

屏東縣第65屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：快來看!好長的貪食蛇!

關 鍵 詞：盤柱相容、盤柱相斥、遞迴（最多3個）

編號：A1010

快來看!好長的貪食蛇!

摘要

本研究透過實作探討

一、傳統河內塔移動規律。從盤數推得 $a_n=2a_{n-1}+1$ ；解通式得到 $D_H(n) = 2^n - 1$ 。

二、三色塔搬移模式與規律：

我們得到 3 種搬移方式，分別可就方法組合得到步數，並從中得到最少移動步數組合方法。

方法 1 5 步逐一歸位解，搬移序為 $A_n \rightarrow B_n \rightarrow A_n \rightarrow C_n \rightarrow A_n$ 。

方法 2 五階段拆組 6 步解，搬移序為 $A_n B_n \rightarrow C_n \rightarrow B_n \rightarrow A_n \rightarrow B_n$ 。

方法 3 四階段拆組 6 步解，搬移序為 $A_n B_n \rightarrow B_n A_n \rightarrow C_n \rightarrow A_n \rightarrow \square$ 或 $\parallel ABC_{n-2} \rightarrow \square$ 或 $\parallel ABC_{n-1}$ 。

三、三色塔計算步數時可利用 D_n 底盤 $n-1$ 可推得 $D_1 \sim D_{n-1}$ 伴隨三柱河內塔單塔 $(2^{n-1} - 1) \times$ 底盤搬移次序數。

四、三色塔歸位步數計算尚須逐一檢視**組相容□、組相斥∥、柱相容□、柱相斥∥**，相容相斥狀態會影響底盤以上各盤歸位時步數。相容步數 5-3，相斥步數最多 5 步。

壹、研究動機

學期初老師問我們想做什麼數學專題?我們看到教室裡有河內塔，想著就來做河內塔吧!沒想到老師皺了眉頭，說「3 塔、4 塔、n 塔交換差不多被做完了!」於是我們在網上海撈一番，發現一種三色塔和一般的河內塔不一樣，就來試試看囉!

貳、研究問題

一、傳統河內塔移動規律。

二、三色塔搬移模式與規律。

三、3 柱單塔和三色塔的關係。

參、研究設備與器材

一、自製三色塔：紅、黃、藍三種顏色的方塊便於組員分別操作，每塊分別標上 $A_1, A_2, A_3 \dots$ ， $B_1, B_2, B_3 \dots$ ， $C_1, C_2, C_3 \dots$ ；位置標示紅色柱 I、黃色柱 II、藍色柱 III。

二、傳統三柱河內塔。

三、筆記、紙與電腦。

四、實作紀錄中使用程式包含 Microsoft 文書處理軟體 excel 及 word，Geogebra 經典五版。

肆、遊戲說明

一、名詞解釋

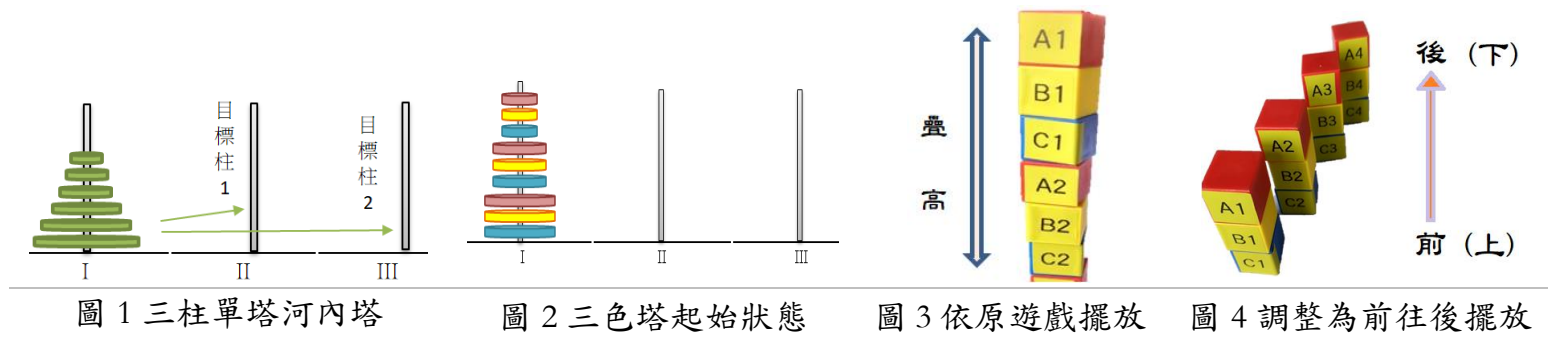
(一)遊戲規則：

三色塔是河內塔的變化遊戲，兩者相同規則每次移動 1 盤，大盤在小盤下方，差異如下。

1.河內塔：3 柱單塔是三根柱子中任選一柱放置 n 盤作為起始狀態，盤排序必須由上而下由小而大，編號順應大小由上往下為 $D_1, D_2, D_3 \cdots D_{n-1}, D_n$ 。規則是將起始狀態各盤移至目標柱即完成，如圖 1。

2.三色塔：與 3 柱河內塔同，柱身沒有顏色。差別在於：三色塔身由在 I 柱放置三色盤(詳圖 2)，同樣大小的三色盤成一組，每一組顏色由上而下分別為紅色、黃色和藍色，標柱 A, B, C。先依顏色再依尺寸組合的塔身由上而下為 $A_1B_1C_1 \rightarrow A_2B_2C_2 \rightarrow \cdots A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1} \rightarrow A_nB_nC_n$ 。

3.調整操作方式：將一般疊高色盤改為依大小成組前後排序，第 1 排放 $A_1B_1C_1$ 、第 2 排放 $A_2B_2C_2 \cdots$ 第 4 排放 $A_4B_4C_4$ 等，如圖 3。數字編號表示大小，操作時「前—後」即表示「上—下」相對位置，如圖 4。搬運過程顏色無分先後，只要能將色盤放置對應色柱即可。



(二)名詞解釋：

1.河內塔：本研究指傳統三柱單塔遊戲，將盤碟從起始柱移動到目標柱最少步數，結果記為 $D_H(n)$ ，如圖 5。

1-1 起始柱：柱子由左而右編號分別為 I、II、III，以 I 作為起始柱。

1-2 目標柱：指柱 II 或柱 III。

1-3 底盤：過程中放置在最下面的是底盤，也是最大盤，編號 D_n 。

2.三色塔移動最少步數記為 $D_3(n)$ 。

2-1 起始柱：三色塔柱子由左而右編號分別為 I、II、III，以 I 作為起始柱。

2-2 起始狀態：由上而下為紅盤-黃盤-藍盤，依大小分組，同樣大小編為一組，由上而下 1, 2, 3, ..., n 盤，起始狀態如圖 2。

2-3 目標柱：指定「紅色盤 A」必須回到「I 柱」即紅色柱，「黃色盤 B」必須回到「II 柱」即黃色柱，「藍色盤 C」必須回到「III 柱」即藍色柱，並由小到大堆疊即完成目標。

2-4 色盤到達對應目標柱稱為「歸位」。

2-5 讓位：除了起始與完成狀態之外，3 柱都有讓位功能，目的在讓小盤移動便利大盤到達目標柱。

2-6 底盤：過程中放置在最下面的是底盤，紅色底盤編號 A_n 、黃色底盤編號 B_n 、藍色底盤編號 C_n ，如圖 7 之 $A_3B_3C_3$ 。

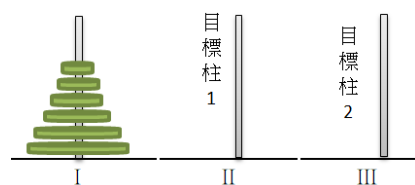


圖 5 三柱單塔起始狀態

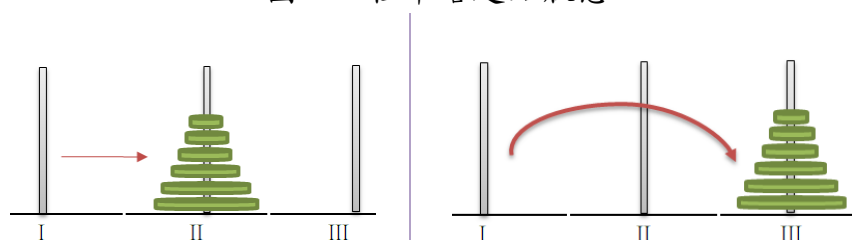


圖 6 若 I 為起始→移動至 II 或 III

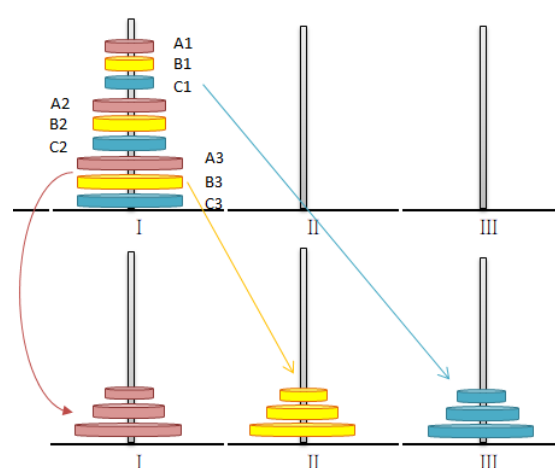
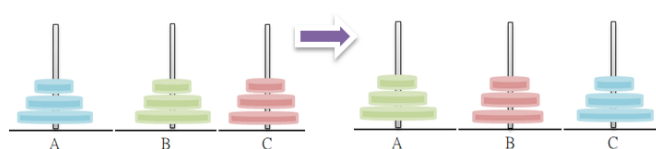


圖 7 三色塔的三種色盤歸位

伍、文獻探討

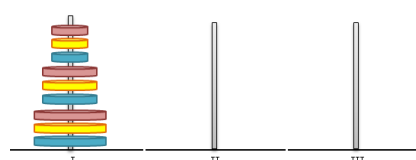
一開始我們在尋找老題新作的可能性，傳統河內塔延伸相關研究，n 柱多塔、最少步數、最多步數都有人研究，但是混色塔目前沒有相關研究結果提出。

比較歷屆河內塔相關作品，近二十年內較引人注意的有以降柱法破解任意柱數與盤數的河內塔(第 60 屆)^[1]，找出把 N 個盤都搬到目標柱的最少步數 Q 的合理範圍，提出讓位法、換位法、原始降柱法與複合降柱法，但該篇與本研究探討主題相異。探討最少移動次數最完整的是三柱鼎立——三柱搬盤遊戲最佳移動模式之探討(第 52 屆)^[2]，作者主要發現在於 3 柱 3 塔「輪替」最少步數，得到四階段移動模式，以底盤換柱作為模式終點。我們從作品中發現三柱單塔、雙塔、三塔交換結果的探討，是目前針對河內塔移動最少步數最完整的作品。



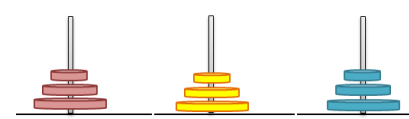
$I \rightleftharpoons II \rightleftharpoons III$

圖 5 三柱鼎立三塔輪換示意



紅黃藍三色依編號成組疊於 I

圖 6 三色塔起始狀態



三色分別歸位至所屬柱

圖 7 三色塔結束狀態

既然相關研究非常多，為什麼還要提出來呢？因為我們發現單塔在我們的研究最終扮演重要角色，所以必須把單塔的交換模式釐清楚。有三柱鼎立篇做為參考，我們再實作後詳列移動結果予以驗證。我們的研究重點在於探討「三色河內塔分派至指定柱」與「傳統河內塔交換特質」兩種規則的結果差異並嘗試用數學方法來解釋我們的發現。

一、研究架構

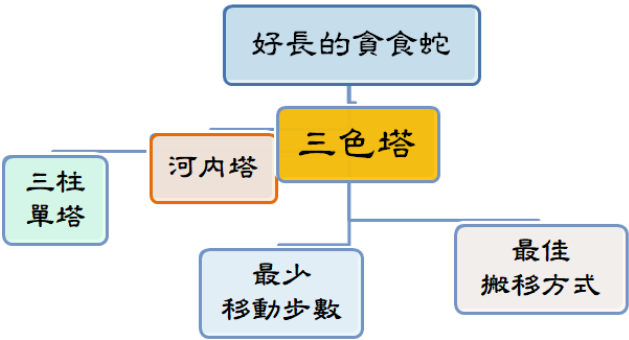


圖 11 研究架構

二、從已知文獻確認規律—3 柱單塔換柱規律

(一) 3 柱單塔

我們列出 1,2,3,4 盤移動軌跡，發現逐盤增加後，前面盤數移動軌跡會重複出現新增盤移動軌跡，也就是『「後面」看得到「前面」』。

1F: 1
2F: 121
3F: 1213121
4F: 121312141213121

總盤數/序	移動軌跡
1/第 1 盤	A → C

總盤數/序	移動軌跡
底盤 2/第 2 盤	A → C
2/第 1 盤	A → B → C

總盤數/序	移動軌跡
底盤 3/第 3 盤	A → C
3/第 2 盤	A → B → C
3/第 1 盤	A → C → B → A → C

總盤數/序	移動軌跡
4/第 4 盤	A → C
4/第 3 盤	A → B → C
4/第 2 盤	A → C → B → A → C
4/第 1 盤	A → B → C → A → B → C

圖 12 發現 1~4 層前後「再現」規律

4~5 盤移動軌跡 1~4 盤全部軌跡再現於 5 盤移動軌跡

5F: 1213121412131215121312141213121

總盤數/序	移動軌跡																
4/第 4 盤	A	→	C														
4/第 3 盤	A	→	B	→	C												
4/第 2 盤	A	→	C	→	B	→	A	→	C								
4/第 1 盤	A	→	B	→	C	→	A	→	B	→	C	→	A	→	B	→	C

盤序	移動軌跡																				
第 5 盤	A	→	C																		
第 4 盤	A	→	B	→	C																
第 3 盤	A	→	C	→	B	→	A	→	C												
第 2 盤	A	→	B	→	C	→	A	→	B	→	C	→	A	→	B	→	C				
第 1 盤	A	→	C	→	B	→	A	→	C	→	B	→	A	→	C	→	B	→	A	→	C

圖 13 發現 4~5 層前後「再現」規律

由上得知， $D_H(n)$ 每一盤移動次數隨著盤數增加有定數，設盤數 n ，逐次從起始 A 柱移到目標柱 C，得到指定盤數移動次數及增加規律。

表 1 原型河內塔單塔移動步數

盤數 n	步數	↳ + 底盤動	分拆	發現 1	發現 2
1	1	1 ↘	1	$2^1 - 1$	$2 - 1 = 1$ a_1
2	3	$2+1$ ↘	$1+1+1$	$2^2 - 1$	$4 - 1 = 3$ $a_2=2a_1+1$
3	7	$6+1$ ↘	$3+1+3$	$2^3 - 1$	$8 - 1 = 7$ $a_3=2a_2+1$
4	15	$14+1$ ↘	$7+1+7$	$2^4 - 1$	$16 - 1 = 15$ $a_4=2a_3+1$
5	31	$30+1$ ↘	$15+1+15$	$2^5 - 1$	$32 - 1 = 31$ $a_5=2a_4+1$
6	63	$62+1$ ↘	$31+1+31$	$2^6 - 1$	$64 - 1 = 63$ $a_6=2a_5+1$
7	127	$126+1$ ↘	$63+1+63$	$2^7 - 1$	$128 - 1 = 127$ $a_7=2a_6+1$
8	255	$254+1$ ↘	$127+1+127$	$2^8 - 1$	$256 - 1 = 255$ $a_8=2a_7+1$
⋮				⋮	
n		⇒		$2^n - 1$	$a_n=2a_{n-1}+1$

對照《發現 1》，我們再進一步把層數分拆，得到第 2~3 個發現，作為後續三色塔的實作驗證。

表 2 河內塔從底盤分析遞迴規律

層數/步數	發現 3 ↳ + 底盤動拆解方法	
1 1	a_1	1
2 3	$2a_1+1$	$2\times 1+1$
3 7	$2\times(2a_1+1)+1$	$2\times(2\times 1+1)+1$
4 15	$2\times(2\times(2a_1+1)+1)+1$	$2\times(2\times(2\times 1+1)+1)+1$
5 31	$2\times(2\times(2\times(2a_1+1)+1)+1)+1$	$2\times(2\times(2\times(2\times 1+1)+1)+1)+1$
6 63	$2\times(2\times(2\times(2\times(2a_1+1)+1)+1)+1)+1$	$2\times(2\times(2\times(2\times(2\times 1+1)+1)+1)+1)+1$
7 127	$2\times(2\times(2\times(2\times(2\times(2a_1+1)+1)+1)+1)+1)+1$	$2\times(2\times(2\times(2\times(2\times(2\times 1+1)+1)+1)+1)+1)+1$
8 255	$2\times(2\times(2\times(2\times(2\times(2\times(2a_1+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1$	$2\times(2\times(2\times(2\times(2\times(2\times(2\times 1+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1$

【發現 1】「+1」表示底盤動 1 次，即 $2^1 - 1$ 。盤數每增加 1 盤，因為 $n - 1$ 盤只有兩柱可供選擇，不管讓位或回指定柱都只有 2 個選擇，因此底盤以上皆以 2 的倍數增加。由上表得到 $a_2 = 2a_1 + 1$, $a_3 = 2a_2 + 1, \dots, a_7 = 2a_6 + 1, a_8 = 2a_7 + 1$ ，得到遞迴式 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 。

三、三色塔

(一)底盤移動方法

由於文獻的提示，我們在尋找最少步數的時候特別留意底盤狀態。我們發現當只有 1 層的時候，有 3 種方法可以分別將各色底盤歸位。操作時我們也以簡單口訣「去、回」表示「 $\rightarrow$ 、 $\leftarrow$ 」成組移動。

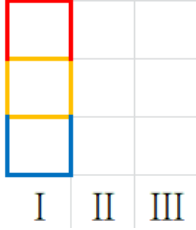
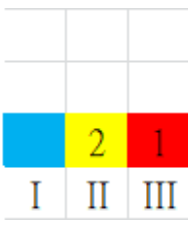
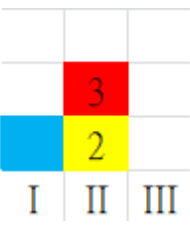
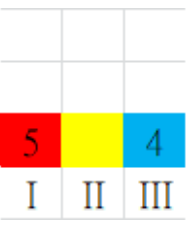
表 3 成組移動順序口訣

$\overrightarrow{ABC1}$ $\overrightarrow{1}$ A1→B1→C1		$\overleftarrow{ABC1}$ $\overleftarrow{1}$ C1→B1→A1		$\overrightarrow{ABC2}$ $\overrightarrow{2}$ A1→B1→C1		$\overleftarrow{ABC2}$ $\overleftarrow{2}$ C1→B1→A1	
1 去		1 回		2 去		2 回	

方法 1 5 步逐一歸位解

這個方法是一次移動 1 盤，底盤逐一歸位且中間柱先歸位。搬移序為 **A1→B1→A1→C1→A1**。

表 4 五階段單盤移動解

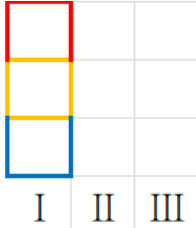
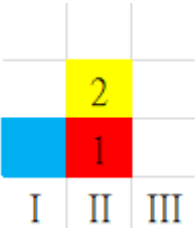
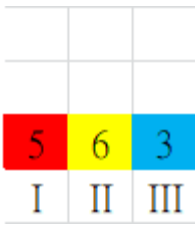
起始狀態	第 1 次 1 步	第 2 次 1 步	第 3 次 1 步	第 4 次 1 步	第 5 次 1 步
階段別					
					
狀態	單盤讓位	歸位	單盤讓位	歸位	歸位

一次一步的 5 步解移動次序，歸位順序是 **B→C→A**，中間柱先歸位。在僅有 1 組的時候是最少步數，也適用多組搬移時剩下最底下一組時判斷最少步數。

方法 2 五階段拆組 6 步解

這個方法採拆組移動法，可以得到 6 步解，方法是將底盤拆組，左右 I 柱和 III 柱底盤先歸位；第一次移動 2 步，之後依序一次 1 步。歸位順序是 **C→A→B**，中間柱最後歸位。以分拆序作為階段別，可以是五階段移動，底盤組順序為 **A1B1→C1→B1→A1→B1**。

表 5 五階段拆組 6 步解移動次序

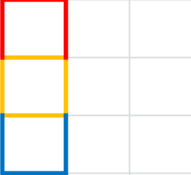
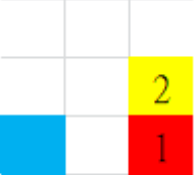
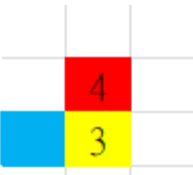
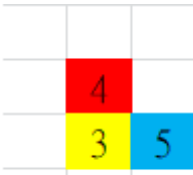
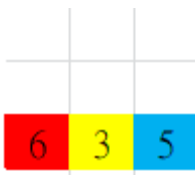
起始狀態	第 1 次 2 步	第 2 次 1 步	第 3 次 1 步	第 4 次 1 步	第 5 次 1 步
階段別	階段一	階段二	階段三	階段四	階段五
					
狀態	A1→B1 讓位	C1 歸位	B1 單盤讓位	A1 歸位	B1 歸位

方法 3 四階段拆組 6 步解

這個方法雖然也是採拆組移動法，與方法 2 差別在於兩次拆組移動，第 1 次移動 2 步，第二次也移動 2 步，之後依序一次 1 步。歸位順序是 $B \rightarrow C \rightarrow A$ 是中間柱先歸位。

以分拆序作為階段別，可以是四階段移動，底盤組順序為 $A1B1 \rightarrow B1A1 \rightarrow C1 \rightarrow A1$ 。

表 6 四階段拆組 6 步解移動次序

起始狀態	第 1 次 2 步	第 2 次 2 步	第 3 次 1 步	第 4 次 1 步
階段別	階段一	階段二	階段三	階段四
				
狀態	$A1 \rightarrow B1$ 讓位	$B1$ 歸位 $\rightarrow A1$	$C1$ 歸位	$A1$ 歸位

比較方法一和方法二，步數最少的是方法一。比較方法二和三，一樣是拆組 6 步解，拆組次數最少的是方法三，底盤最快歸位。

(二)尋找多層多碟最少步數的可能性

我們發現當疊高組數大於 2 時，盤組來回要考慮上下兩組是否編號相同，盤編號與柱號是否相同。如果相同，A 盤回到 I 柱，A1 與 A2 或 B1 與 B2 或 C1 與 C2 同在一柱可以減少步數。

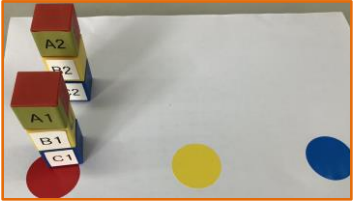
D = 2 時我們找出三種底盤歸位方法，分別得到最少步數解，方法如下：

方法 1. 以底盤 5 步逐一歸位為基礎

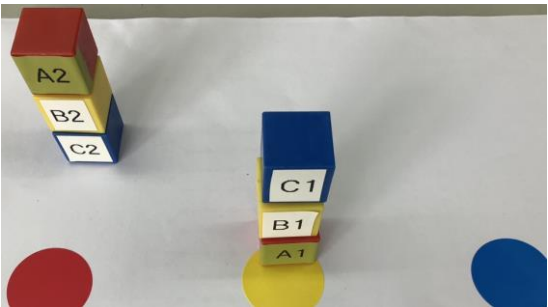
根據 D = 1 方法 1 的 5 步逐一歸位解移動序，以此得到 25 步解。底盤逐一歸位 5 步解順序：

$A1 \rightarrow B1 \rightarrow A1 \rightarrow C1 \rightarrow A1$ ，在兩層的時候底盤移動順序為 $A2 \rightarrow B2 \rightarrow A2 \rightarrow C2 \rightarrow A2$ ，總步數計算 $\overline{1} \rightarrow \underline{A2} \rightarrow \overline{1}$

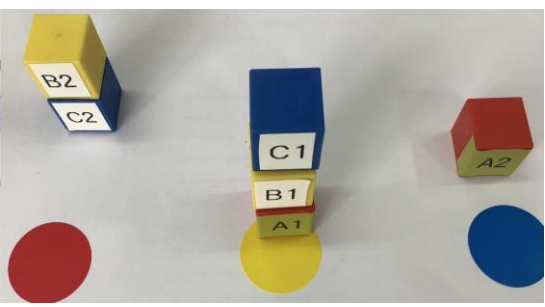
$\rightarrow \underline{B2} \rightarrow \overline{1} \rightarrow \underline{A2} \rightarrow \overline{1} \rightarrow \underline{C2} \rightarrow \overline{1} \rightarrow \underline{A2} \rightarrow C1 \rightarrow B1 \rightarrow C1 \rightarrow A1 \rightarrow C1$ ， $D_H(1) = 1$ 。



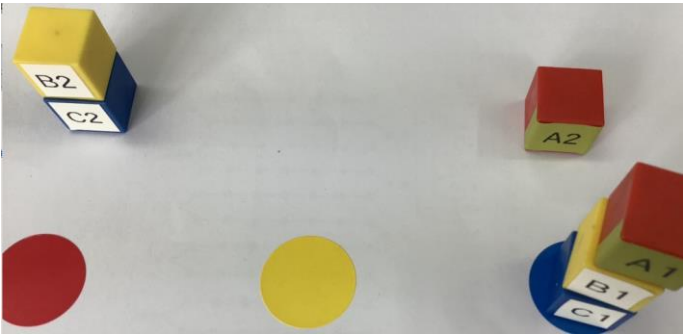
起始狀態



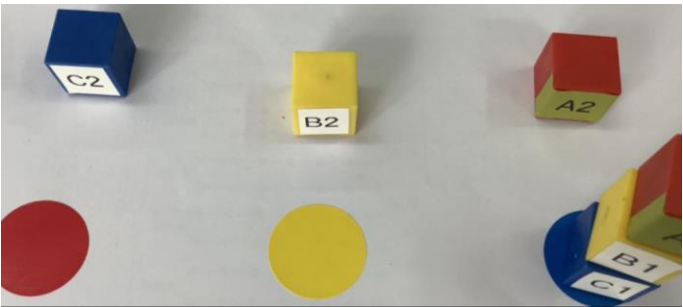
$\overline{1}$ 到 II 讓位： $A1 \rightarrow B1 \rightarrow C1$



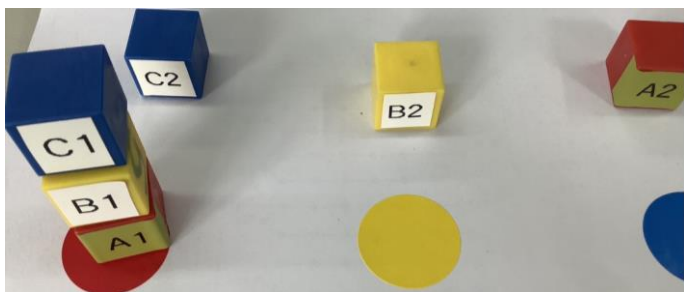
$\underline{A2}$ 到 III 讓位(第 1 次)



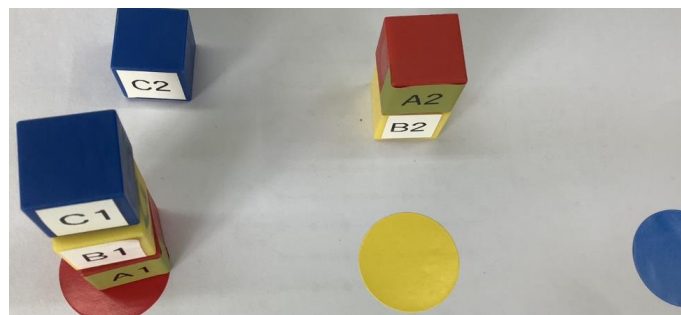
$\overline{1}$ 到 III 讓位： $C1 \rightarrow B1 \rightarrow A1$



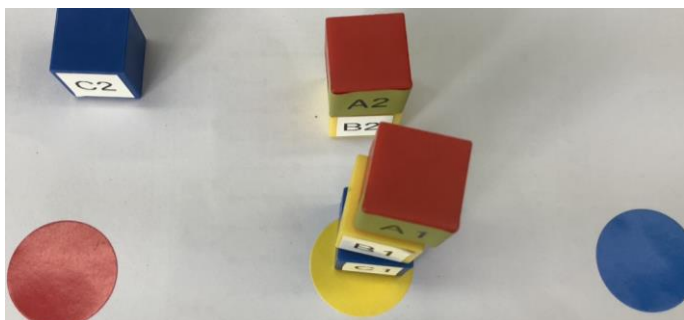
$\underline{B2}$ 底盤歸位



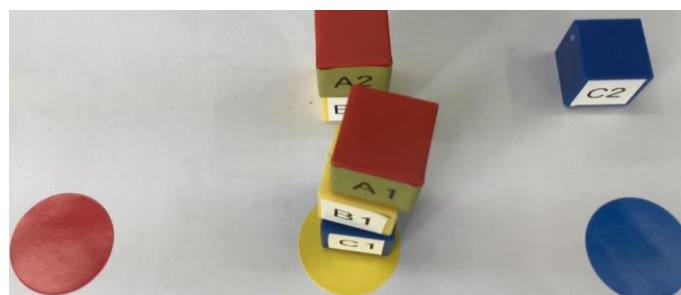
1 到 I 讓位：A1→B1→C1



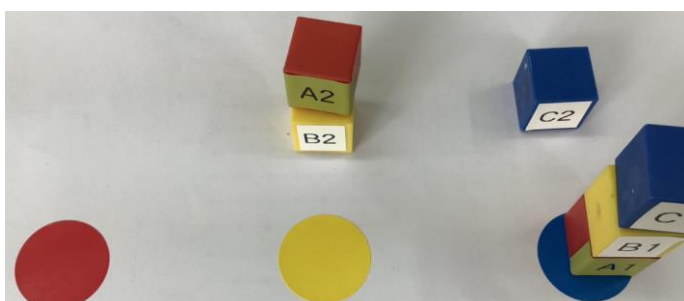
A2 到 II 讓位(第 2 次)



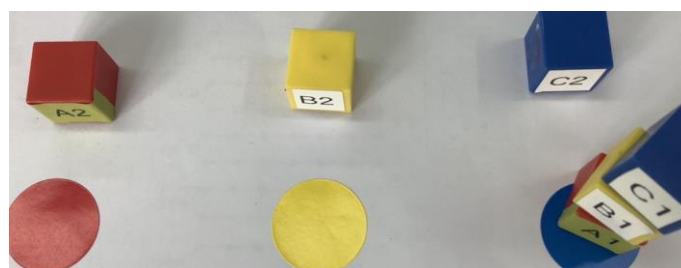
1 到 II 讓位：C1→B1→A1



C2 底盤歸位



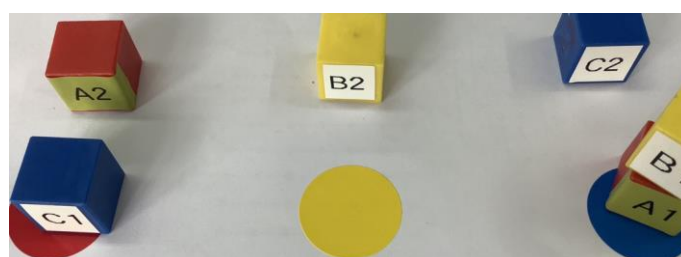
1 到 III 讓位：A1→B1→C1



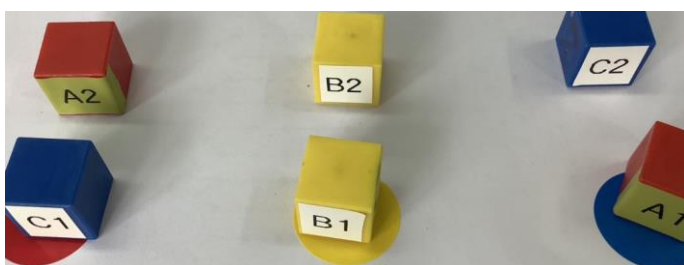
A2 底盤歸位



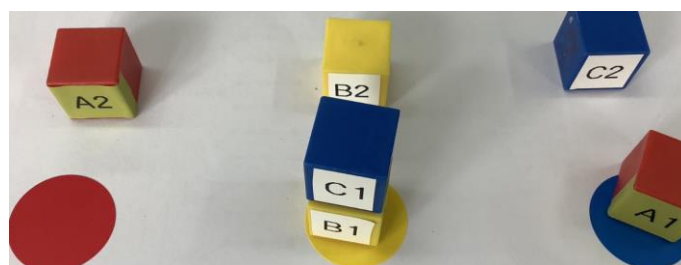
C2、A1 歸位，第 1 盤組必須 5 步回歸



C1 讓位



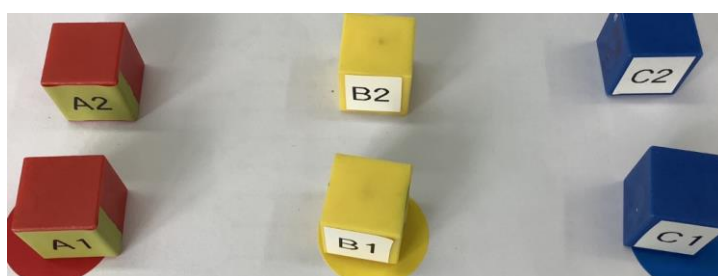
B1 歸位



C1 讓位



A1 歸位



C1 歸位

圖 14 兩層三色塔的底盤歸位方法 1 實作紀錄

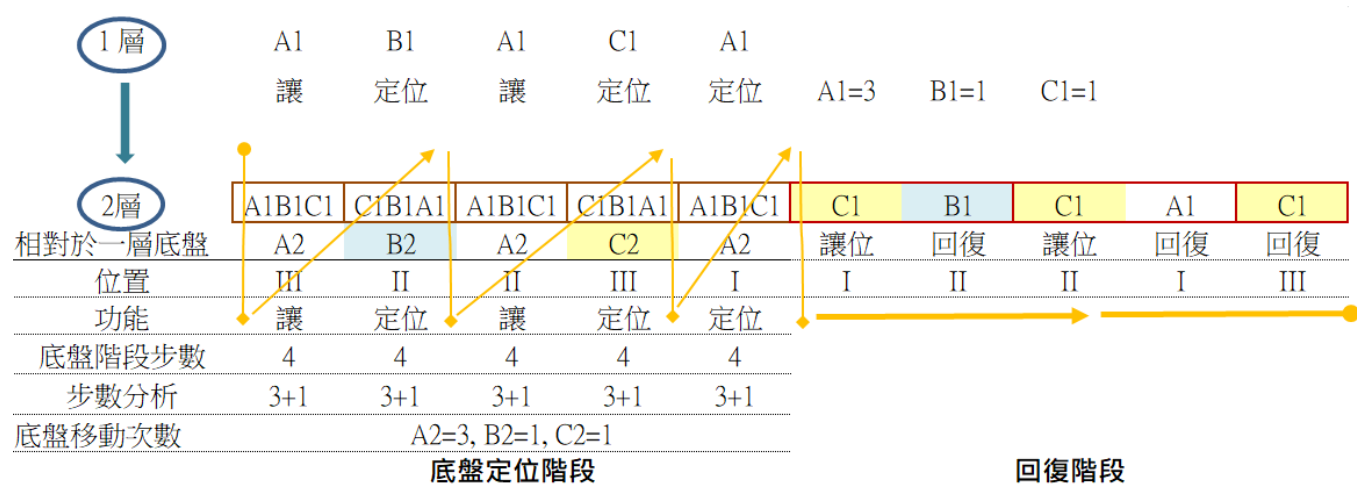


圖 15 2 組 25 步解

總步數必要條件是底盤 5 階段，一定會有上盤 $\overline{1}$ 和 $\overline{1}$ 隨著底盤成組移動， $\overline{1}$ 表示 $D_H(1)$ ，計有 5 次，一次 3 步， $(\overline{1} \times 5 + \text{底盤}) + \text{上盤}$ 。C1→B1→C1→A1→C1 與 ABC2 如果是互斥狀態，最少回歸步數是 5 步，標示為#；如果是相容狀態，最少回歸步數僅需要 2 步，標示為□。

方法一分派至指定柱狀態得到 $(\overline{1} \times 5 + \text{ABC2}) + \text{ABC2} \#$

$$(3 \times D_H(1) \times 5 + 5) + 5 = (3 \times 1 \times 5 + 5) + 5 = 25$$

故方法 1 得到 25 步解。

方法 2. 以底盤五階段 6 步拆組歸位為基礎

根據D = 1方法 2 五階段拆組 6 步解，得到 23 步解。我們以 1 次拆組移動為基礎，底盤組順序為A1B1→C1→B1→A1→B1，D = 2時底盤移動序為A2B2→C2→B2→A2→B2。總步數計算 $\overline{1} \rightarrow \text{A2B2} \rightarrow \overline{1} \rightarrow \text{C2} \rightarrow \overline{1} \rightarrow \text{B2} \rightarrow \overline{1} \rightarrow \text{A2} \rightarrow \overline{1} \rightarrow \text{B2} \rightarrow \text{C1} \rightarrow \text{B1}$ ， $D_H(1) = 1$ 。ABC1 開始回歸步驟時，D1 和 D2 是相容狀態，最少回歸步數僅需要 2 步。

表 7 兩層底盤採方法 2 歸位順序表

$D_H(1)$	D_n	$D_H(1)$	D_n	$D_H(1)$	D_n	$D_H(1)$	D_n	$D_H(1)$	D_n	盤相容□	
$\overline{1}$	A2B2	$\overline{1}$	C2	$\overline{1}$	B2	$\overline{1}$	A2	$\overline{1}$	B2	C1	B1
III	II	II	III	I	III	III	I	I	II	III	II

方法 2 分派至指定柱狀態得到 $(\overline{1} \times 5 + \text{ABC2}) + \text{ABC2} \square$

$$\Rightarrow (3 \times D_H(1) \times 5 + 6) + 5 = (3 \times 1 \times 5 + 6) + 2 = 23, \quad \text{故方法 2 得到 23 步解。}$$

方法 3. 以底盤四階段拆組 6 步解為基礎

根據 $D = 1$ 方法 3 四階段拆組 6 步解，得到 20 步解，是三種方法中部數最少的移動序。我們以 2 次拆組移動為基礎，底盤組順序為 $A1B1 \rightarrow B1A1 \rightarrow C1 \rightarrow A1$ ， $D = 2$ 時底盤移動序為 $A2B2 \rightarrow B2A2 \rightarrow C2 \rightarrow A2$ 。總步數計算 $\bar{1} \rightarrow A2B2 \rightarrow \bar{1} \rightarrow B2A2 \rightarrow \bar{1} \rightarrow C2 \rightarrow \bar{1} \rightarrow A2 \rightarrow C1 \rightarrow B1$ ， $H_3(1) = 1$ ， $D1$ 和 $D2$ 是相容狀態。

表 8 兩層底盤採方法 3 歸位順序表

$D_H(1)$	D_n	$D_H(1)$	D_n	$D_H(1)$	D_n	$D_H(1)$	D_n	圖例	盤相容□	
$\bar{1}$	A2B2	$\bar{1}$	B2A2	$\bar{1}$	C2	$\bar{1}$	A2		C1	B1
III	II	I	II	II	III	III	I		III	II

因為 $(\bar{1} \times 4 + ABC2) + ABC2 \sqsupset \Rightarrow (3 \times D_H(1) \times 4 + 6) + 2 = (3 \times 1 \times 4 + 6) + 2 = 20$ ，故方法 3 得到 20 步解。

綜上，移動步數方法 1 < 方法 2 < 方法 3。

我們猜想，如果層數 $D \geq 2$ ，實際移動次數不會僅僅像 $D=1,2$ 這麼簡單，柱和層之間、層和層之間可能會有上下相容或互斥會影響最少步數結果，我們透過實作紀錄檢查。

D=3 的發現

隨著盤數越來越多，組合可能性也增加。我們逐一實作檢查，發現盤柱相容、相斥可能會影響最少步數結果， $D=2$ 方法 1. 移動序是 $\bar{1} \rightarrow A2 \rightarrow \bar{1} \rightarrow B2 \rightarrow \bar{1} \rightarrow A2 \rightarrow \bar{1} \rightarrow C2 \rightarrow \bar{1} \rightarrow A2 \rightarrow C1 \rightarrow B1 \rightarrow C1 \rightarrow A1 \rightarrow C1$ ，那麼 $D=3$ 會有哪些狀況呢？我們把紀錄列表分析如下。

表 9 D=3 底盤採方法 1. 歸位順序之 1

底盤 D_3 歸位				$D_2 \rightarrow D_1$ 歸位															
方法 1.5 步逐一歸位				D_2 採方法 1.5 步逐一歸位				D_2 採方法(二)6 步拆組歸位 $D_2 \rightarrow D_1$											
$\overline{1} \overline{2} \overline{1}$	A3	III	C1 C2 コ、 C3 III コ、 A2 III	II	$\overline{1}$	C2	I	A1 コ A2 コ A3 コ I	D_1	C1	B1	I	$\overline{1}$	C2B2	II	C2	C1	I	
$\overline{1} \overline{2} \overline{1}$	B3	II		I	$\overline{1}$	B2	II					II	II	$\overline{1}$	A2	I	コ	B1	II
$\overline{1} \overline{2} \overline{1}$	A3	III		III	$\overline{1}$	C2	II					III	III	$\overline{1}$	B2	I	コ	C1	II
$\overline{1} \overline{2} \overline{1}$	C3	III		II	$\overline{1}$	A2	I					I	I	$\overline{1}$	C2	III	A1	A1	I
$\overline{1} \overline{2} \overline{1}$	A3	I		I	$\overline{1}$	C2	III					III	III	$\overline{1}$	B2	II	⧻ C2	C1	III
$D_H(2)$	5			$D_H(2)$	5				2										
A1 B1 C1 C2 B2 A2 A3 B3 C3				C1 B1 A1 A2 A3 B2 B3 C2 C3				C1 B1 A1 A2 A3 B2 B3 C2 C3						ABC1 ⧻ III 5 步					
⧻ 5 步				コ 2 步															

【發現】第 2 層有 3 種移動方式，底盤移動完畢選擇方法 1、方法 2 或方法 3 出現盤柱相容或相斥，以下說明相容互斥影響不同方法組合結果。

表 10 D_3 方法 1+1 計算結果

組合方法	步數計算	
D3	$(\vec{1}\vec{2}\vec{1}) \times 5 + 5$	$(3 \times D_H(2) \times 5 + 5) + (3 \times D_H(1) \times 5 + 5) + 2$ $= (3 \times 3 \times 5 + 5) + (3 \times 1 \times 5 + 5) + 2$ $= 3 \times (3 \times 5 + 1 \times 5) + 5 + 5 + 2 = 72$
D3→D2 ㄧ	$\vec{1} \times 5 + 5$	
D2→D1 ㄣ	2	

表 11 D_3 方法 1+2 計算結果

組合方法	步數計算	
D3	$(\vec{1}\vec{2}\vec{1}) \times 5 + 5$	$(3 \times D_H(2) \times 5 + 5) + (3 \times D_H(1) \times 5 + 6) + 5$ $= (3 \times 3 \times 5 + 5) + (3 \times 1 \times 5 + 6) + 5$ $= 3 \times (3 \times 5 + 1 \times 5) + 5 + 6 + 5 = 76$
D3→D2 ㄧ	$\vec{1} \times 5 + 6$	
D2→D1 ㄧ	5	

【猜想】方法 1 和方法 3 併用，因為第 2 層只有四個階段，會不會得到最少步數？

表 12 $D=3$ 底盤採方法 1.歸位順序之 2

$D_2 \rightarrow D_1$ 歸位							D_1	D_2	D_3
D_2 採方法 3 的 6 步 2 次拆組歸位 $D_2 \rightarrow D_1$								ㄧ	ㄧ
II	$\vec{1}$	C2B2	I	C1	A1	III			
III	$\vec{1}$	B2C2	II	ㄧ	B1	II			
II	$\vec{1}$	A2	I	且	A1	II			
I	$\vec{1}$	C2	III	ㄧ	C1	III			
				I	A1	I			

表 13 D_3 方法 1+(三) 計算結果

組合方法	步數計算	
D_2 方法 1.+(三)	$(\vec{1}\vec{2}\vec{1}) \times 5 + 5$	$(3 \times D_H(2) \times 5 + 5) + (3 \times D_H(1) \times 4 + 6) + 5$ $= [3 \times (2^0 + 2^1) \times 5 + 5] + (3 \times 2^0 \times 4 + 6) + 5$ $= (3 \times 3 \times 5 + 5) + (3 \times 1 \times 4 + 6) + 5$ $= 73$
D3→D2 ㄧ	$\vec{1} \times 4 + 6$	
D2→D1 ㄧ	5	

【發現】如果選擇方法 1 移動底盤，第 2 層會有 3 種移動方式，底盤移動完畢選擇方法 1、方法 2 或方法 3，會隨著出現盤柱相容或相斥，影響組合結果。

移動步數：方法 1+(一) < 方法 1+(三) < 方法 1+(二)

【小結】底盤採方法 1.最少搬移次數是 72 步，最佳組合是方法 1+(一)。

方法二： $\vec{1} \rightarrow \underline{A2B2} \rightarrow \vec{1} \rightarrow \underline{C2} \rightarrow \vec{1} \rightarrow \underline{B2} \rightarrow \vec{1} \rightarrow \underline{A2} \rightarrow \vec{1} \rightarrow \underline{B2} \rightarrow C1 \rightarrow B$ ，底盤增加 1 盤↓

D=3 延伸為：

$\vec{1} \vec{2} \vec{1} \rightarrow \underline{A3B3} \rightarrow \vec{1} \vec{2} \vec{1} \rightarrow \underline{C3} \rightarrow \vec{1} \vec{2} \vec{1} \rightarrow \underline{B3} \rightarrow \vec{1} \vec{2} \vec{1} \rightarrow \underline{A3} \rightarrow \vec{1} \vec{2} \vec{1} \rightarrow \underline{B3} \rightarrow \sqsupset \text{或} \# \text{ ABC2} \rightarrow \sqsupset \text{或} \# \text{ ABC1}$

表 14 D=3 底盤方法 2 移動狀態

底盤 D_3 歸位				$D_3 \rightarrow D_2$ 歸位				$D_2 \rightarrow D_1$ 歸位			
方法 2 6 步逐一歸位				$D_3 \sqsupset D_2 \sqsupset D_1$							
III	$\vec{1} \vec{2} \vec{1}$	A3B3	II	C1 C2 □、 A2 A3 I □	II	$\vec{1}$	C2	I	C1 C2 C3 □ III	A1	
II	$\vec{1} \vec{2} \vec{1}$	C3	III		III	$\vec{1}$	B2	II		B1	
I	$\vec{1} \vec{2} \vec{1}$	B3	III								
III	$\vec{1} \vec{2} \vec{1}$	A3	I								
I	$\vec{1} \vec{2} \vec{1}$	B3	II								
$D_H(2) \times 5 + 6$				$D_H(1) \times 2 + 2$				2			
				□ 2 步					□ 2 步		

表 15 方法 2 搬移步數計算

五階段 6 步	步數計算	
D3	$(\vec{1} \vec{2} \vec{1}) \times 5 + 6$	$(3 \times D_H(2) \times 5 + 6) + (3 \times D_H(1) \times 2 + 2) + 2$ $= [3 \times (2^0 + 2^1) \times 5 + 6] + (3 \times 2^0 \times 2 + 2) + 2$ $= (3 \times 3 \times 5 + 6) + (3 \times 1 \times 2 + 2) + 2$ $= 61$
D3→D2 □	$\vec{1} \times 2 + 2$	
D2→D1 □	2	

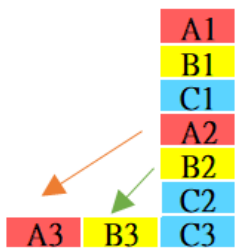
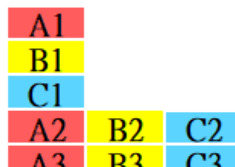
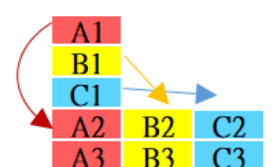
以方法 2 五階段 6 步搬移，我們發現步數相對前述方法少了許多，因為各盤歸位後出現至少兩次相容狀態，柱相容出現 2 次，分別是 A3→A2 和 C3→C2→C1；層相容也出現 2 次，分別是 A 碟在 I 和 C 碟在 III。

方法三： $\vec{1} \rightarrow \underline{A2B2} \rightarrow \vec{1} \rightarrow \underline{B2A2} \rightarrow \vec{1} \rightarrow \underline{C2} \rightarrow \vec{1} \rightarrow \underline{A2} \rightarrow C1 \rightarrow B1 \rightarrow C1 \rightarrow A1 \rightarrow C1$

D=3 延伸為

$\vec{1} \vec{2} \vec{1} \rightarrow \underline{A3B3} \rightarrow \vec{1} \vec{2} \vec{1} \rightarrow \underline{B3A3} \rightarrow \vec{1} \vec{2} \vec{1} \rightarrow \underline{C3} \rightarrow \vec{1} \vec{2} \vec{1} \rightarrow \underline{A3} \rightarrow \square \text{或} \# \text{ABC2} \rightarrow \square \text{或} \# \text{ABC1}$

表 16 D=3 底盤方法 3 移動狀態

底盤 D_3 歸位				$D_3 \rightarrow D_2$ 歸位				$D_2 \rightarrow D_1$ 歸位			
方法 2. 6 步 2 次拆組歸位				$D_3 \sqsupset D_2 \nmid D_1$							
II	$\overrightarrow{1} \overrightarrow{2} \overleftarrow{1}$	A3B3	III	C1 C2 □ 、 A2 A3 I □	II	$\overrightarrow{1}$	A2	I	A2 A3 □ I 、 C2 C3 □ III	A1	III
I	$\overrightarrow{1} \overrightarrow{2} \overleftarrow{1}$	B3A3	II		I	$\overleftarrow{1}$	B2	II		B1	II
II	$\overrightarrow{1} \overrightarrow{2} \overleftarrow{1}$	C3	III							A1	II
III	$\overrightarrow{1} \overrightarrow{2} \overleftarrow{1}$	A3	I							C1	III
										A1	I
$D_H(2) \times 4 + 6$				$D_H(1) \times 2 + 2$				5			
				□ 2 步					$\nmid$ 5 步		

隨著組數增加，步數也增加許多，因為步數太多，我們想出方便的法子，讓成組移動時以實心球表示整組移動，例如實心球●表示一次移動 $A1 \rightarrow B1 \rightarrow C1$ ，因此●移動次數等於 3 步；空心球○表示移動塊數 1~2，並標柱層碟號碼。單獨標號表示只移動單層單塊，列表以便於計算次數。

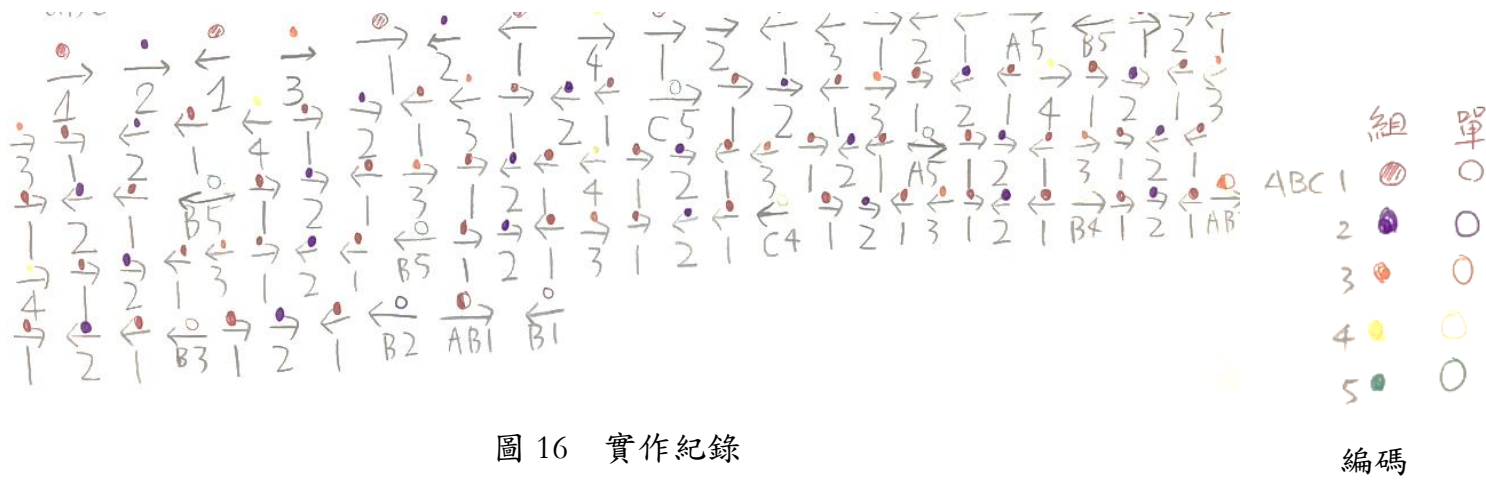


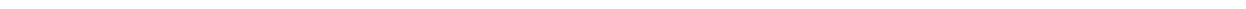
圖 16 實作紀錄

以 3 色 6 組為例，在底盤 A6、B6 或 C6 歸位之前，以上 5 組移動需要步數如下表，第 4 組是一個暫時狀態，可以把 A4B4C4 當作暫時

表 17 依照方法 1 成組移動盤序號與步數計算

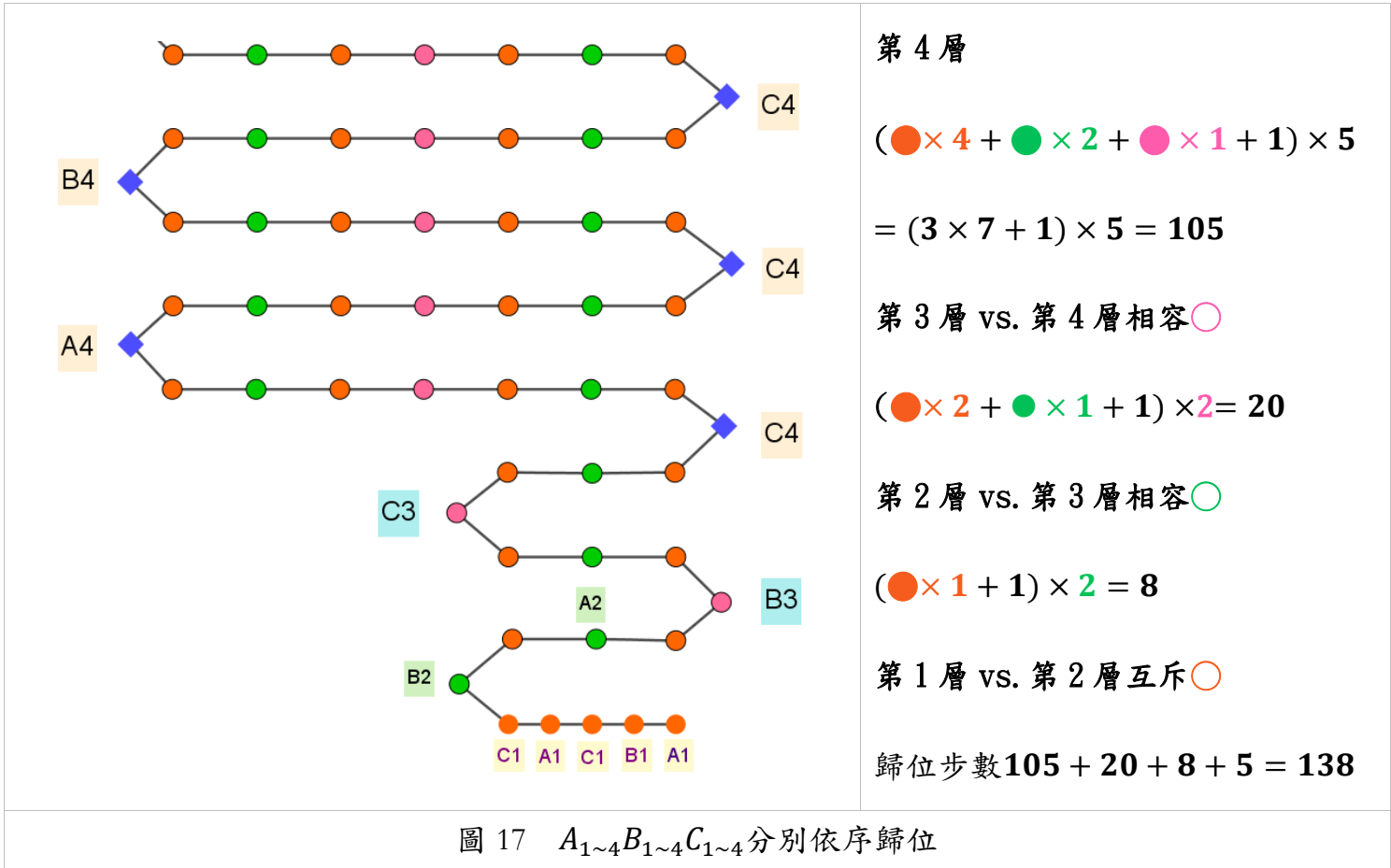
●/○		$3 \times 4 \times 10$	120
ABC1		$= 3 \times 4 \times 10$	
●/○		$3 \times 2 \times 10$	60
ABC2		$= 3 \times 2 \times 10$	
●/○		$3 \times 1 \times 10$	30
ABC3		$= 3 \times 1 \times 10$	
◆/◇		$3 \times 1 \times 5$	15
ABC4		$= 3 \times 1 \times 5$	
●/○		$3 \times 1 \times 5$	15
ABC5		$= 3 \times 1 \times 5$	
▲/△		合計歩数	240
ABC6			

以五層為例，如果每層都採用底盤 5 步歸位方法，底盤 A5、B5、A5、C5、A5 歸位前一定經過



步驟，移動次數多達 240 步。

1. ABC_5 成組移動後的



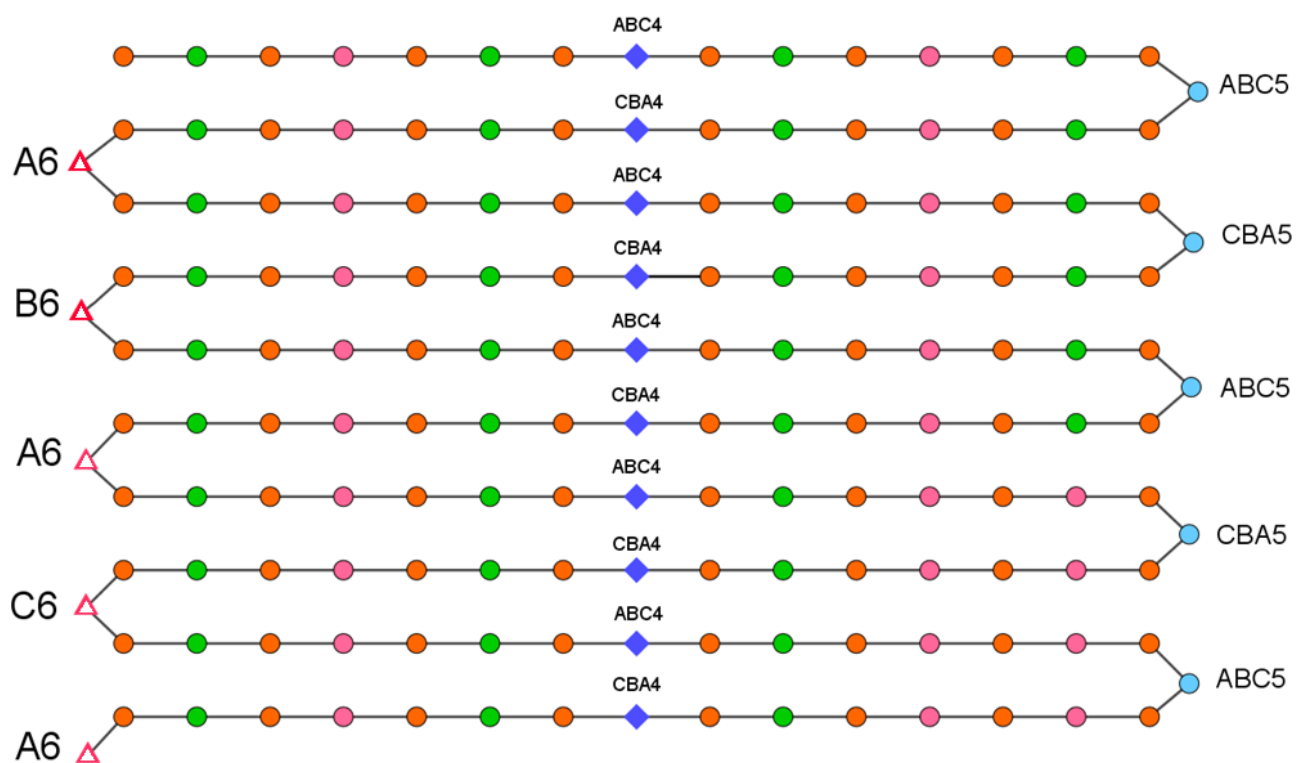


圖 18 6 層以方法 1 歸位圖示

為了加速正確計數，我們把彩球複製到 excel 計算，以底盤歸位方法 1 得到 6 層底盤歸位總步數。

表 18 D_6 計算結果

彩球數(欄×列)							
D_6	列	10	10	10	10	5	5
	欄	8	4	2	1	1	1
	合計	8×10	4×10	2×10	1×10	1×5	1×5

底盤歸位需 460 步數： $D_6 = 3 \times (2^3 \times 10 + 2^2 \times 10 + 2^1 \times 10 + 2^0 \times 10) + 5 + 5$

$$= 3 \times 10 \times (2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) + 10 = 30 \times 15 + 10 = 460$$

底盤歸位方法 1 得到 5 層底盤歸位總步數

表 19 D_5 計算結果

彩球數(欄×列)						
D_5	列	10	10	10	5	5
	欄	4	2	1	1	1
	總數	4×10	2×10	1×10	1×5	1×5

$$3 \times 10 \times (2^2 + 2^1 + 2^0)$$

$$D_5 = 3 \times 10 \times (2^2 + 2^1 + 2^0) + 10 = 30 \times 7 + 10 = 220$$

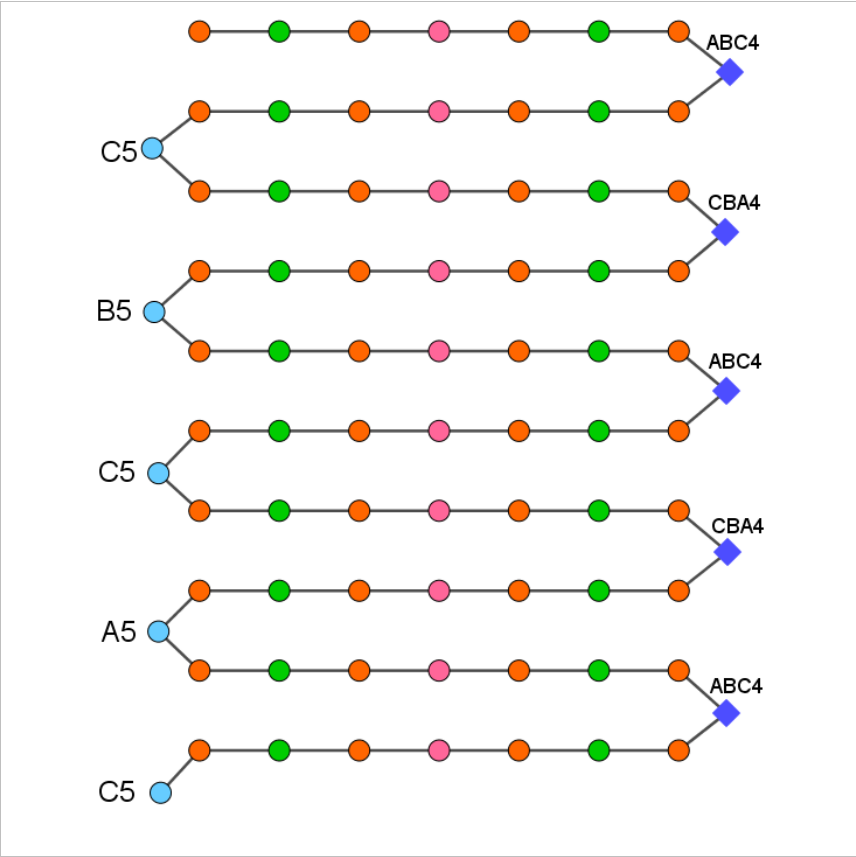


圖 19 D5 歸位

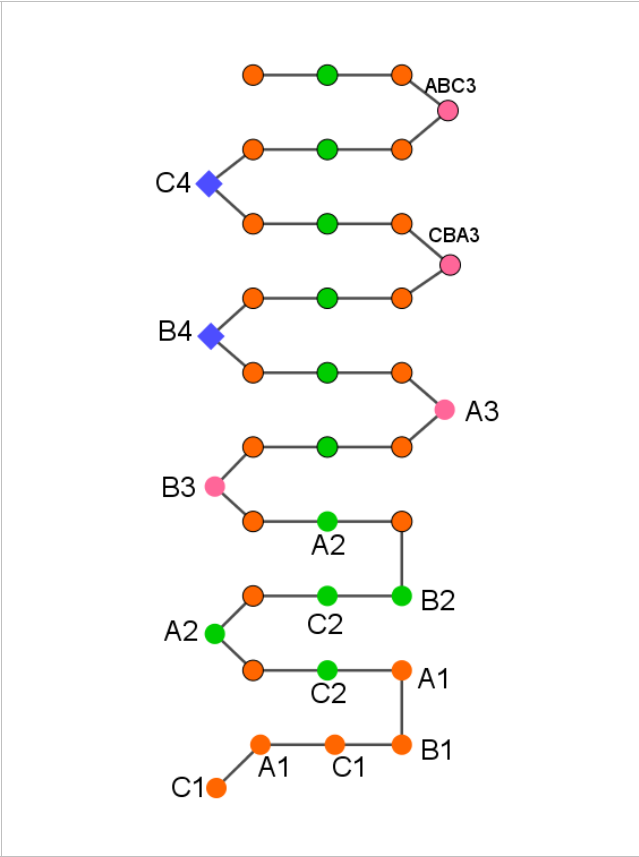


圖 20 D1~4 歸位

圖第 5 層歸位需要(                                     

最上面的第 1 盤「隨著盤數增加」移動次數始終是最多的，如下表**粗體標數字**。

表 21 第 1 盤隨盤數增加以 2^n 累增

盤數↓	移動次數→ $D_H(n)$
1	$D_H(1) = 2^0$
2	$D_H(2) = 2^0 + 2^1$
3	$D_H(3) = 2^0 + 2^1 + 2^2$
4	$D_H(4) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$
5	$D_H(5) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$
6	$D_H(6) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$
7	$D_H(7) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$
8	$D_H(8) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$
9	$D_H(9) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$
10	$D_H(10) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$
11	$D_H(11) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$

$$D_H(1) = 1 = 2^0,$$

$$D_H(2) = D_H(1) + 2^1 = D_H(1) + 2^{2-1} = 2^0 + 2^1,$$

$$D_H(3) = D_H(2) + 2^2 = D_H(2) + 2^{3-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2, \dots$$

$$D_H(10) = D_H(9) + 2^9 = D_H(9) + 2^{10-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9,$$

⋮

$$D_H(n) = D_H(n-1) + 2^{n-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

The image shows a handwritten derivation of the formula for the sum of powers of 2. It starts with the equation $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$. Below this, the same equation is repeated, shifted one position to the right, and then subtracted from the first equation. The terms $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{n-2}$ cancel out, leaving $-S = 2^{n-1} - 2^0$. This is then rearranged to $S = 2^n - 2^0 = 2^n - 1$.

圖 21 用消去法解 $\Sigma 2^n$ 通式

(二) 層層相容或互斥？—尋找最少步數的可能性

底盤歸位清楚三種操作方法之後，我們開始覺察到，在盤數少的時候倒數 2 盤各自歸位時 D_{n-2} 與 D_{n-1} 的狀態有關，所以我們針對了影響步數的因素命名：相容和互斥兩種狀態並標記為標記□、**#**。

以六層為例，如圖，III 柱是已經歸位的第 5 第 6 層，ABC4 就視為底盤，底盤與柱相容並且 C4 和 C5 相容，因此同層的 B4 和 A4 可以採一層最少步數歸位，也就是方法 1.5 步逐一歸位，再由於相容狀態，可以減少 3 步，記為 $D_4 \square = (5-3)=2$ 步。C3 與第 4 層第一碟 A4 相對，C3 阻隔 A4，勢必增加移動次數，呈現打散回歸 5 次。

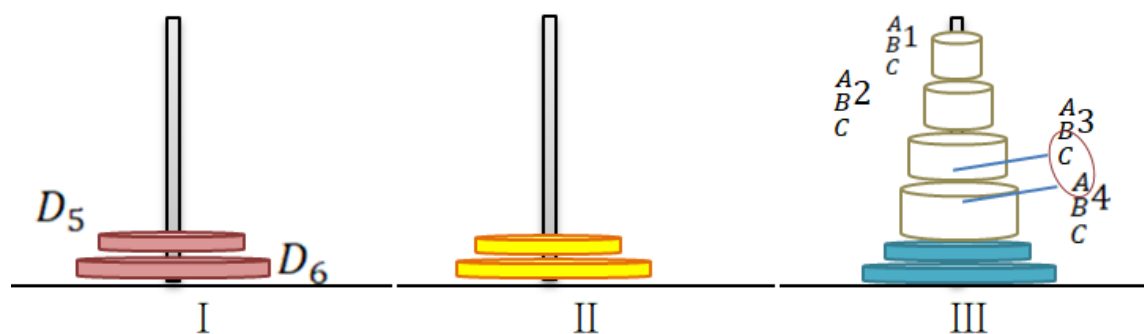


圖 22 D_5D_6 歸位後狀態

我們逐層檢查相容互斥對三色塔移動的影響，發現**相容狀態包含「層相容」和「柱相容」**確實能夠有效減少步數以四層三色塔將各層方法組合全部列出如表 22~23。

$D=4$ ，當底盤以方法 1 搬移逐層檢查 3 種方法存在與相容互斥狀態， $(D_4, D_3, D_2, D_1)=(\text{方法 1}, 1, 1, 1)$ 表示四層都是以方法 1 搬移。

表 22 四層三色塔各層間組合結果之 1

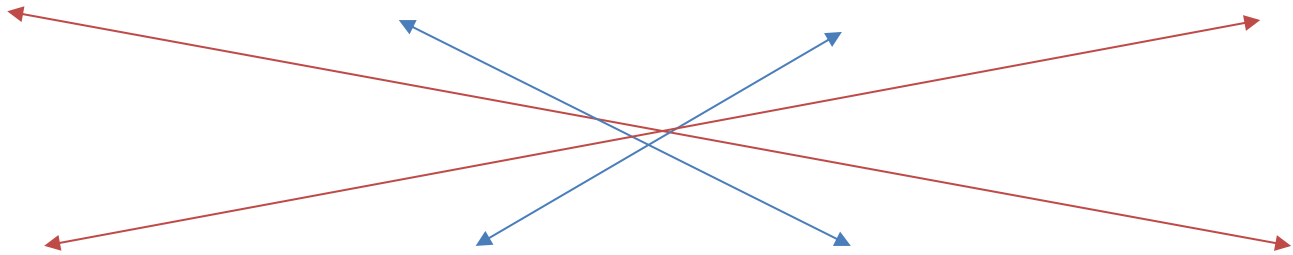
各層狀態	(1,1,1,1)	(1,2,1,1)	(1,2,2,1)	
D_4	成組搬移 $1213121=D_H(3)=7$			A1 B1 C1 A2 B2 C2 C3 B3 A3 A4 B4 C4
	$\# A4/III \rightarrow B4/II \rightarrow A4/II \rightarrow C4/III \rightarrow A4/I$			
D_3	成組搬移 $121=D_H(2)=3$			
	$\# C3 \rightarrow B3 \rightarrow C3 \rightarrow A3 \rightarrow C3$	$\# C3B3 \rightarrow A3 \rightarrow B3 \rightarrow C3 \rightarrow B3$		
	$I \rightarrow II \rightarrow II \rightarrow I \rightarrow III$	$II \rightarrow I \rightarrow I \rightarrow III \rightarrow II$		
D_2	成組搬移 $1=D_H(1)=1$			
	$\square C2 \rightarrow B2$	$\# C2 \rightarrow B2 \rightarrow C2 \rightarrow A2 \rightarrow C2$	$\# C2B2 \rightarrow A2 \rightarrow B2 \rightarrow C2 \rightarrow B2$	
D_1	$\square A1 \rightarrow B1$	$\square C1 \rightarrow B1$	$\# C1 \rightarrow B1 \rightarrow C1 \rightarrow A1 \rightarrow C1$	
D_4 步數	$3 \times 7 \times 5 + 5 = 110$			
D_3 步數	$3 \times 3 \times 5 + 5 = 50$	$3 \times 3 \times 5 + 5 = 51$	$3 \times 3 \times 5 + 5 = 51$	
D_2 步數	$3 \times 1 \times 2 + 2 = 8$	$3 \times 1 \times 5 + 5 = 20$	$3 \times 1 \times 5 + 6 = 21$	
D_1 步數	2	2	5	
$D_4 + D_3 + D_2 + D_1$	$110 + 50 + 8 + 2 = 170$	$110 + 51 + 20 + 2 = 183$	$110 + 51 + 21 + 5 = 187$	
步數排序 少→多	①	④	⑥	

表 22 四層三色塔各層間組合結果之 2

各層狀態	(1,2,3,1)	(1,3,1,1)	(1,3,2,1)
D_4	$1213121=D_H(3) = 7$		
	$\#A4/III \rightarrow B4/II \rightarrow A4/II \rightarrow C4/III \rightarrow A4/I$		
D_3	$121=D_H(2) = 3$		
	$\#C3B3 \rightarrow A3 \rightarrow B3 \rightarrow C3 \rightarrow B3$	$\#C3B3 \rightarrow B3C3 \rightarrow A3 \rightarrow C3$	
D_2	成組搬移 $1=D_H(1) = 1$		
	$\#C2B2 \rightarrow B2C2 \rightarrow A2 \rightarrow C2$	$\#A2 \rightarrow B2 \rightarrow A2 \rightarrow C2 \rightarrow A2$	$\#A2B2 \rightarrow C2 \rightarrow B2 \rightarrow A2 \rightarrow B2$
D_1	$\#A1 \rightarrow B1 \rightarrow A1 \rightarrow C1 \rightarrow A1$	$\#A1 \rightarrow B1 \rightarrow A1 \rightarrow C1 \rightarrow A1$	$\sqsubset C1 \rightarrow B1$
D_4 步數	$3 \times 7 \times 5 + 5 = 110$		
D_3 步數	$3 \times 3 \times 5 + 6 = 51$	$3 \times 3 \times 4 + 6 = 42$	$3 \times 3 \times 4 + 6 = 42$
D_2 步數	$3 \times 1 \times 4 + 6 = 18$	$3 \times 1 \times 5 + 5 = 20$	$3 \times 1 \times 5 + 6 = 21$
D_1 步數	5	5	2
總和	$110 + 51 + 18 + 5 = 184$	$110 + 42 + 20 + 5 = 177$	$110 + 42 + 21 + 2 = 175$
步數排序 少→多	⑤	③	②

四層以上越來越複雜，組合可能性也越來越多，但會受到相容相斥步數就會被限制。我們以三層歸位後的兩層判斷擺放不同柱對步數的影響。

$\vec{1} \vec{2}$ 在 I	$\vec{1} \vec{2}$ 在 I	$\vec{1} \vec{2}$ 在 I	$\vec{1} \vec{2}$ 在 I
$\vec{1} \rightarrow C2B2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow B2 \rightarrow C1 \rightarrow B1$	$\vec{1} \rightarrow C2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow B2 \rightarrow A1 \rightarrow B1$	$\vec{1} \rightarrow A2B2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow B2A2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow C2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow C1 \rightarrow B1 \rightarrow C1 \rightarrow A1 \rightarrow C1$	$\vec{1} \rightarrow A2B2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow B2A2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow C2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow A2 \rightarrow A1 \rightarrow B1$
$A1 \sqsupset A2$	$A2 \sqsupset A3$ 、 $C1 \sqsupset C2$	$C2 \# I$ 、 $C2 \# A3$	$C1 \# A2$ 、 $C2 \# A3 \# I$
柱相容、拆組法 11 步	柱相容、逐步歸位 10 步	柱相斥、拆組法 23 步	20



$\vec{1} \vec{2}$ 在 III	$\vec{1} \vec{2}$ 在 I 在 III	$\vec{1} \vec{2}$ 在 III	$\vec{1} \vec{2}$ 在 III
$\vec{1} \rightarrow C2B2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow B2C2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow A2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow C2 \rightarrow C1 \rightarrow B1$	$\vec{1} \rightarrow C2B2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow B2C2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow A2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow C2 \rightarrow A1 \rightarrow B1 \rightarrow A1 \rightarrow C1 \rightarrow A1$	$\vec{1} \rightarrow A2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow B2 \rightarrow C1 \rightarrow B1$	$\vec{1} \rightarrow A2B2 \rightarrow \vec{1} \rightarrow B2 \rightarrow A1 \rightarrow B1$
$A1 \# C2$ 、 $A2 \# C3 \# III$	$C2 \# I$ 、 $C2 \# A2$	$A1 \sqsupset A2$ 、 $C2 \sqsupset C3$	$C1 \sqsupset C2$
20 步	柱相斥、拆組法 23 步	柱相容、逐步歸位 10 步	柱相容、拆組法 11 步

捌、結論

一、傳統河內塔移動規律。從盤數推得 $a_n=2a_{n-1}+1$ ；解通式得到 $D_H(n)=2^n-1$ 。

二、三色塔搬移模式與規律：

我們得到 3 種搬移方式，分別可就方法組合得到步數，並從中得到最少移動步數組合方法。

方法 1 5 步逐一歸位解，搬移序為 $A_n \rightarrow B_n \rightarrow A_n \rightarrow C_n \rightarrow A_n$ 。

方法 2 五階段拆組 6 步解，搬移序為 $A_n B_n \rightarrow C_n \rightarrow B_n \rightarrow A_n \rightarrow B_n$ 。

方法 3 四階段拆組 6 步解，搬移序為 $A_n B_n \rightarrow B_n A_n \rightarrow C_n \rightarrow A_n \rightarrow \sqsupset$ 或 $\# ABC_{n-2} \rightarrow \sqsupset$ 或 $\# ABC_{n-1}$ 。

三、三色塔計算步數時可利用 D_n 底盤 $n-1$ 可推得 $D_1 \sim D_{n-1}$ 伴隨三柱河內塔單塔 $(2^{n-1} - 1) \times$ 底盤搬移次序數，以此推得三色塔底層歸位最少步數規律。

四、三色塔歸位步數計算尚須逐一檢視**組相容□**、**組相斥#**、**柱相容□**、**柱相斥#**，相容相斥狀態會影響底盤以上各盤歸位時步數。相容步數5-3，相斥步數最多5步。

玖、參考文獻

- [1] 陳彥程、林威愷等。全國中小學科學展覽會第60屆作品說明書，國小組數學科，以降柱法破解任意柱數與盤數的河內塔。https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-080414.pdf
- [2] 林紘毅、周子皓等。全國中小學科學展覽會第52屆作品說明書，國小組數學科，三柱鼎立——三柱搬盤遊戲最佳移動模式之探討。https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/080406.pdf