

屏東縣第65屆國民中小學科學展覽
會
作品說明書

科 別：國小組

組 別：數學科

作品名稱：嗨!史賓斯基，請起立!

關鍵詞：碎形、堆疊法、遞迴（最多3個）

編號：報名時取號 A1014

嗨!史賓斯基，請起立!

壹、 研究動機

我們在找題目的時候看到一個很有意思的門格海綿，因為去年花了很多時間討論製作帕斯卡三角，所以我們想延伸探討，將門格海綿改成不同的形體，做出大大小小的或正四面體海綿，我們把它命名為史賓斯基海綿並探討這個大裝置作品的數學內涵。

貳、 研究問題

- 一、探討史賓斯基三角點、邊和面特徵。
- 二、探討史賓斯基海綿點、邊和面特徵。

參、 研究設備與器材

一、利用吸管、色紙和雲彩紙自製正多面體：

- (一)利用色紙摺出正四面體堆疊成大正四面體，再摺出正八面體作為比例對照；
- (二)利用點點珠串起分割的正四面體和正八面體。
- (三)利用雲彩紙摺出正四面體分別繪製平面密鋪與四種分割圖形。

二、筆記、紙與電腦。

四、實作紀錄中使用程式包含 Microsoft 文書處理軟體 excel 及 word，Geogebra 經典五版。

肆、 研究歷程

一、 文獻探討

關於平面密鋪的研究、藝術創發已經很多，我們的研究來自於平面圖形，有密鋪，也利用碎形概念討論創發。關於門格海綿的研究作品目前探討完整的有 Menger Sponge 點邊面的探討[1](第 58 屆)針對正四面體分割實體點、邊、面數量，分析遞迴堆疊結構關係。我們的作品針對正四面體作品分割的面特徵、點數、邊數面數詳加討論。

二、 名詞解釋

我們在研究中為了方便說明發現的現象，便於分析，採用以下幾個名詞：

1. 缺格 ∇S_n ：以史賓斯基三角 *Sierpinski Triangle* 命名，標註 S_n 正三角形平面密鋪，根據密鋪結果將 \blacktriangle 保留缺格處 \blacktriangledown 留白。
2. 缺塊 ∇T_n ：以正四面體 *tetrahedron* 命名，標註 T_n 將分割後的角錐，將 \blacktriangle 保留，將小單位正四面體 \blacktriangledown 鏤空。
3. 缺塊 $\blacklozenge O_n$ ：以正八面體 *Octahedron* 命名，標註 O_n 表示分割後的缺塊角錐。
4. 點 V ：指在正三角形的兩條邊所交出的角或正四面體的兩條稜交會的頂角由 2 條邊或稜所交出的角或頂角其端點稱為點。
5. 本研究指在平面的正三角形任連接任兩頂點的線段為邊 E ；在正四面體兩個面相交的線段為稜。
6. 面：本研究指正四面體邊界內的範圍 F 。

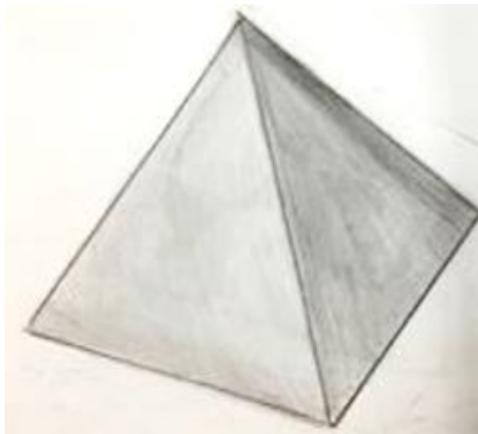


圖 1 正四面體(研究者手繪)

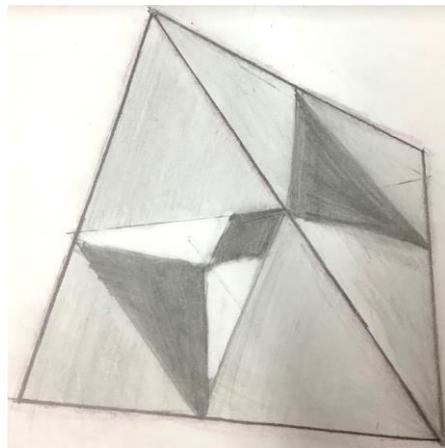


圖 2 史賓斯基海綿(研究者手繪)

三、平面的缺格怎麼來?—動手畫帕斯卡三角

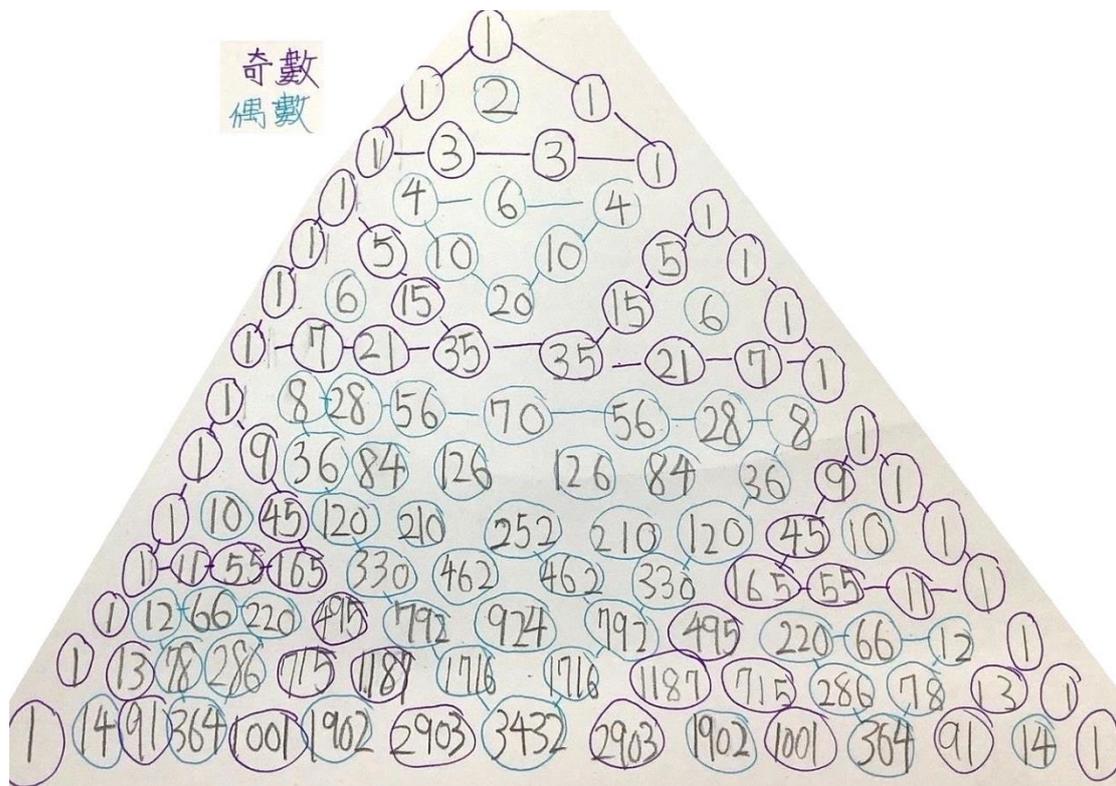


圖 3 標柱奇數偶數

我們選擇兩種色筆將奇數字、偶數字分別畫圈●●，再連線找出大大小小三角形，偶數連線的大小▼就是製作史賓斯基三角形挖空的缺格。

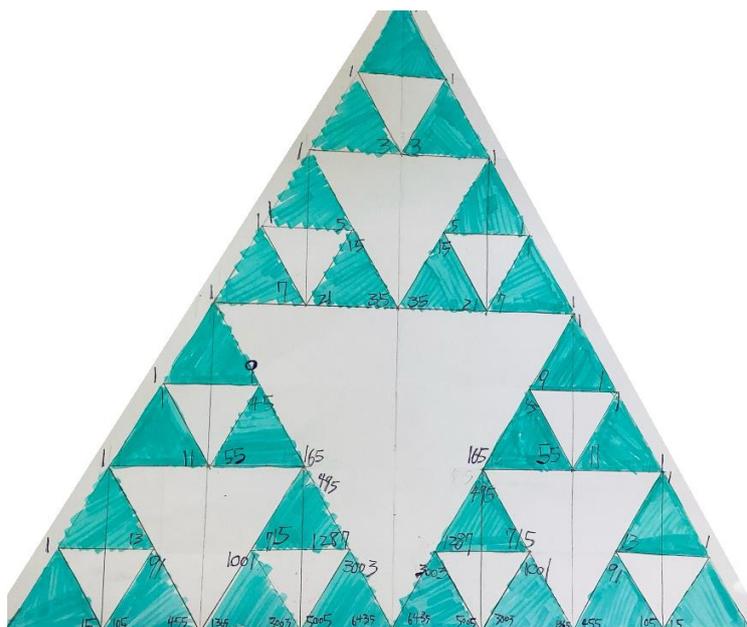


圖 4 自製史賓斯基三角

四、動手摺

我們參考幾本摺紙教學書籍，組出小的正四面體和正八面體[4]堆疊組合，在以大的正四面體[5]比對缺格塊對照史賓斯基三角，成為「史賓斯基海綿」。

T_1 缺格塊補入正四面體



圖 5 正四面體 T_1 缺格塊

與正四面體邊長一樣



圖 6 正八面體

T_1 缺格塊補入正八面體

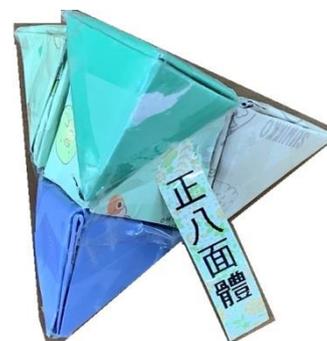


圖 7 正四面體 T_1 填滿

五、製作與討論

我們發現正四面體與正八面體邊長一樣，可以計算正八的缺塊數，每一個正四面體分割後會成為 4 個小正四面體+1 個小正八面體：

$$T_0 = 4 \times T_1 + 1 \times O_1$$

而不是一開始猜想的 5 個小正四面體組合(詳圖 1 和圖 3,)圖 1 即使在分割後的 T_0 缺塊放入同樣大小的 T_1 小正 4 面體，無法塞滿缺塊空間，但邊長相等的小正八面體 O_1 恰好填滿缺塊。

(一)正四面體製作方法[4]

我們先理解摺紙常用術語，依谷線→谷線→山線對摺，開口朝右上方擺放。



圖 8-1

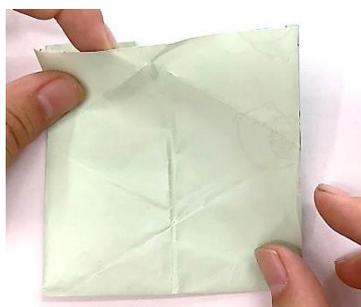


圖 8-2

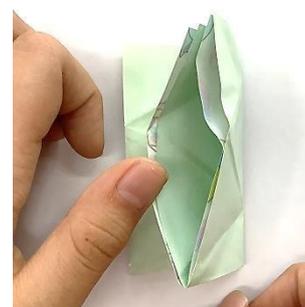


圖 8-3

以左下角頂點為中心點抓牢→將右下角頂點抓住向左上對準中心軸翻摺，再將左下角頂點向中心軸對準翻摺。

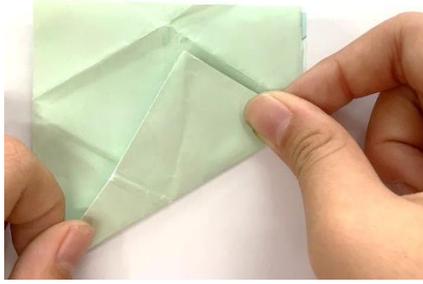


圖 8-4

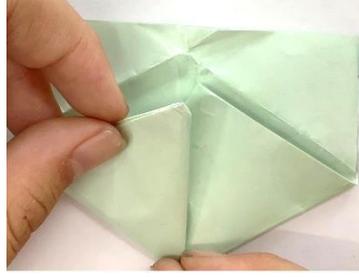


圖 8-5



圖 8-6

將穩固結構的邊緣延著正三角形強化摺痕。

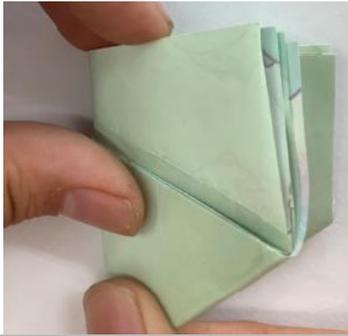


圖 8-7

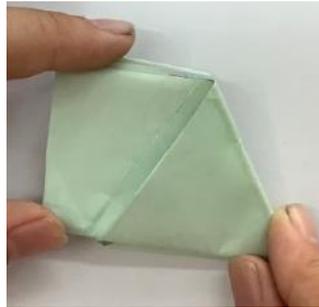


圖 8-8



圖 8-9

攤開整張色紙，整張呈現大三角形分成數個小正三角形△▽密鋪。將大正三角形摺出。

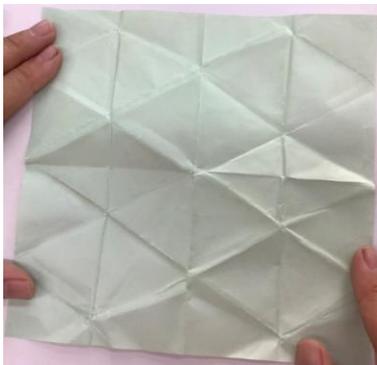


圖 8-10



圖 8-11



圖 8-12

底端強化結構邊緣往上摺，再將三個角的小正三角形△向內收入。



圖 8-13

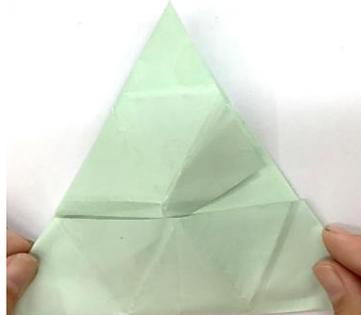


圖 8-14

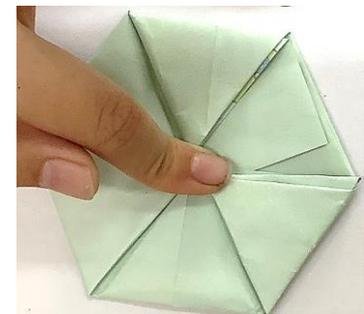


圖 8-15

依山線谷線一內凹一外凸兩個為一個單位收成角錐

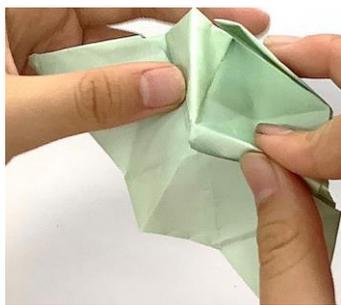


圖 8-16

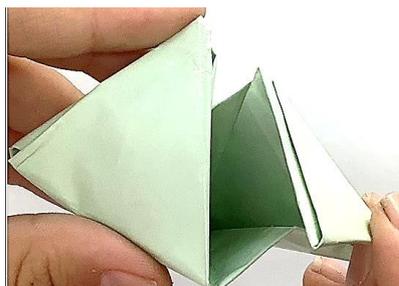


圖 8-17



圖 8-18

(二)正八面體製作過程

正八面體開始摺之前的9個摺法與正四面體相同。準備好有山線、谷線の色紙→內面四個角收入→翻面。



圖 9-1



圖 9-2

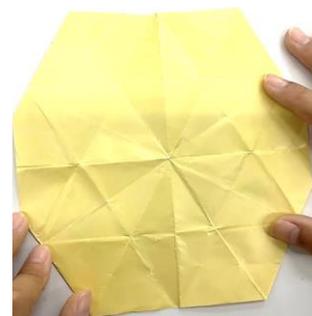


圖 9-3

抓出頂端分為三摺→立起來平放→正反面分別將右邊小三角形塞入左邊→整理成為大三角形



圖 9-4

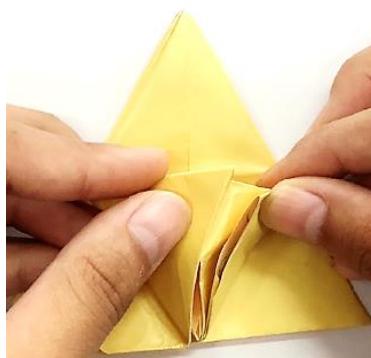


圖 9-5

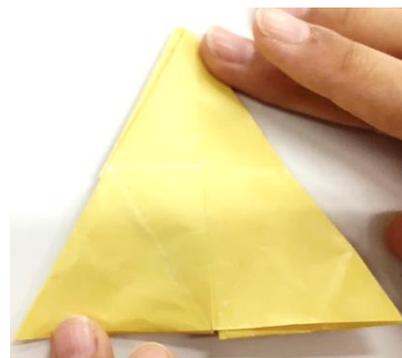


圖 9-6

最後一個塞入之後，我們改以細長柄工具塞入頂點縫內將8個面分別向外壓實，手指將正八面體稜線拉直，整成一個錐體。

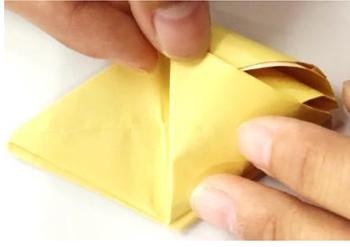


圖 9-7

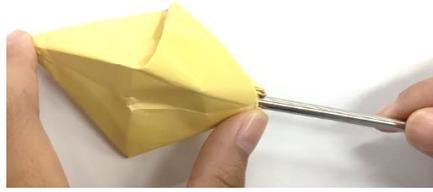


圖 9-8



圖 9-9

伍、 平面密鋪的點、邊、面探討

一、 關於碎形的發現與討論

透過頂點珠組合和史賓斯基三角並列討論平面與立體圖形：我們發現把大三角形分割之後，發現小正三角形邊長變化是大正三角形的 $\frac{1}{2}$ ；邊長縮小 $\frac{1}{2}$ ，邊數隨著分割結果是 $2n$ 。

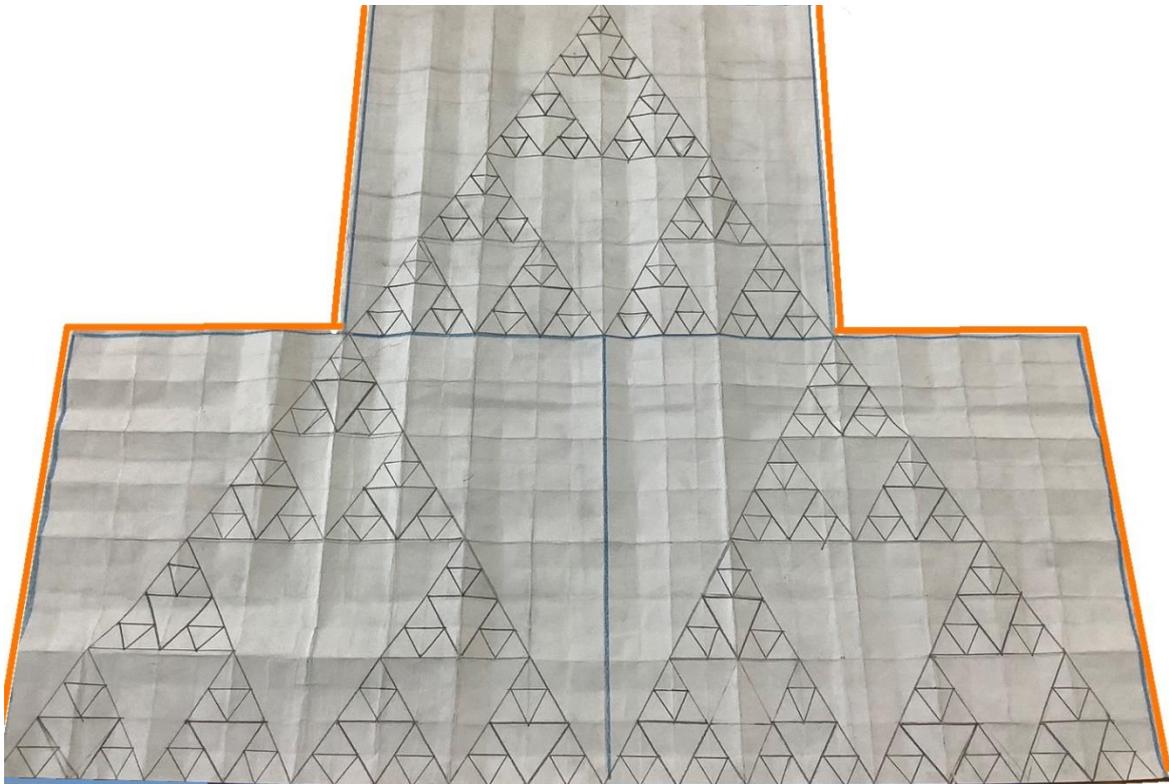


圖 10 T_5

我們使用 Geogebra 經典五版作圖，方法：繪圖區→格線→極座標
 → $\theta = \frac{\pi}{3}$ →正多邊形→連續繪製正三角形。

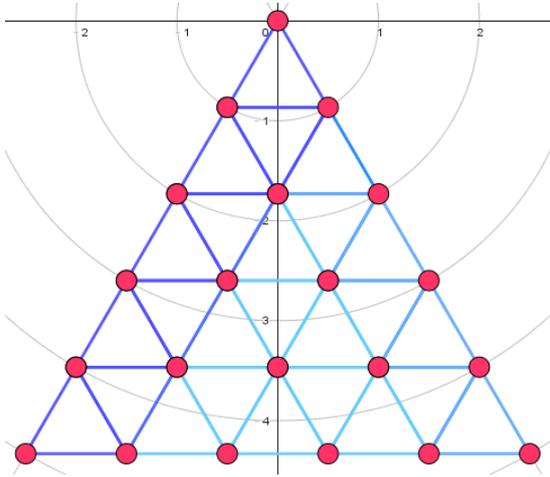


圖 11 正三角形密鋪

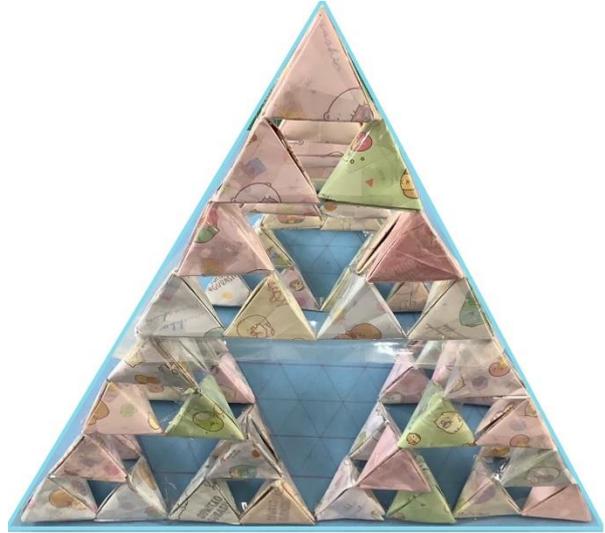


圖 12 自製史賓斯基海綿

表 1 平面正三角形密鋪頂點數量

頂點層	頂點數	逐層增加的頂點數量								
1	1	1								
2	2	1	2							
3	3	1	2	3						
4	4	1	2	3	4					
5	5	1	2	3	4	5				
6	6	1	2	3	4	5	6			
⋮	⋮									
n	n	1	2	3	4	5	6	...		n

平面正三角形密鋪頂點數量可以從通式 $\frac{(n+1) \times n}{2}$ 得到。

邊數變化跟著小正三角形的面數計算，面層數=頂點層數-1。

表 2 單一層數▲面數與邊數 E 的關係

頂點層	▲層數	面數▲▼	面數與層數關係	邊數 E
(1,2)	1	1	$(2 \times 1) - 1$	3
(2,3)	2	3	$(2 \times 2) - 1$	7
(3,4)	3	5	$(2 \times 3) - 1$	11
(4,5)	4	7	$(2 \times 4) - 1$	15
(5,6)	5	9	$(2 \times 5) - 1$	19
(6,7)	6	11	$(2 \times 6) - 1$	23
(7,8)	7	13	$(2 \times 7) - 1$	27
(8,9)	8	15	$(2 \times 8) - 1$	31
(9,10)	9	17	$(2 \times 9) - 1$	35
⋮				
(n-1, n)	n-1		$[2 \times (n - 1)] - 1$	

逐層增加 2 個小正三角形 ▲▼，我們從圖形分析，發現下一層會是上一層的鏡射加上 4 個小▲， $[2 \times (n - 2)] - 1 + 4$ ；

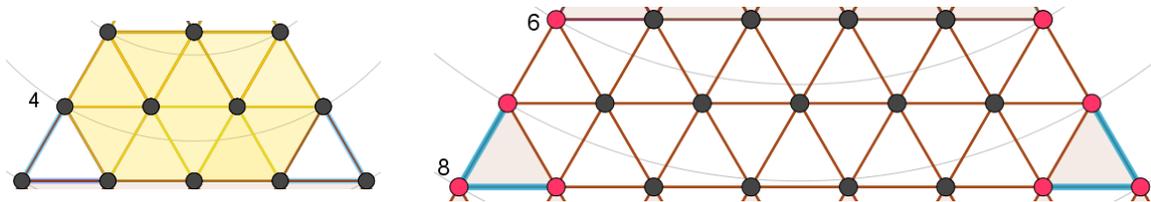


圖 13~14

由此可以得到史賓斯基三角單層的邊數計算方法： $[2 \times (n - 2)] + 3$ 。

那麼缺格後的史賓斯基三角頂點數、邊數、面數會不會有改變呢?我們把▲保留缺格處▼留白。

二、 史賓斯基三角頂點數、邊數、面數探討

我們分析兩種計算方法，第 1 種是缺格後的頂點數，第 2 種是把畫好的圖比對平面密鋪計算減掉的頂點數。

表 3 缺格後的史賓斯基三角頂點數變化

缺格次數 ▼	頂點數	逐次缺格增加的頂點數量							
S_0	3	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	...	S_n
S_1	6	3	3						
S_2	15	3	3	9					
S_3	42	3	3	9	27				
S_4	123	3	3	9	27	81			
S_5	366	3	3	9	27	81	243		
⋮	⋮	3	3	9	27	81	243	...	
S_n	n	3	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	...	3^n
$\Sigma V_{S_n} = 3 + 3^n$									

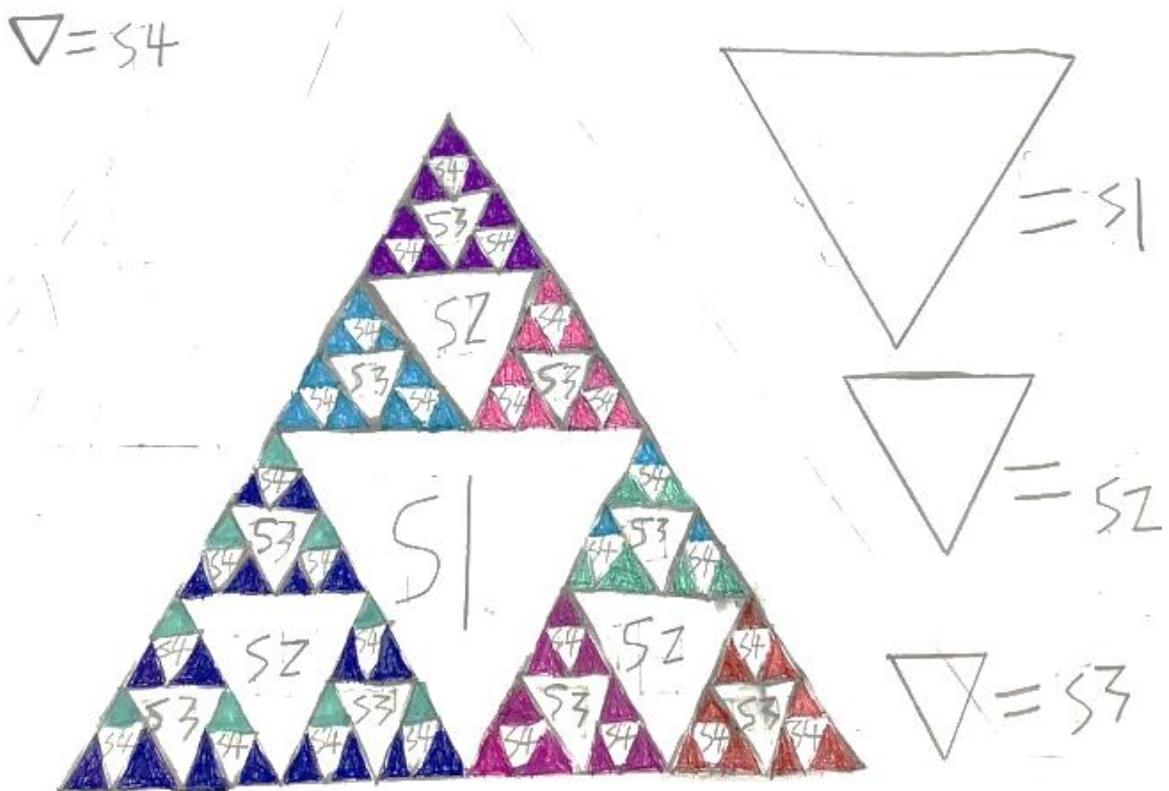


圖 15 自製史賓斯基三角

表 4 平面密鋪頂點數量和史賓斯基三角的頂點數比較

頂點層	逐層頂點數	頂點層	累加頂點數	頂點層	頂點數
1	1	1	1	1	1
2	2	(1,2)	3	(1,2)	3
3	3	(1,3)	6	(1,3)	6
4	4	(1,4)	10	(1,4)	10
5	5	(1,5)	15	(1,5)	15
6	6	(1,6)	21	(1,6)	19
...				(1,7)	25
				(1,8)	33
n	n	(1,n)	Σn	(1,9)	42

【討論】因為史賓斯基三角是不斷缺格挖空，面積越來越小，頂點數會隨著面積縮小增加，所以採取逐次缺格的史賓斯基三角討論頂點數比較能夠看出規律。如果只是逐層累加，不容易看觀察出規律。逐次缺格增加頂點累加可以 $3+3^n$ 得解。邊數探討如下。

表 5 史賓斯基三角面數變化

缺格次數▼	頂點層	▲面數	▼面數
S_0	(1,2)	1	0
S_1	(2,3)	3	1
S_2	(3,4)	9	$1 + 3$
S_3	(4,5)	27	$1 + 3 + 3 \times 3$
S_4	(5,6)	81	$1 + 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3$
S_5	(6,7)	243	$1 + 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 \times 3$
⋮	⋮	⋮	⋮
S_n	n	3^n	$1 + \Sigma 3^{n-1}$

表 6 邊數與缺格次數關係

缺格次數▼	頂點層	▲面數	邊數 E
S_0	(1,2)	1	3
S_1	(2,3)	3	3×3
S_2	(3,4)	9	$3 \times 3 \times 3$
S_3	(4,5)	27	$3 \times 3 \times 3 \times 3$
S_4	(5,6)	81	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
S_5	(6,7)	243	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
⋮	⋮	⋮	⋮
S_n	n	3^n	3^{n+1}

三、 史賓斯基海綿的點、邊、面探討

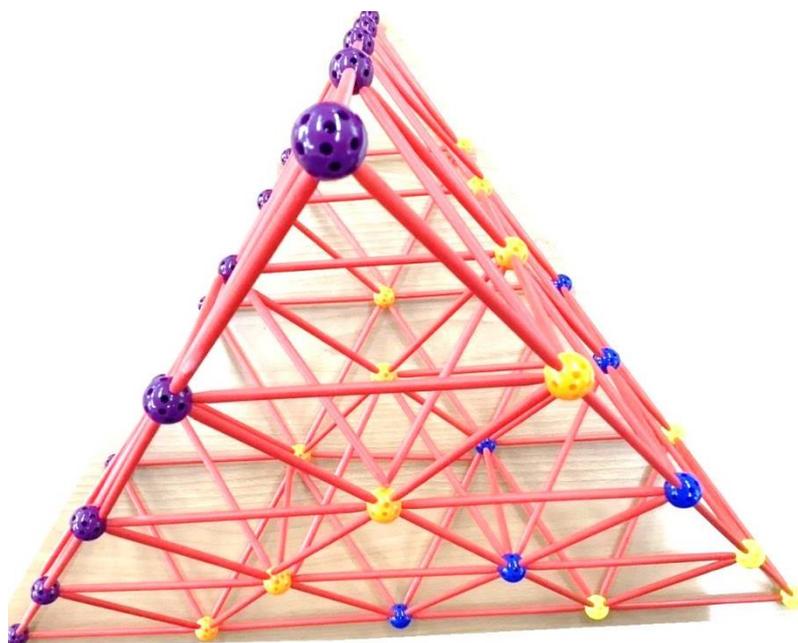


圖 16 頂點珠組合出大角錐

(一)堆疊的角錐頂點頂點數

表 7 堆疊的角錐頂點數變化(頂點珠版本)

層數	頂點數	逐層增加的頂點數量
1	1	1
2	3	1+2
3	6	1+2+3
4	10	1+2+3+4
5	15	1+2+3+4+5
6	21	1+2+3+4+5+6
7	28	1+2+3+4+5+6+7
8	36	1+2+3+4+5+6+7+8
9	45	1+2+3+4+5+6+7+8+9
10	55	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10
⋮	⋮	⋮
n	$\frac{(n+1) \times n}{2}$	1 2 3 ... n-2 n-1 n

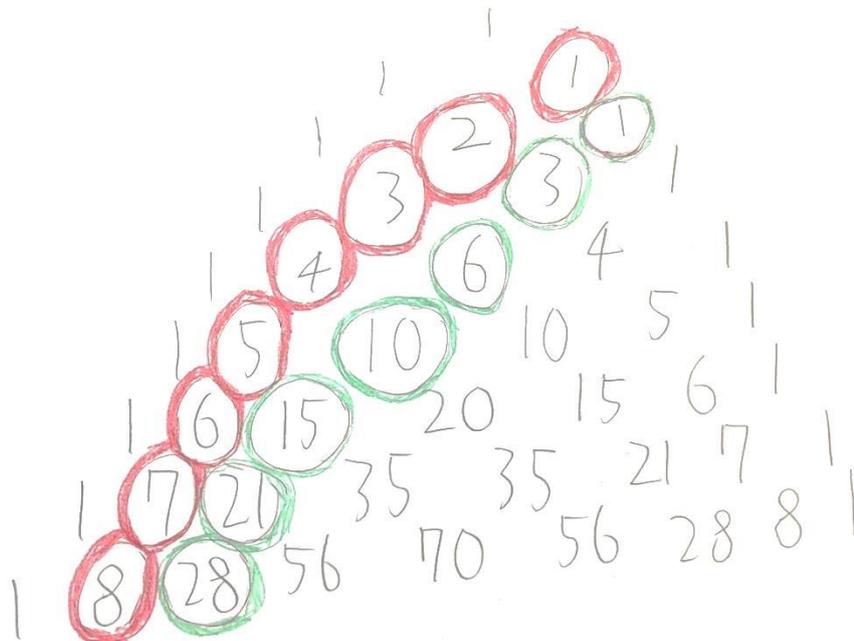


圖 17 從帕斯卡三角找到對應數列

我們查找文獻，發現這個叫做「三角形數」(OEIS: A000217)，由於三角形數的探討已經很多，回溯帕斯卡三角，看到的逐行累加規律整理成階差數列。原來的數列 A 降階之後，看到熟悉的(1)2,3,4,5,6,...,10。

我們觀察史賓斯基海綿十，發現頂點數逐層增加就是角錐增加數量，發現可以單獨以 $\frac{(n+1)\times n}{2}$ 計算得到，那麼逐層增加，會需要幾個錐體?又會用到幾個頂點珠呢?對這個數列感到好奇，試著分析

1. 階差數列

數列 A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	
數列 B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

【討論】經過降階處理後發現成為常數，數列 B 是等差數列。

【找規律】 $B_1 = A_2 - A_1, B_2 = A_3 - A_2, B_3 = A_4 - A_3, \dots, B_{11} = A_{12} - A_{11}$

2. 分析 AB 兩個數列的關係

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = (1 + B_1)$$

$$A_3 = (1 + B_1) + (B_1 + 1)$$

$$A_4 = (1 + B_1) + (B_1 + 1) + (B_1 + 2)$$

$$A_5 = (1 + B_1) + (B_1 + 1) + (B_1 + 2) + (B_1 + 3)$$

$$A_6 = (1 + B_1) + (B_1 + 1) + (B_1 + 2) + (B_1 + 3) + (B_1 + 4)$$

⋮

$$A_{11} = (1 + B_1) + (B_1 + 1) + (B_1 + 2) + (B_1 + 3) + (B_1 + 4) \cdots + (B_1 + 7) + (B_1 + 8) + (B_1 + 9)$$

$$A_{12} = (1 + B_1) + (B_1 + 1) + (B_1 + 2) + (B_1 + 3) + (B_1 + 4) \cdots + (B_1 + 8) + (B_1 + 9) + (B_1 + 10)$$

又

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = A_1 + B_1$$

$$A_3 = A_2 + B_2 = A_2 + (B_1 + B_2)$$

$$A_4 = A_3 + B_3 = A_2 + (B_1 + B_2 + B_3)$$

$$A_5 = A_4 + B_4 = A_2 + (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)$$

$$A_6 = A_5 + B_5 = A_2 + (B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5)$$

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} = A_2 + (B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + \cdots + B_{n-1})$$

$$\begin{aligned} A_n &= A_2 + (B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + \cdots + B_{n-1}) \\ &= 1 + [2 + 3 + \cdots + 2 + (n - 2)] \\ &= 1 + \frac{(n + 2) \times (n - 1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

(二)堆疊的角錐面數與邊數變化

表 8 正四面體分割—單一層數▲面數與邊數E的關係

頂點層	▲層數	面數▲▼	單面分割數與角錐▲▼關係	內藏面
(1,2)	1	4	1▲×4	0
(1,3)	2	16	4▲×4	3
(1,4)	3	36	9▲×4	9
(1,5)	4	64	16▲×4	18

(三)史賓斯基海綿點、邊、面計算

我們採用「挖空法」和「堆疊法」兩種方法來分析史賓斯基海綿：挖空法是分析的基礎，堆疊法利用逐層組裝角錐堆疊出與挖空一樣的鏤空效果，也用來參照挖空法確認點邊面計算結果。

1. 挖空法

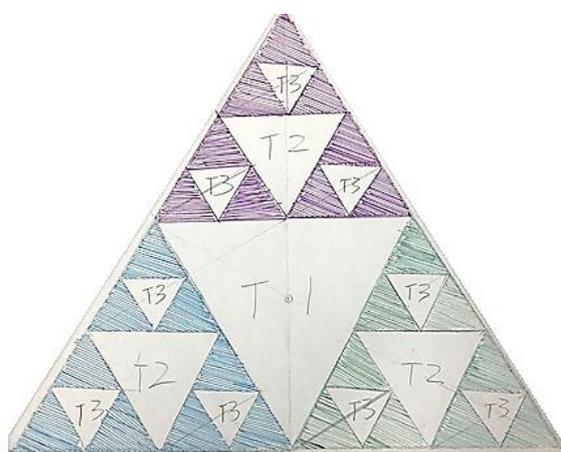


圖 18 平面白色鏤空



圖 19 利用堆疊做出與挖空一樣的鏤空

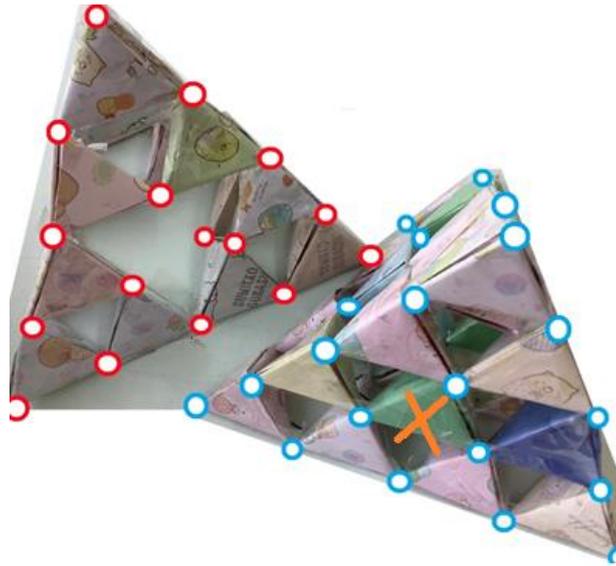


圖 20 挖空角錐堆疊比較

我們好奇挖空後的史賓斯基海綿缺塊對於點、邊、面的計算有沒有影響。圖右藍色頂點角錐是採堆疊法組合的大正四面體分割後拿掉橘色標記，就成為圖左的史賓斯基海綿。

表 9 挖空法的史賓斯基海綿頂點數量

分割的角錐		能否成形	史賓斯基海綿	
層數	頂點數	形態	挖空次數	成形狀態
1	1	T_0	1	→2 層
2	3	T_1	2	→4 層
3	6	x	3	→8 層
4	10	T_2	4	→16 層
5	15	x	5	→32 層
6	21	x	6	→64 層

從頂點珠角錐模型觀察，發現層數如果有 3,5,7 等奇數因數層就沒有辦法做成史賓斯基海綿，一定要偶數層才能成形。

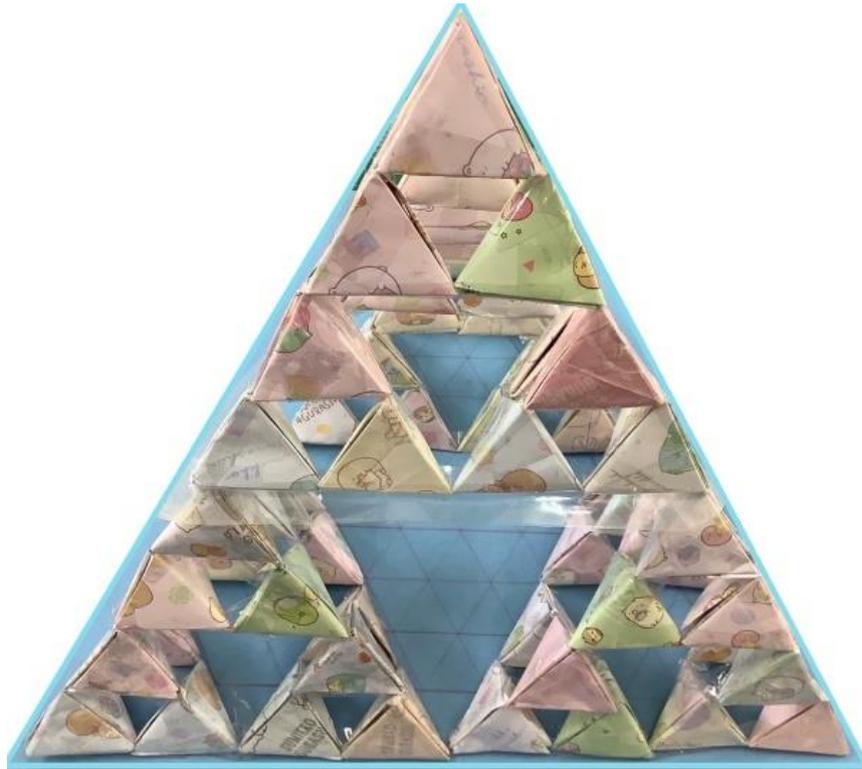


圖 21 立體分割 T_3

表 10 挖空次數與頂點增加數量表

挖空次數	成形狀態	頂點數	挖空增加的頂點數量
T_0	1 層	4	
T_1	2 層	4	6
T_3	4 層	4	6×4
T_4	8 層	4	$6 \times 4 \times 4$
T_5	16 層	4	$6 \times 4 \times 4 \times 4$
T_6	32 層	4	$6 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

我們發現每一條稜在挖空之後，原來的 1 分割為 $\frac{1}{2}$ ，逐次分割為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$ ，頂點數量隨之增加 6 個頂點，每多一次分割挖空，角錐以 4 的倍數增加，頂點增加數量 $6 \times 4^{n-2}$ 。如果採用堆疊法，頂點數增加的規律又有不同。

2. 堆疊法：逐層堆疊結果如下。

表 11 逐層增加角錐數量變化

挖空法	角錐(增加)數量	→	→
T_0	1	1	4^0
T_1	$1 + 3$	4	4^1
T_2	$(1 + 3) \times 4$	16	4^2
T_3	$((1 + 3) \times 4) \times 4$	64	4^3
T_4	$((((1 + 3) \times 4) \times 4) \times 4)$	256	4^4
T_5	$(((((1 + 3) \times 4) \times 4) \times 4) \times 4)$	1024	4^5

表 12 逐層增加頂點數量變化

挖空法	頂點數
T_0	4
T_1	$4 \times 4 - 6$
T_2	$(4 \times 4 - 6) \times 4 - 6$
T_3	$((4 \times 4 - 6) \times 4 - 6) \times 4 - 6$
T_4	$((((4 \times 4 - 6) \times 4 - 6) \times 4 - 6) \times 4 - 6)$
T_5	$(((((4 \times 4 - 6) \times 4 - 6) \times 4 - 6) \times 4 - 6) \times 4 - 6)$

進一步觀察稜數面數變化，我們討論要如何分析稜長的變化，採用碎形的收縮概念，以縮小 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$ 標註。

表 13 正四面體分割一角錐稜數與面數變化

角錐層數	頂點層數	角錐稜數	縮小比例	面數 ▲ ▼	角錐與面數 ▲ ▼ 關係
1	$(1,2) = 2^1$	4	$\frac{1}{2}$	4	$1 \blacktriangle \times 4$
2	$(1,4) = 2^2$	16	$\frac{1}{4}$	16	$4 \blacktriangle \times 4$
3	$(1,8) = 2^3$	64	$\frac{1}{8}$	64	$16 \blacktriangle \times 4$
4	$(1,16) = 2^4$	128	$\frac{1}{16}$	128	$64 \blacktriangle \times 4$

角錐層數以頂點層 2^n 增加，角錐稜數E以 2^{2n} 增加。

陸、 研究結論

一、探討史賓斯基三角點、邊和面特徵：

(一)關於碎形的發現與討論：大三角形分割之後，發現小正三角形邊長變化

是大正三角形的 $\frac{1}{2}$ ；邊長縮小 $\frac{1}{2}$ ，邊數隨著分割結果是 $2n$ 。

(二)正三角形密鋪頂點數量可以從通式 $\frac{(n+1) \times n}{2}$ 得到，邊數變化跟著小正三

角形的面數計算，面層數=頂點層數-1。

(三)單一層數▲面數與邊數E的關係： $[2 \times (n - 1)] - 1$ 。

(四)平面密鋪挖空得到缺格後頂點數史賓斯基三角頂點數： $\sum V_{S_n} = 3 + 3^n$ 。

(五)史賓斯基三角面數變化： $1 + \sum 3^{n-1}$ 。

二、探討史賓斯基海綿點、邊和面特徵：

(一)多一次分割挖空，角錐以 4^n 增加，頂點增加數量 $6 \times 4^{n-2}$ 。

(二)角錐稜數與面數變化層數以 2^n 增加，角錐稜數E以 2^{2n} 增加；稜長的

變化，隨著分割次數增加以 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$ 縮小。

柒、 參考文獻

- [1] 龍湘怡。全國中小學科學展覽會第 58 屆作品說明書，高級中等學校組數學科。Menger Sponge 點邊面的探討。
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/58/pdf/NPHSF2018-050409.pdf>
- [2] 陳泓嘉。全國中小學科學展覽會第 61 屆作品說明書，國小組數學科。
以不定方程式探討正三角形衍生圖形之無縫密鋪關係。
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/61/pdf/NPHSF2021-080413.pdf>
- [3] 廖思善(2006)。吸子。動手玩碎形。天下遠見：臺北市。
- [4] 亞緋留譯(2017)。用手指思考!幾何摺紙摺出數學力×想像力×記憶力。
三采文化：臺北市。
- [5] 李正憲(2019)。藝數摺學。臉譜：臺北市。