屏東縣第65屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：「建」橋大學問

關 鍵 詞：益智、邏輯思維、數學遊戲（最多三個）

編號： B1011

製作說明：

1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。

2.編號：由承辦學校統一編列。

3.封面編排由參展作者自行設計。(←←←←←灰字請自行刪除)

建橋大學問

摘要

數學除了課本上的知識外，其實有很多的數學迷題和數學遊戲，比起研讀課本，這些醫關一關的遊戲更引人入勝一些，數學老師在上課時常常告訴我們，數學有很多的面向，小到四則運算，大到日常生活的邏輯推理都是屬於數學的範疇。經由老師的介紹，我們接觸到了「數橋」這個數學迷題，透過簡單的幾個數字，就可以做出和「數獨」一樣一題又一題的題目，然而簡單的規則蘊含了許多跟數學相關的推理，我們才發現原來許多題目裡的「原則」都和數學有關，原來數學也可以有這麼多的變化！

壹、　前言

在某次的數學課程中，老師介紹了幾款適合做為休閒的數學遊戲，其中最引起我們興趣的是「數橋」，透過簡單的幾個數字，就可以讓玩家傷透腦筋。

可能是因為大家第一次接觸到這種謎題，班上同學看到題目之後都不知道該從何下手，面對零散的數字而且沒有任何提示的題目，腦袋裡一片空白，經由老師講解了一些最基本的解題技巧後，大部分同學輕鬆地解出了簡易難度的題目，因此老師將難度上升一級，我們開始有了很多的疑惑，在使用完老師講的最基本技巧之後，仍然有一部分的島不知道該怎麼進行連接，直到老師又給了一些小提示，我們才漸漸理解到題目背後更多可以思考的東西。

到了這個階段，已經有許多的同學已經開始感到吃力了，有些人連接後會出現違反規則的連接方式，有些人又回到了第一次看到題目時的樣子：腦袋一片空白。

在遊玩的過程中，我們漸漸發現並不是只有簡單的幾項原則就可以解完全部的題目，而且好像有一定的規律可以統整，因此我們決定來找找是不是可以透過一些方式，讓解開數橋題目就跟魔術方塊一樣，可以不用透過邏輯，而是透過「背公式」的方式來解題，讓對邏輯思考比較苦手的人也可以享受數學遊戲的樂趣！

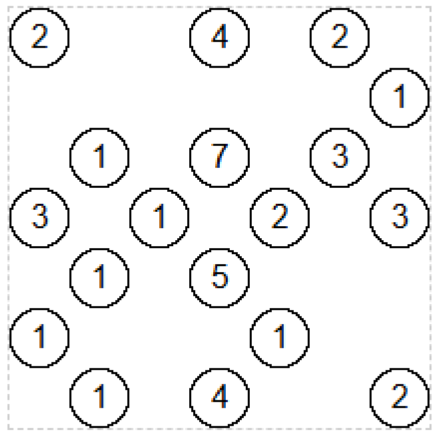
貳、　研究設備及器材

紙、筆、電腦

參、 研究過程或方法

一、 數橋的基本介紹

數橋是一款來自於日本的數學遊戲，原名為「橋をかけろ」，直接翻譯為「架設橋梁」，題目會被限制在一個矩形內，而矩形內會有數個帶有數字的圓圈圈，這些圈圈就像是一座「島」，玩法就和這個遊戲的名字一樣，玩家要想辦法利用「橋」把這些島連接起來，並用幾個簡單的限制讓題目更有難度。



難度為 Very easy 的數橋題目

二、 了解數橋的基本玩法

在研究一開始，我們列出了數橋的基本規則，並從基本規則中分析解題方式，打算先從解題的技巧找到解題的規律

(一) 遊戲中的要素

數橋的題目由許多寫著數字的圓圈構成，這個圓圈被稱為「島」，圓圈內的數字代表著這座「島」上會有幾座與其他島連接的「橋」，而玩家的目標就是要在每座島之間繪製直線作為「橋」。

(二) 「橋」的限制

玩家在繪製連接島的橋時有幾個限制：

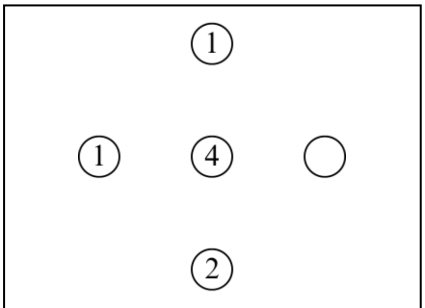
1. 橋只能是水平線或垂直線，不可斜向連接。
2. 橋之間不可交錯。
3. 兩的島之間最多只能有兩座橋。
4. 任意兩個島之間都必須彼此互通。

三、 統一記錄方式

為了能夠更容易紀錄每種特殊情況，我們統一了各種元素及情況的簡易寫法：

(一) 島：將島的數值用圓圈圈起來，例如：①、②、③…等。如果一座島在要討論的情況中並不需要在意其數值，紀錄為○。

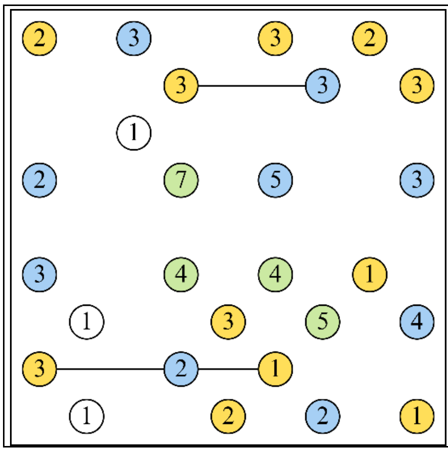
(二) 可連接島：將主要要討論的島寫於第 1 位，其他這座島可以連接的島用「-」隔開，並由大到小排列，不需顧慮數值的島放在最後，例如：該項主要探討④的島，該座島附近有兩座①、一座②和一座任意數值的島可以連接，記為④-②-①-①-○。



④-②-②-①-○的實際範例

(三) 島的命名：為了更好紀錄結果，我們將主要討論的島固定命名為 O 島，除了主要島外的其他島由大到小用英文字母代稱，並且從 A 開始依序標示。例如：④-②-②-①中④為本島、第一座②稱為 B 島、第二座②稱為 C 島、①稱為 D 島。

(四) 島的位置：每座島在題目中必定會落在「單向」、「角落」、「邊上」或「中央」，如果只有一個方向可以連接，我們稱這座島位於「單向」；如果只有兩個方向可以連接，我們稱這座島位於「角落」；如果有三個方向可以連接，我們稱這座島位於「邊上」；如果有四個方向可以連接，我們稱這座島位於「中央」。而我們所提到的「可以連接」除了島的水平方向及垂直方向相鄰的島外，由於橋之間不可以交錯，因此島本身也可能因為其他島間橋的連接導致減少可以連接的數量，造成原本在中央的島可能會因為其中一側有其他島之間的橋而成為邊上的島。



左圖中

白色的島有一座島能連接，故稱為位在「單向」；

黃色的島有兩座島能連接，故稱為位在「角落」；

藍色的島有三座島能連接，故稱為位在「邊上」；

綠色的島有四座島能連接，故稱為位在「中央」。

(五) 橋的寫法：將用來代稱兩座島的英文字母寫在一起，代表連接兩座島的橋，例如：

OA 代表連接 O 島和 A 島之間的橋。

四、 基本的解題技巧

了解整個遊戲的遊玩規則後，我們歸納出了在遊戲中會用到的技巧：

(一) 會出現唯一解情況：

1. 單向的島：

由於位在單向的島只有一個方向能連接，因此只有一種連接方式。

2. 滿橋定律：

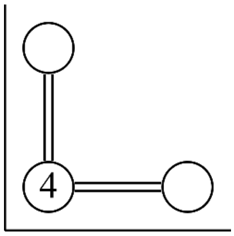
如果島所在的位置有 n 個可連接的方向，而且島的數字剛好是 $2n$ 時，我們將它取名為「滿橋定律」，會達成這種條件的可能性有四種：

(1) 單向的②：

位在單向的島只有一個方向能連接，而②的情況正好符合我們對於滿橋定律的定義，因此將其放入滿橋定律的範疇。

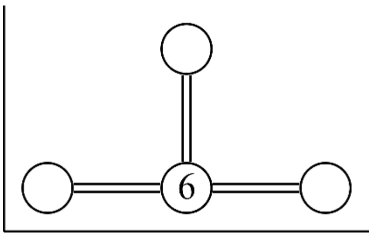
(2) 角落的④：

任何位於角落的島只有兩個方向可以與其他島相連，而規則中島與島連接的橋最大數量為 2，因此位在角落的④僅有一種可能，就是與 2 個方向的島各用 2 座橋連接。



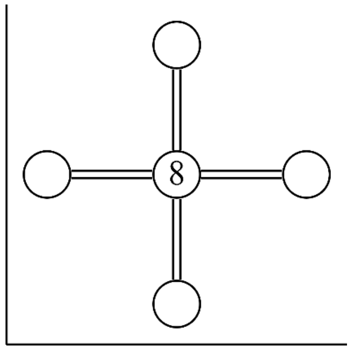
(3) 邊上的⑥：

任何位於邊上的島有三個方向可以與其他島相連，而規則中島與島連接的橋最大數量為 2，因此位在邊上的⑥僅有一種可能，就是與 3 個方向的島各用 2 座橋連接。



(4) 中央的⑧：

任何位於中央的島有四個方向可以與其他島相連，而規則中島與島連接的橋最大數量為 2，因此位在中央的⑧僅有一種可能，就是與 4 個方向的島各用 2 座橋連接。

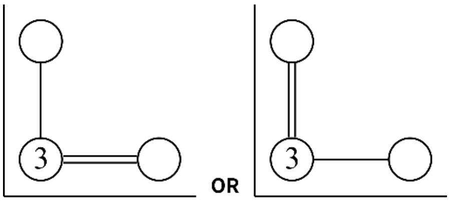


(二) 保底連接：

如果島的位置可連接的方向有 n 個，而且島上的數字是$(2n-1)$時，這種情況可以先在可連接的方向各接上一座橋，我們將這種情況取名為「保底連接」。

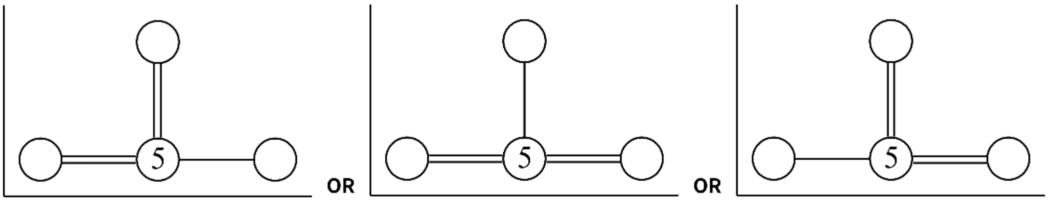
1. 角落的③：

位於角落的③只有 2 個方向可以與其他島相連，即使 OA 用了 2 座橋連接，還會剩 1 座橋要消耗，因此 OB 至少需要 1 座橋；反之即使 OB 用了 2 座橋連接，還會剩 1 座橋要消耗，因此 OA 至少需要 1 座橋，所以不管如何連接，OA 與 OB 都至少會有 1 座橋，因此可以先把位於角落的③往兩個方向的島都各連接一座橋。



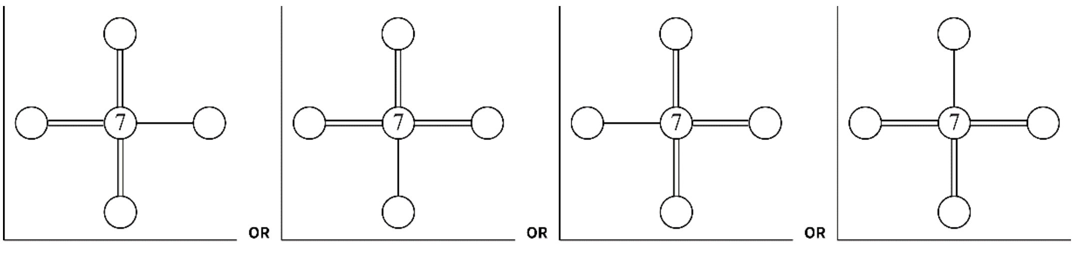
2. 邊上的⑤-○-○-○：

位於邊上的⑤有 3 個方向可以與其他島相連，假設 OA 用了 2 座橋連接，就會形成等同於「角落的③-○-○」，而如果是



3. 中央的⑦-○-○-○-○：

位於中央的⑦有 4 個方向可以與其他島相連，假設這座島與 A、B、C 這 3 座島都用 2 座橋連接，則必定還會需要一座橋往 D 島連接，因此可以先把位於中央的⑦往四個方向的島都各連接一座橋。



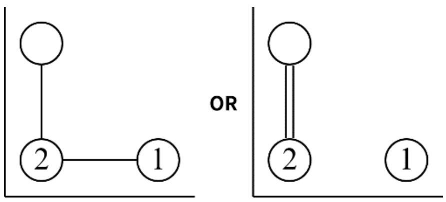
五、 進階的解題技巧

(一) 滿橋定律的延伸

如果將滿橋定律進行延伸，在可連接的島中增加一座①，此時會發現這些情況成為了不定解。遇到這樣的島時，我們可以先假設主島與①已經用 1 座橋連接，那主島剩下的橋數與剩下的方向數，正好符合保底連接的其中一種情況：

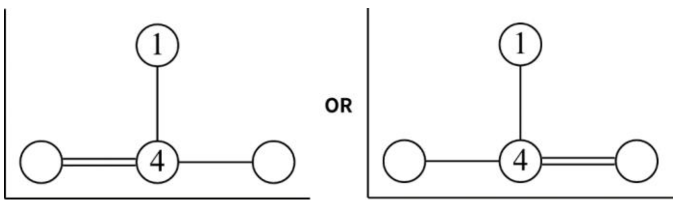
1. ②-①-○：

   從單向的②進行延伸，假設 *OA* 已經用 1 座橋連接，那仍然會剩 1 座橋需要連接 *OB*，所以不論如何，*OB* 之間至少都會有一座橋，可以先將 2 座島用 1 座橋連接。



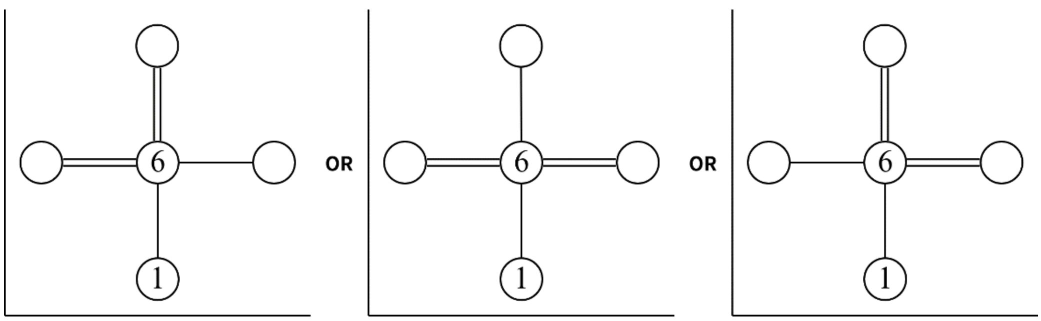
2. ④-①-○-○：

   從邊上的④進行延伸，假設 *OA* 已經用 1 座橋連接，那剩餘的橋數為 3、可連接方向數為 2，這種情況與保底連接中「角落的③」相同，因此可以先在 *OB* 和 *OC* 都先用 1 座橋連接。



3. ⑥-①-○-○-○：

   從角落的⑥進行延伸，假設 *OA* 已經用 1 座橋連接，那剩餘的橋數為 5、可連接方向數為 3，這種情況與保底連接中「角落的⑤」相同，因此可以先在 *OB*、*OC* 和 *OD* 都先用 1 座橋連接。

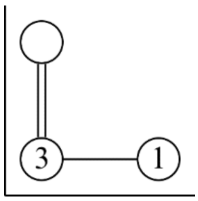


(二) 被限制的保底連接-一橋定局

在保底連接中，所有的連接方法都是有其中一座島用一座橋連接，其餘的島都是用兩座橋連接，會有不確定的連接方式就是因為不確定唯一一座只有用一座橋連接的島是哪一座，因此如果在可連接的島中有一個正好是①，那會讓原本不確定的方向被定下來。由於是藉由①的島讓不定解成為固定解，我們將它命名為「一橋定局」

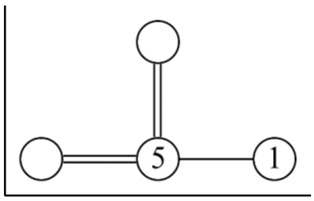
1. ③-①-○：

   原本在角落的③因為不確定哪一座島會只需要一座橋，而在①的限制下直接確定了 OA 之間只能用 1 座橋連接，因此成為固定解：



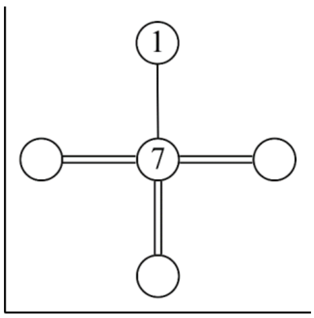
2. ⑤-①-○-○：

   原本在邊上的⑤因為不確定哪一座島會只需要一座橋，而在①的限制下直接確定了 OA 之間只能用 1 座橋連接，因此成為固定解：



3. ⑦-①-○-○-○：

   原本在中央的⑦因為不確定哪一座島會只需要一座橋，而在①的限制下直接確定了 OA 之間只能用 1 座橋連接，因此成為固定解：



(三) 一橋定局的限縮

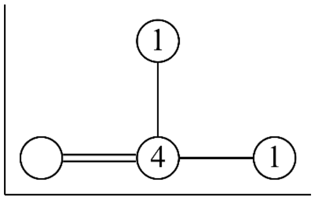
透過一橋定局，我們將每一個情況的主島所需要的橋數降低，並且用更多的①將它限制連接方向，也可以造成只會出現一個連接方法的情況。

1. 邊上的②-①-①：

從③-①-○做限縮，如果降階成②-①-①，唯一的連接方式會使 *O*、*A*、*B* 都成為孤島，因此題目不會出現這樣的狀況。

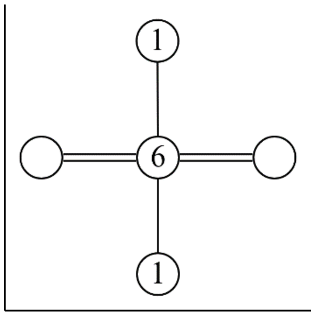
2. 邊上的④-①-①-○：

從⑤-①-○-○做限縮，④位於邊上，且其中 2 座島用①限制，由於 *OA*、*OB* 都只能用 1 座橋連接，因此只會有一種連接方式：



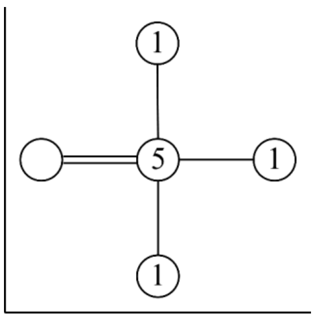
3. 中央的⑥-①-①-○-○

從⑦-①-○-○-○做限縮，⑥位於中央，且其中 2 座島用①限制，由於 *OA*、*OB* 都只能用 1 座橋連接，因此只會有一種連接方式：



4. 中央的⑤-①-①-①-○：

再從中央的⑥-①-①-○-○做限縮，⑤位於中央，且其中 3 座島用①限制，由於 *OA*、*OB*、*OC* 都只能用 1 座橋連接，因此只會有一種連接方式：

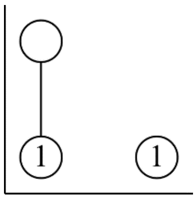


(四) 救援連接

在遊戲規則中，每座島之間都必須彼此互通，也就是說從任何一座島出發，都要可以到達其他任何一座島，如果沒辦法達成這件事，我們就稱為「孤島」。接下來會列出一些常見會形成孤島的狀況，然而一個有解的題目在遇上這種情況時，一定會讓 *O* 島有其他島可以連接來避免被迫只能成為孤島的狀況，因為多出來的那座島讓人有一種是為了解救成為孤島的情況，因此我們將它取名為「救援連接」。

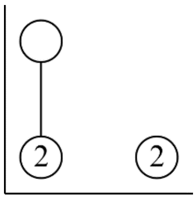
1. ①-①-○島：

   如果將 *OA* 相連，會讓 *O*、*A* 兩座島成為孤島，這時候只能讓 *OB* 相連。



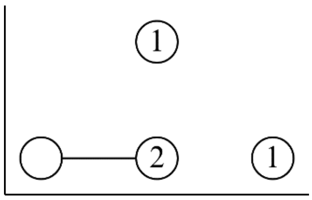
2. 角落②-②-○：

   當②位於角落，假設 *OA* 已經用 2 座橋連接，此時會讓 *O*、*A* 兩座島成為孤島，因此必須有至少一座橋要與 *B* 連接。



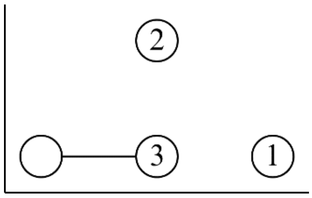
3. ②-①-①-○：

   當一座②旁邊出現 2 座①時，不可出現 *OA* 和 *OB* 都各 1 座橋的連接，否則會讓 *O*、*A*、*B* 三座島成為孤島，因此必須有至少一座橋要與 *C* 連接。



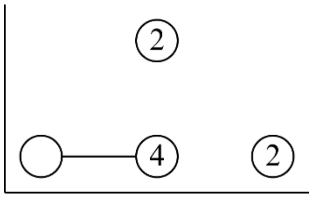
4. ③-②-①-○：

當一座③旁邊出現一座②和一座①時，不可出現 *OA* 兩座橋、*OB* 一座的連接，否則會讓 *O*、*A*、*B* 三座島成為孤島，因此必須要有一座橋與 *C* 連接。



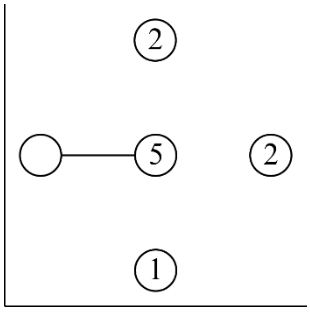
5. ④-②-②-○：

當一座④旁邊出現兩座②時，不可出現 *OA* 和 *OB* 各兩座橋的連接，否則會讓 *O*、*A*、*B* 三座島成為孤島，因此必須要有一座橋與 *C* 連接。



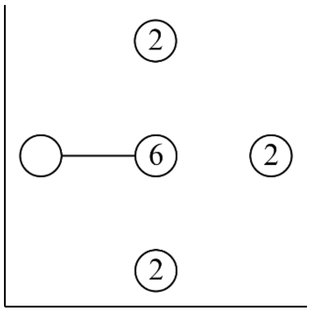
6. ⑤-②-②-①-○：

當一座⑤旁邊出現兩座②和一座①時，不可出現 *OA*、*OB* 各兩座橋、*OC* 一座的連接，否則會讓 *O*、*A*、*B*、*C* 成為孤島，因此必須要有一座橋與 *D* 連接。



7. ⑥-②-②-②-○：

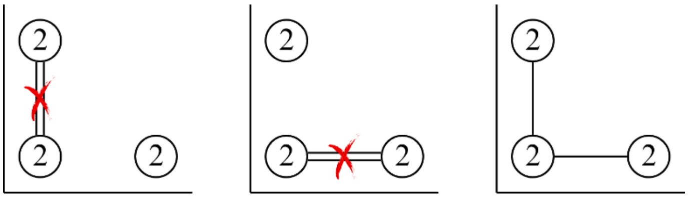
當一座⑥旁邊出現三座②時，不可出現 *OA*、*OB*、*OC* 各兩座橋的連接，否則會讓 *O*、*A*、*B*、*C* 成為孤島，因此必須要有一座橋與 *D* 連接。



(五) 其他特殊的連接方式

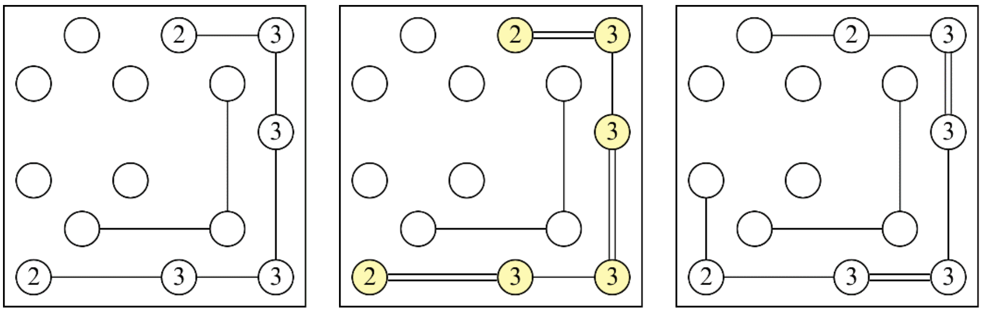
1. 角落②-②-②：

當出現這種情況時，不論往哪個方向搭兩座橋都會成為孤島，因此只有一種解決方式，就是往兩個方向各搭一座橋。



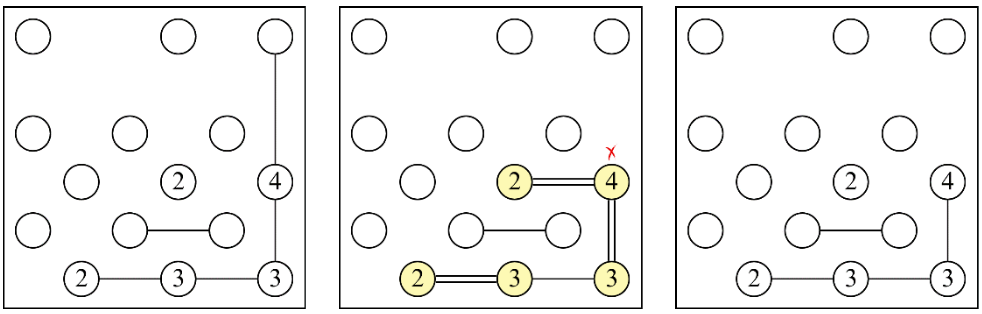
2. 串聯型②、③：

當出現開頭和結尾都是②，中間有偶數個③串聯時，很容易出現孤島，只要是這種情況，②不會向內部連接：



3. 滿橋定律的應用

以下列情況的④來說，我們可以假設它不往上連接，此時會讓這座④成為滿橋定律中「角落的④」，依照其他技巧繼續連接後，會發現這樣的連接方式會讓右下角的島群成為孤島，因此假設錯誤，④必須有至少一座橋往上連接。



肆、　研究結果

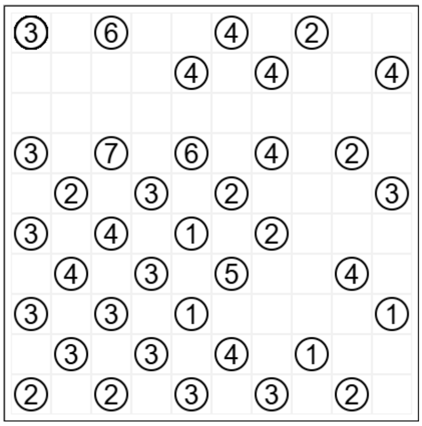
把解題技巧列出後，我們發現可以把解題的技巧分為兩種類型，分別是可以直接確定連接方式的固定解，像是「滿橋定律」和「一橋定局」；另一種是只能先寫出可能性，需要再藉由後續的解題進度地推進來得到正確的結果，例如「保底連接」和「救援連接」。

雖然我們歸納出了許多特殊的情況可以用來快速判斷島與島之間應該如何連接，只要好好觀察題目中哪些地方有符合歸納出的情況，就可以直接確定島的連接方式，但我們發現這些對照大部分對於島的數值和島的位置有非常大的限制，除此之外，很多的情況需要藉由①和②來給出限制，才能確定大部分的連接方式。

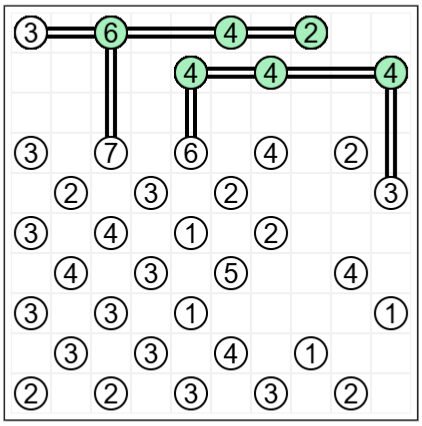
如果是一開始比較簡單的難度，透過以上的方法就可以解決幾乎全部的題目，但當老師帶我們玩到中等難度時就沒有這麼簡單了，可以連接的方向越來越多，並且都是③以上的島，越來越多無法對照的情況，因此我們開始思考是不是可以有另外一個理論可以讓玩家更好理解。

伍、　討論

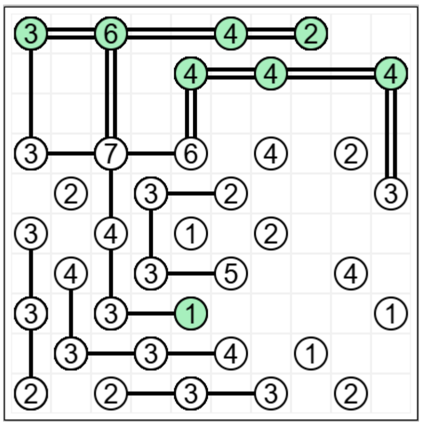
一、依照解題所累積下來的經驗，我們嘗試歸納出了整個解題流程，以下方簡單難度的題目為例：



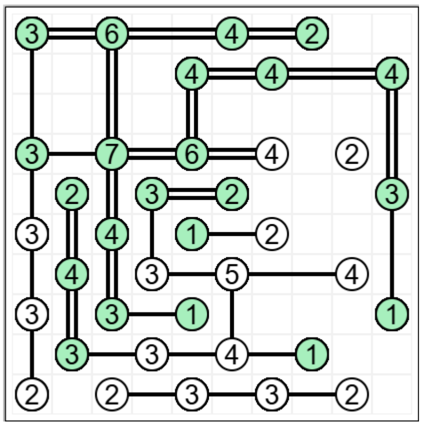
首先，我們利用「滿橋定律」，找到指定位置的②、④、⑥、⑧，並進行連接。



接著使用「保底連接」，找到指定位置的③、⑤、⑦，並將可能解進行連接。



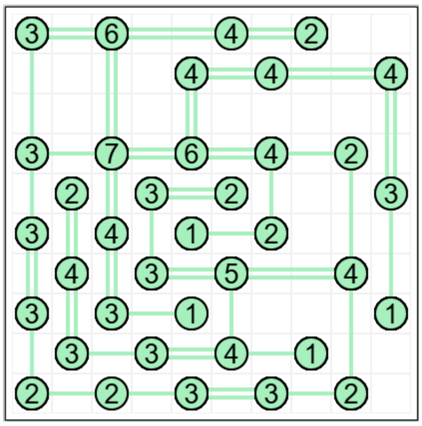
接下來我們需要不斷重複(一)和(二)，因為經由這兩個步驟之後，畫面上會有越來越多的橋，此時可能會使島的位置因為被橋擋住，或是可能因為某些島的連接數已滿，導致其他島可以連接的方向數量下降。



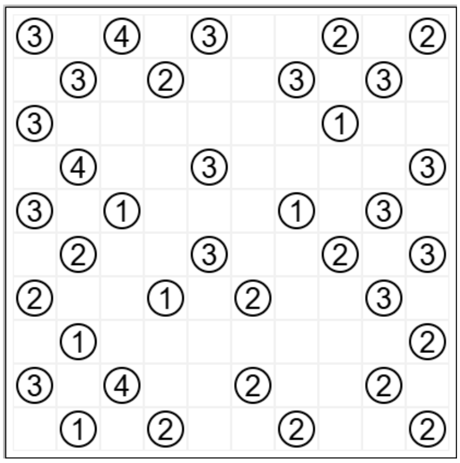
到了這個步驟，我們發現已經沒有符合我們列出來的情況可以直接代入了，但其實有很多很明顯可以連接的地方，例如位於題目中央的③-③-⑤，幾乎已經可以確定③要跟⑤做連接，而我們想到一個方式，可以使幾乎所有狀況都可以代入我們所列出的解法。

我們可以把中央的③-③-⑤換個方式看，*OA* 之間因為 *A* 已經搭完所有可以使用的橋，我們可以將 *A* 從 *O* 可以連接的島選項中移除，並且把已經連上的島也從 *O* 可以使用的橋數量中移除，也就是說原本的③-③-⑤會成為②-⑤，此時可以直接套用「單向的②」，直接用兩座橋連接②和⑤。

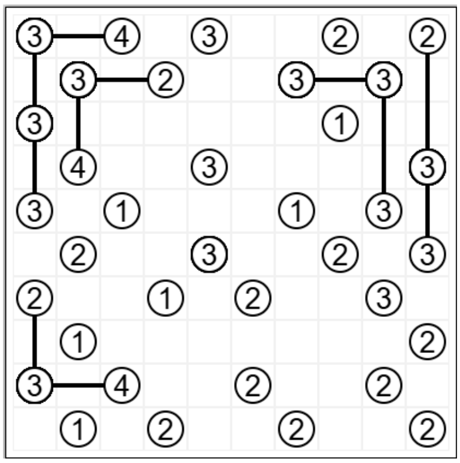
利用上述的技巧，我們可以將其它島也進行簡化後進行連接，就可以將全部的島連接完成：



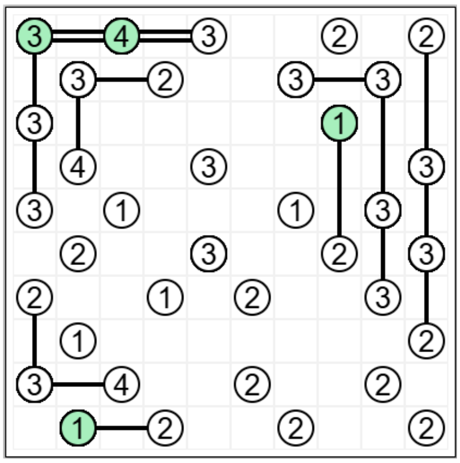
二、接著我們開始使用中等難度的題目進行測試：



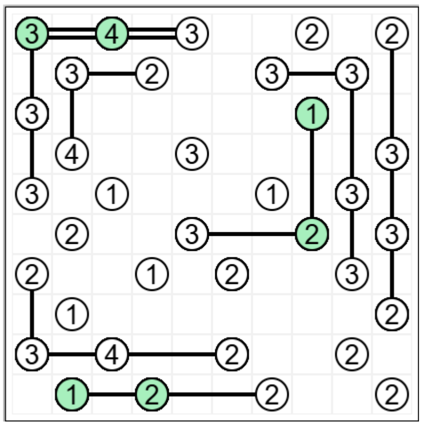
我們發現到了中等難度，已經沒有辦法透過「滿橋定律」連接②、④、⑥、⑧與四周的島，因此直接跳往下一步。因此直接使用「保底連接」進行解題：



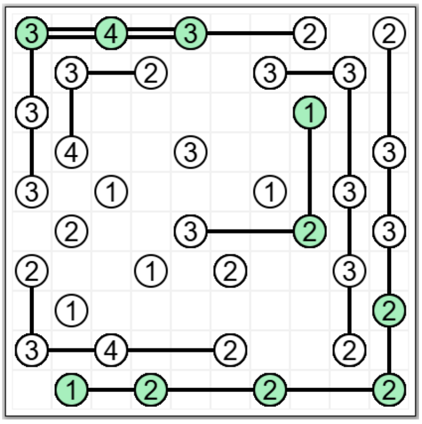
由圖可知，甚至連用「保底連接」可以連接的可能性也非常少，接著我們開始重複「滿橋定律」和「保底連接」兩個技巧：



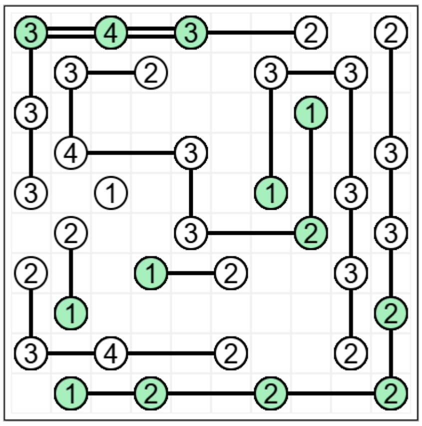
下一步我們使用「滿橋定律」的延伸技巧，連接一些可能的方向



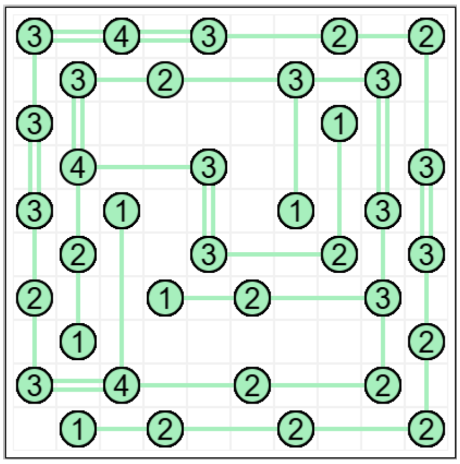
經觀察後發現，已經沒有符合「滿橋定律」和「保底連接」的島，「一橋定律」的結果也都不符合，因此我們接下來使用「救援連接」:



再次進行「滿橋定律」和「保底連接」來將那些因為橋而把方向擋住的島嘗試進行連接：



最後，我們使用簡化的技巧，並對照上述使用的技巧進行連接：



陸、　結論

在解題的過程中，我們發現會非常經常需要如何使用「排除法」和「假設」，題目中通常會藉由橋的連接讓原本位於中央的島成為邊上的島、讓邊上的島成為角落的島、再讓角落的島成為單向的島，也會因為消耗掉橋的數量，讓島可以視為數值更低的島，難度較高的題目甚至會需要先假設某兩座島如果連接，會出現什麼樣的可能性，連接到最後可能會違反規則，就可以得知兩座島無法像假設的結果那樣連接，藉此找到線索來讓解題進度推進。

經過對於數橋的探究，雖然我們歸納出一套標準的解題原則，但是其實在解題的過程中，每一項技巧都是交互使用的，而不是一個步驟接著一個步驟在處理，雖然一樣可以解開謎題，但很容易忽略掉更好判斷連接的位置，因此我們覺得這樣的方法很適合做為程式的解題邏輯，透過一項一項的檢查，讓整個謎題一步一步解開，也可以透過我們所列出來的所有特殊解，去延伸出如何創造數橋題目。

柒、　參考資料及其他

【摘要及資料庫資料】

維基百科-數橋．取自 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%95%B8%E6%A9%8B

【謎題網頁】

Hashi.info - Bridges．取自 https://www.hashi.info/

Hashi Solver and Generator．取自 https://www.kakuro-online.com/hashi/