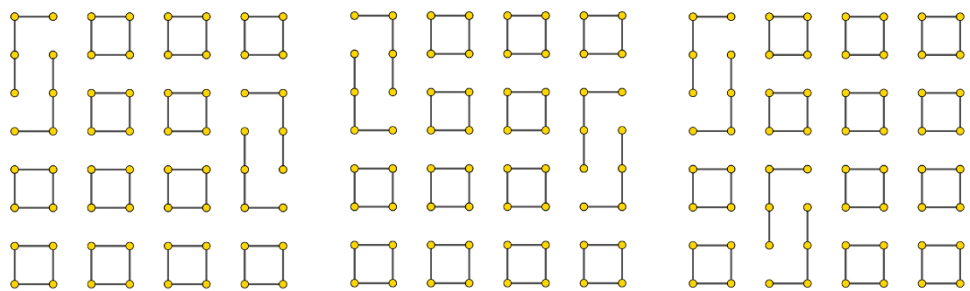
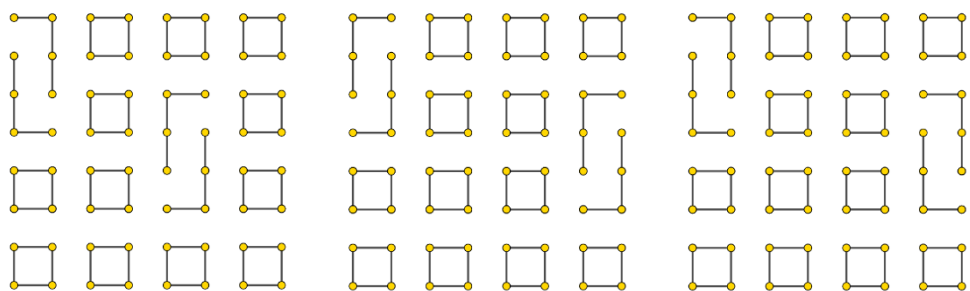


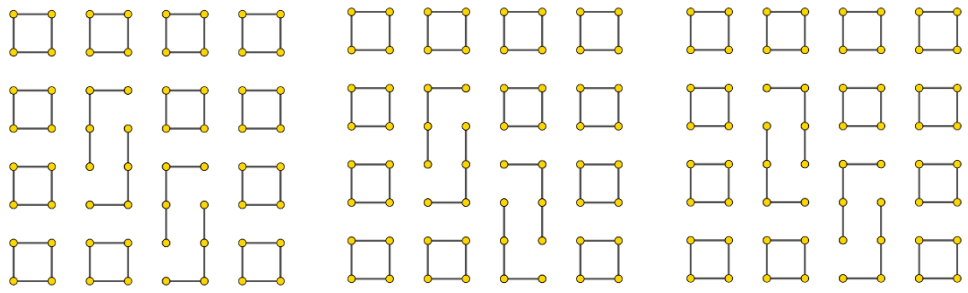
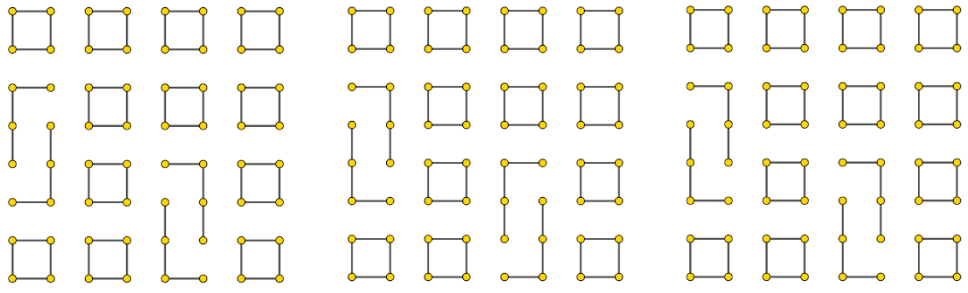
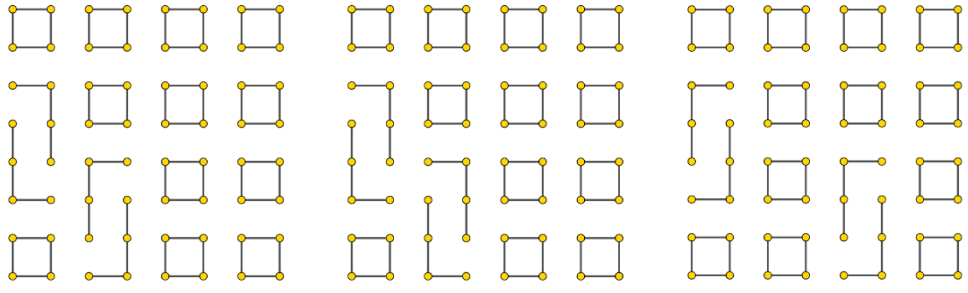
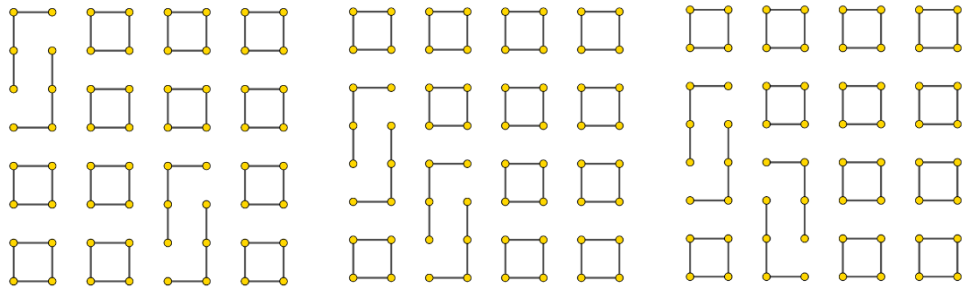
由上面圖形可以知道有 6 種拼法。

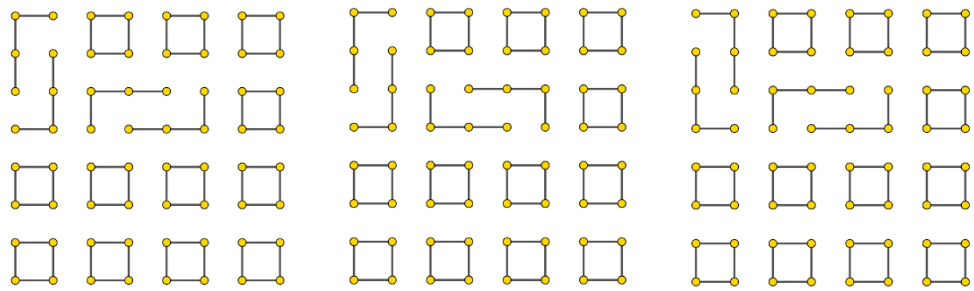
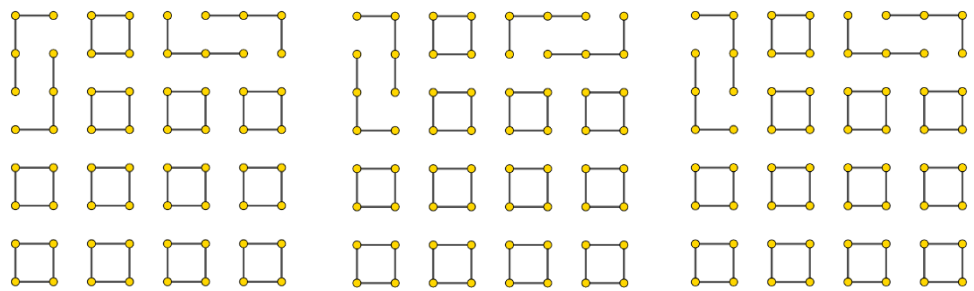
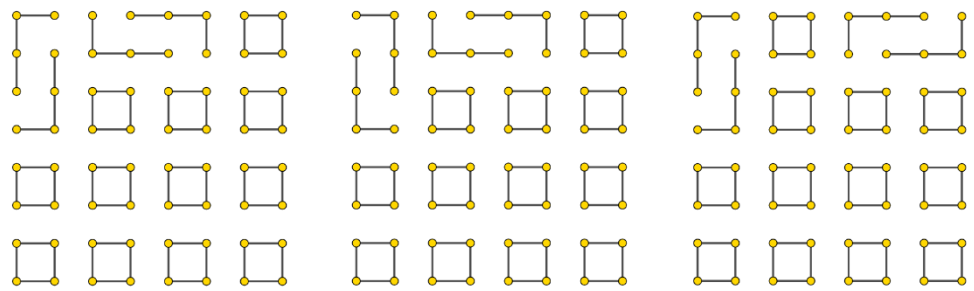
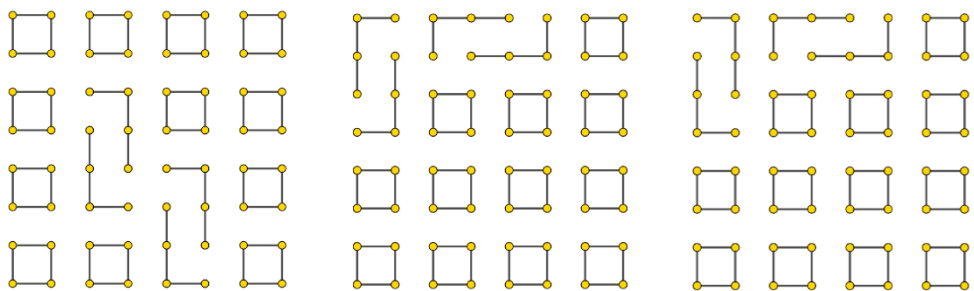
4. 拼片的分布不對稱，我們完成的拼法如下：

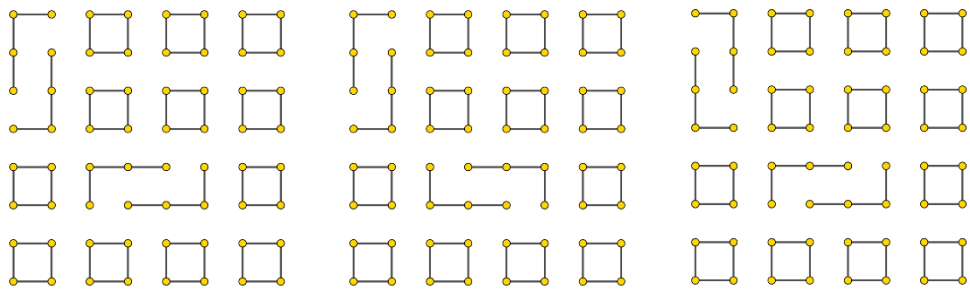
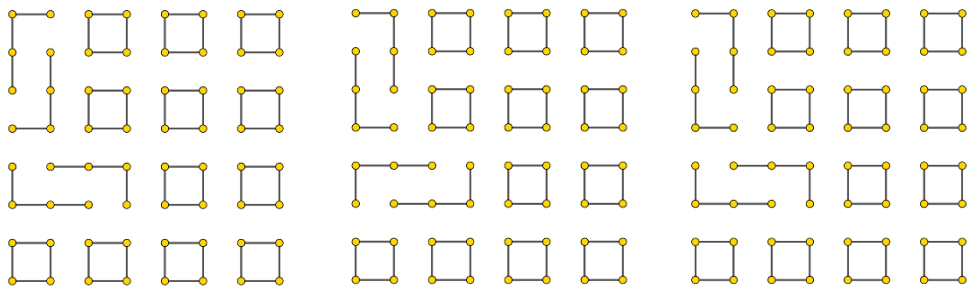
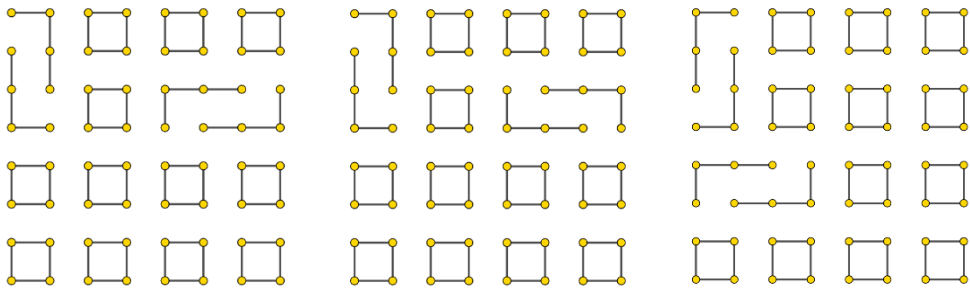
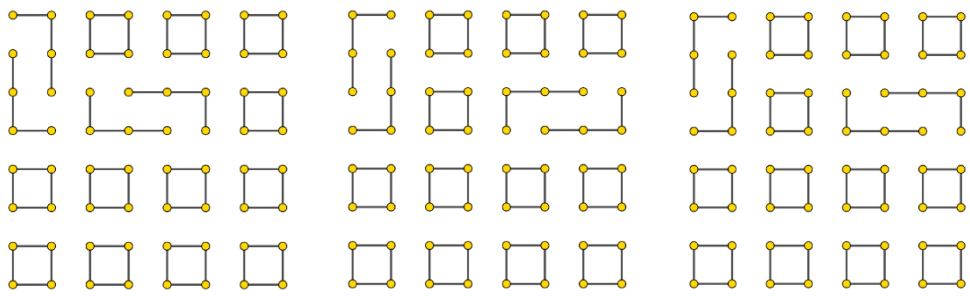


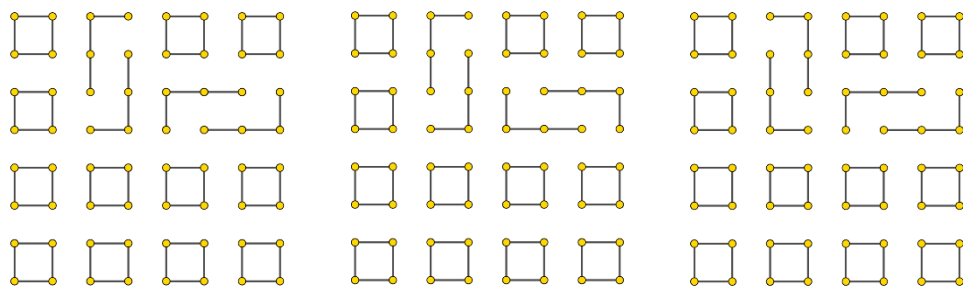
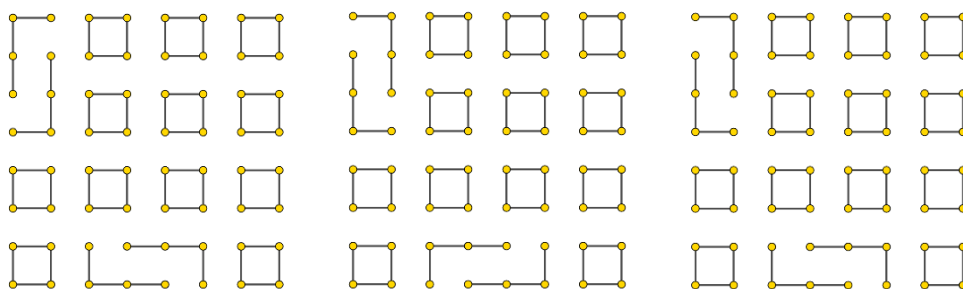
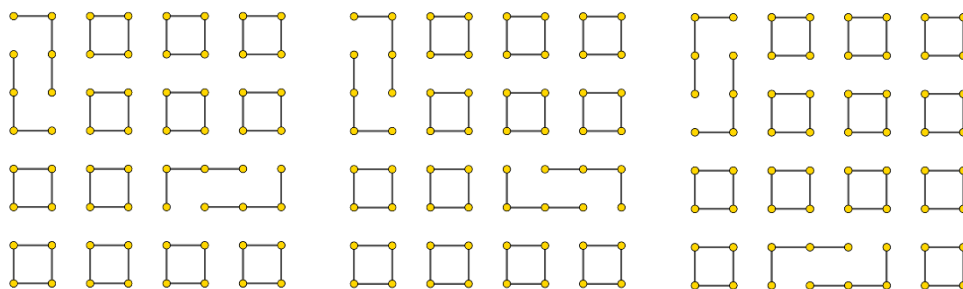
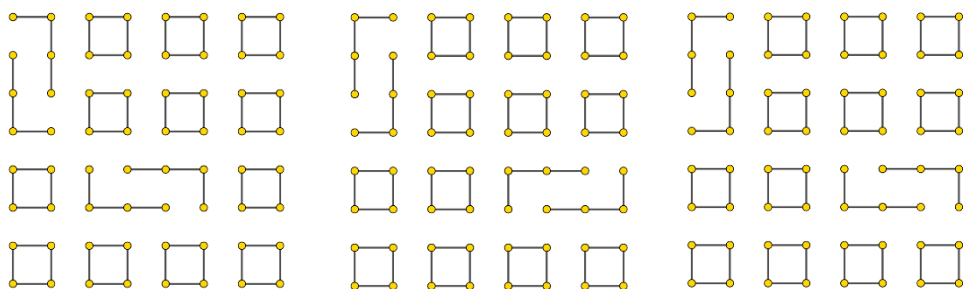


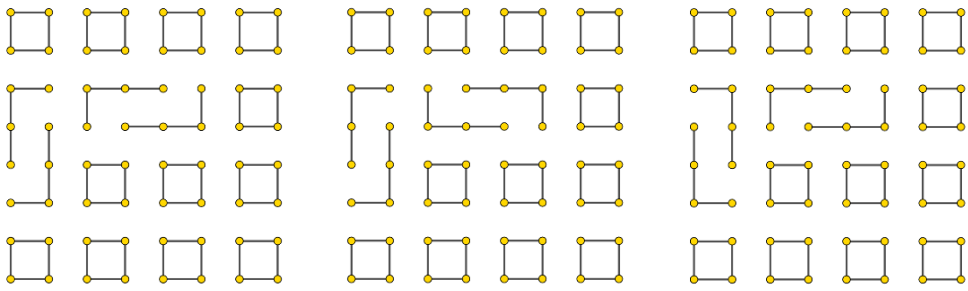
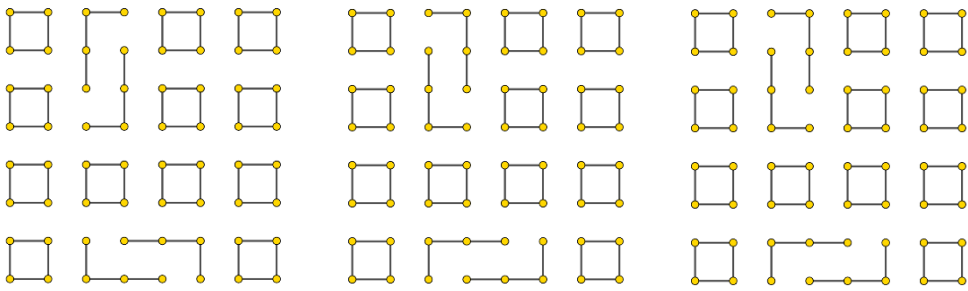
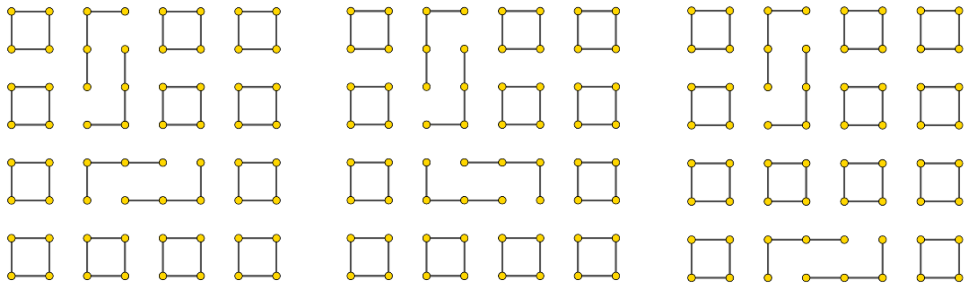
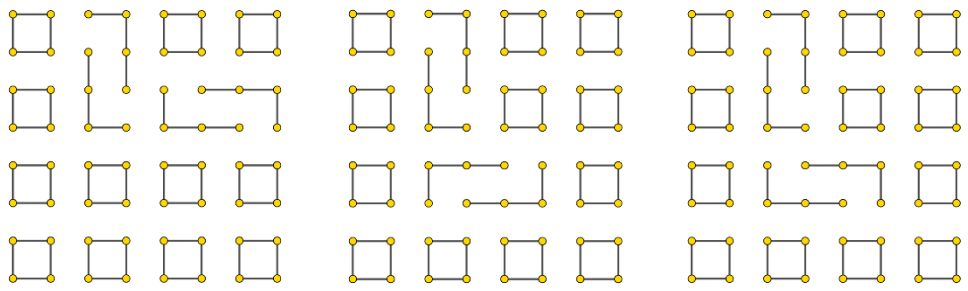


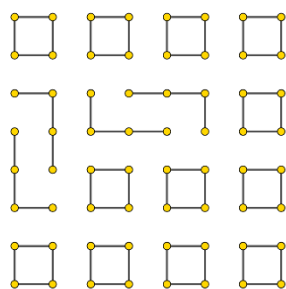






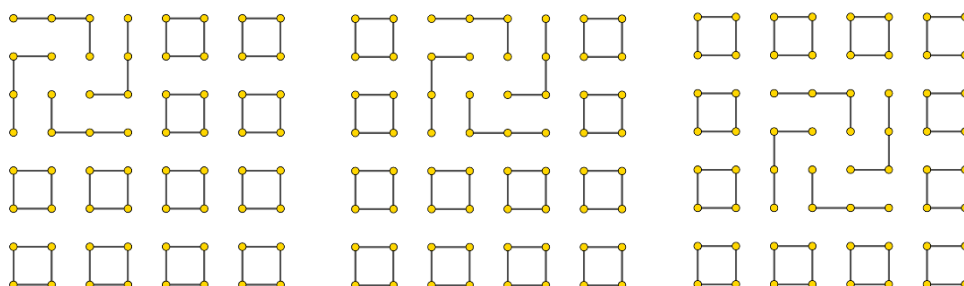






由上面圖形可以知道有 88 種拼法。

5.L 拼片拼成 4x4 的正方形，我們完成的拼法如下：



由上面圖形可以知道有 3 種拼法。

小結：由 1.到 5.的結果，我們可以知道共有 $8+18+6+88+3=123$ 種拼法。

(三)當 $(c, d)=(6, 10)$ ，尚未找出全部拼法。

(四)當 $(c, d)=(8, 8)$ ，尚未找出全部拼法。

(五)當 $(c, d)=(10, 6)$ ，尚未找出全部拼法。

(六)當 $(c, d)=(12, 4)$ ，尚未找出全部拼法。

(七)當 $(c, d)=(14, 2)$ ，尚未找出全部拼法。

小結：由(一)到(七)的結果，我們目前可以歸納出共有 $6+123=129$ 種拼法。

肆、研究結果

一、如果用 16 個 T 拼片拼成 8×8 的大正方形，有幾種拼法？

【結果 1】：全部共有 15 種拼法。

二、如果用 a 個 T 拼片加上 b 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形， (a, b) 可以是多少？有幾種拼法？

【結果 2】：(一)當 $(a, b)=(4, 12)$ ，有 3 種拼法。

(二)當 $(a, b)=(8, 8)$ ，有 12 種拼法。

(三)當 $(a, b)=(12, 4)$ ，有 16 種拼法。

全部共有 31 種拼法。

三、如果用 c 個 L 拼片加上 d 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形， (c, d) 可以是多少？有幾種拼法？

【結果 3】：(一)當 $(c, d)=(2, 14)$ ，有 6 種拼法。

(二)當 $(c, d)=(4, 12)$ ，有 123 種拼法。

(三)當 $(c, d)=(6, 10)$ ，尚未完成全部拼法。

(四)當 $(c, d)=(8, 8)$ ，尚未完成全部拼法。

(五)當 $(c, d)=(10, 6)$ ，尚未完成全部拼法。

(六)當 $(c, d)=(12, 4)$ ，尚未完成全部拼法。

(七)當 $(c, d)=(14, 2)$ ，尚未完成全部拼法。

目前共有 129 種拼法。

伍、討論

我們的研究目前已經完成 16T、4T12O、8T8O、12T4O、2L14O 和 4L12O 的拼法，但由於研究時間有限，再加上 L 拼片的拼法非常複雜，將來會繼續完成 6L10O、8L8O、10L6O、12L4O 和 14L2O 的拼法，使我們的研究內容更加完整。

陸、結論

關於「一塊拼，兩塊拼」這個題目，首先，我們找出用 16 個 T 拼片拼成 8×8 的大正方形，全部共有 15 種拼法。接著，我們找出用 4 個 T 拼片加上 12 個 O 拼片、8 個 T 拼片加上 8 個 O 拼片、12 個 T 拼片加上 4 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形，全部共有 31 種拼法。最後，我們找出用 2 個 L 拼片加上 14 個 O 拼片、4 個 L 拼片加上 12 個 O 拼片拼成 8×8 的大正方形，目前共有 129 種拼法。將來，我們會繼續努力找出其他尚未完成的拼法。

柒、參考文獻資料

- 一、游森棚(2023) • 森棚教官的數學題——一塊拼，兩塊拼 • 科學研習雙月刊，62(5)。
- 二、D.W.Walkup(1965) • Covering a Rectangle with T-Tetrominoes • The American Mathematical Monthly，72，986-988.
- 三、Michael Korn、Igor Pak (2004) • Tilings of Rectangles with T-Tetrominoes • Theoretical Computer Science，319，3-27.