

屏東縣第65屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：方圓之間—魔錶3探秘

關 鍵 詞：對稱性、立柱唯一性、同步轉（最多3個）

編號：A1012

方圓之間—魔錶 3 探秘

摘要

我研究魯比克鐘，想找出最少步數解法，發現：立柱影響連動範圍、鐘面組合數和同步轉，並以阿達瑪矩陣積為工具找出解法。

一、立柱具有唯一性：用於考慮鐘面重疊範圍時， $2 \leq n \leq 8$ 用鐘面集合的交、差集計算；以阿達瑪矩陣積得到全部鐘面連動範圍。

二、對稱性是決定影響唯一圖的關鍵，考慮「雙重對稱」特性，得到 5 種唯一立柱組合。

三、組合數與起始狀態數：無對稱軸時，鐘面有 n 個的組合，組合數為 4^n 個，起始狀態數有 $4^n - 1$ 。有 1 個對稱軸，對稱軸上有 a 個鐘，共有 n 個鐘的鐘面組合，組合數為 $\frac{4^n + 2^{n+a}}{2}$ 個，起始狀態數有 $\frac{4^n + 2^{n+a}}{2} - 1$ 個。

四、鐘面同步轉在考慮立柱唯一性與鐘面對稱性，彼此獨立的鐘面僅有 14 個，指向 0 的最少步數一定是 7 步。

壹、研究動機

學期初的時候老師給我一個 Rubik 原始設計方塊，很巧的是，我也在一個魔方比賽場合遇到友隊對手給我的魔錶，我覺得這個玩具的轉法可能藏著甚麼數學原理，就著手探究起來。

貳、研究目的

- 一、立柱數量對鐘面連動範圍的影響及可影響的連方數量。
- 二、找出所有鐘面組合的可能性以及圖連通特性。
- 三、研究 n 同步轉的條件為何以及指向同一的最少次數。

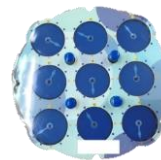


圖 1 魯比克鐘

參、研究設備及器材

- 一、 3×3 魔錶。
- 二、磁鐵版和強力磁鐵自製鐘面，如圖 2-1 和 2-2。
- 三、筆記本、筆和電腦。
- 四、微軟 Excel 程式及 GeoGebra 程式。



圖 2-1 自製 4 指向鐘面



圖 2-2 簡化鐘面

肆、研究過程及方法

研究魔錶的結構和操作方法之後，我採用以下釋義與方法說明：

一、形似魔方的魔錶

魔錶又叫做魯比克鐘(Rubik's Clock, RCK)，我很好奇魔錶與傳統 $1 \times 3 \times 3$ 魔術方塊(Rubik cube)有哪些差異。分析魔錶結構後發現，兩者相同之處是都有上、下兩面 9 個方塊/鐘面。兩者的差別在於魔方前後左右顏色不同，目標是將多色組合的混亂狀態轉動到六個面顏色一致。魔錶則是多了指針，目標是將指向從混亂轉為一致。

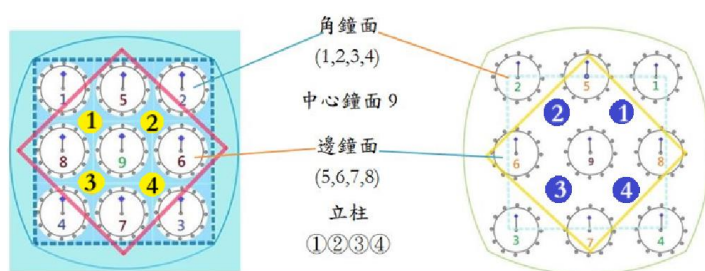


圖 3-1 正面結構

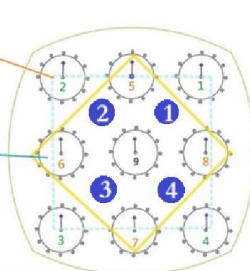


圖 3-2 背面結構

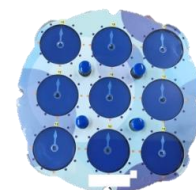


圖 3-3 完成狀態

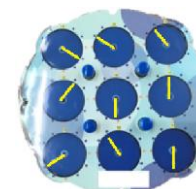


圖 3-4 起始狀態

- (一) 鐘面結構：RCK 上下兩面各有 9 個小鐘，指針與一般時鐘相同
本研究以「mod 4」將鐘面訂為 4 個指向(0,1,2,3)，12 點鐘 $\uparrow 0$ ，
3 點鐘 $\rightarrow 1$ ，6 點鐘 $\downarrow 2$ ，9 點鐘 $\leftarrow 3$ 。
- (二) 立柱：共 4 個，詳圖 3-1，圍繞立柱的鐘面會同步旋轉。
- (三) 鐘面編號有 3 種，角鐘面(代稱 C)、邊鐘面(代稱 E)和中心鐘面(代稱 M)。
- (四) 遊戲規則：任意打散鐘面後，旋轉四個角的旋鈕，把指針的混亂狀態調整至全體指向 12 點鐘(即完成狀態)。
- (五) 找出最少步數：從指針混亂狀態到全部鐘面皆指向 0/12 時，如圖 3-3。所有非完成狀態的其他狀態都可以當作起始狀態，如圖 3-4。

二、文獻回顧

我們從國內外文獻發現，與魔方相關的研究多以群論切入，僅有一篇利用程式解 12 指向解魔錶最少步數，數學分析方法闕如[6]。歷年數學科作品僅有 4 件魔方相關研究，早期有「魔術方塊解法的數學理論」(第 25 屆)[1]利用線性代數中矩陣和向量等工具分析旋轉、組合運算(轉)等轉動法。近期有「簡析魔術方塊 2—魔術方塊公式解之分析」(第 54 屆) [4] 將各方格編號後以速解常見的「層先法」分析步驟通式。

第 47 屆國小組數學科作品—魔術「方塊」變「平面」[2]

第 51 屆國小組數學科作品—神奇的魔術方塊-餘數的應用與探討[3]

前者以摺紙探討色紙上「割線」數量及位置對可露出面數的影響，後者利用自創編碼探討重複同一組轉動後回到原位的轉法，利用最小公倍數計算重複次數。我的研究重點則在於析出異構 n 鐘面，以 $G = (V, E)$ 表示連通與不連通，探討連通性與立柱的關係，進一步解出魔錶指向同一性最少步數及鐘面組合數。

三、解釋名詞

- (一) 對稱：包含將 RCK 翻面的 *Flip*，再細分為以 **x 軸** 為旋轉軸的 *x-Flip*、以 **z 軸** 為旋轉軸的 *z-Flip* 兩種，還有以 **y 軸** 為旋轉軸但不翻面的 *y-turn*。
- (二) 立柱狀態：以 $p(pins)$ 表示，1/0 表示有/無，以 4 元組(4-tuples)表現。 $C(p)$ 是 p 可完成的最大鐘面組合數。
- (三) $I(influence)$ ：指連動範圍，和立柱一起連動的鐘面。 $A(Area)$ 是影響範圍，轉動過程中全部被改變的鐘面。
- (四) ST ：同步轉(Simultaneous Turns)，正面轉動的同時，反面同步進行獨立的轉動。
 $[p;u,d]$ 表示立柱狀態為 p 時，正面立柱轉動 u 格、反面立柱轉動 d 格。
- (五) 阿達瑪矩陣積(Hadamard Product)：兩矩陣 A 和 B 的阿達瑪矩陣積 $A \odot B = C$ 第 i 列第 j 行的元素為 $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ ，也就是將 A 和 B 同位置的元素相乘。
- (六) 集合(set)：由元素(elements)組成的集合體，本研究中，元素為鐘面編號數字。
- (七) 交集(intersection)、聯集(union)：兩個集合 A 和 B 的交集為同時屬於 A 和 B 的元素；聯集則是至少屬於 A 和 B 其中一個的元素。
- (八) 重集(multiset)：同樣一個元素可以重複出現的集合，重複出現的次數叫做重複度(multiplicity)。
- (九) 簡單圖(graph)有點(vertices)和邊(edges)、是有序對 $G = (V, E)$ ：
 1. K_n ： n 點完全圖，每個點都連接到所有其他點。
 2. $\overline{K_n}$ ：有 n 個孤立點的圖，點和點之間沒有連通。
 3. P_n ： P 是路徑(path)，有 n 個點， $n-1$ 條邊。
 4. C_n ：表示 n 點圈，有「起點和終點相同」的 n 點路徑。
 5. W_n ：表示 $n+1$ 點輪，將 C_n 的全部頂點都連接到一個新點後，產生的圖。
 6. $K_{m,n}$ ：完全二分圖，點分成兩個大小為 m, n 的點集，兩點相鄰若且唯若屬於不同點集。

四、研究架構

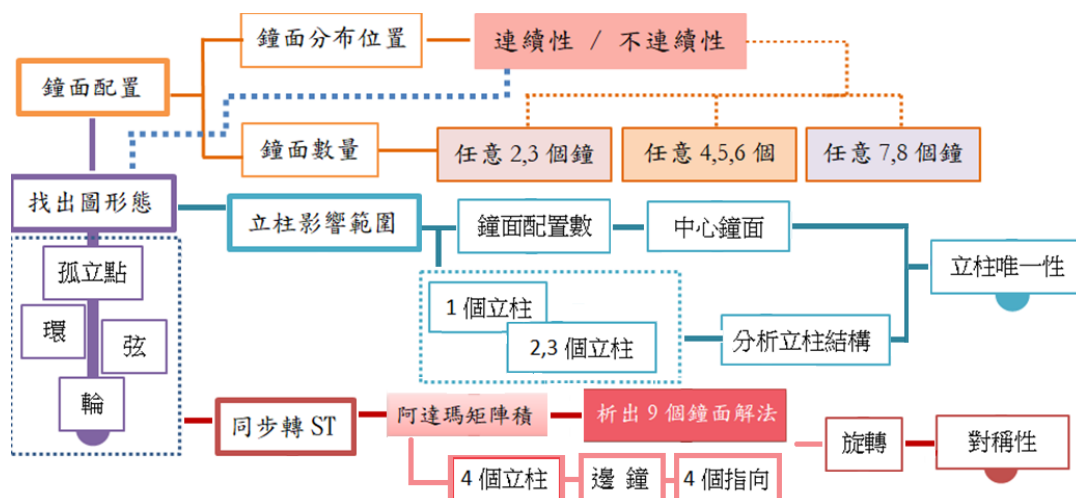


圖 4 本研究架構圖

我在研究過程中發現圖同構檢視唯一圖的數量改變鐘面狀態的方法，再進一步找出解釋交集和差集的方法。最後，分析擁有對稱軸的鐘面組合的組合數與起始狀態數。

五、鐘面配置

我以點代表鐘面，形成連續與不連續 3 點圖，Side 同構圖有 1E2C、Central 同構圖有 1M2E，Diagonal 同構圖有 1M2C。

我的比對方法是把鐘面 9 視為座標中心，n 鐘面數不管連續性全部成組放入座標中比對。以 3 個鐘面為例，將鐘面簡化為點，對稱軸 3 有邊對稱軸、角對稱軸、斜角對稱軸，對應到同構類型，得到三種唯一圖，我把圖命名為「邊連線 Side」、「中心連線 Central」和「對角連線 Diagonal」。

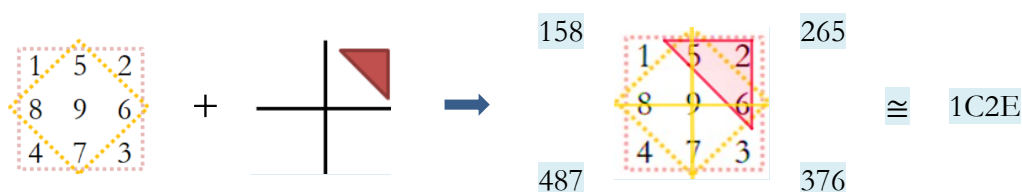
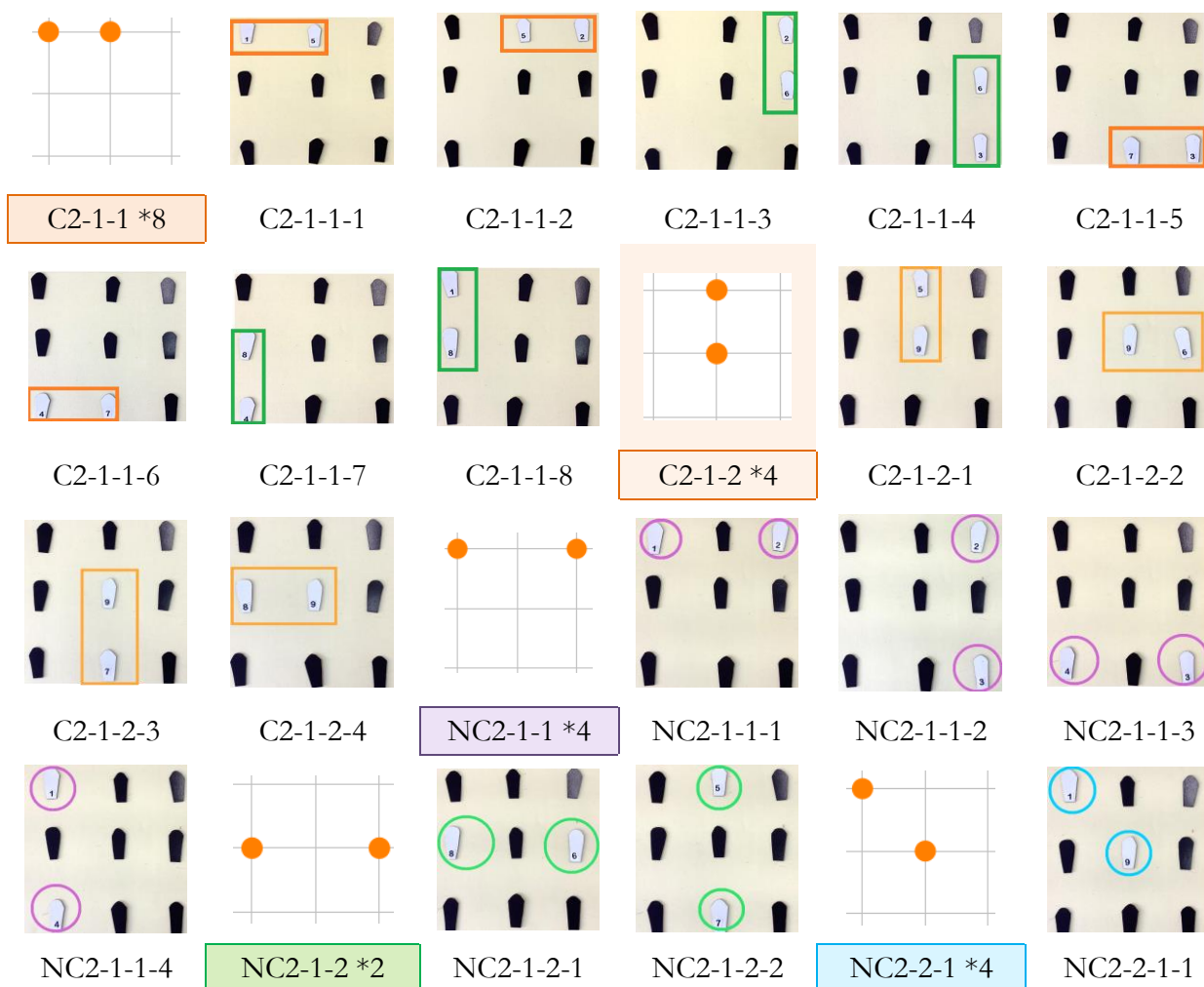
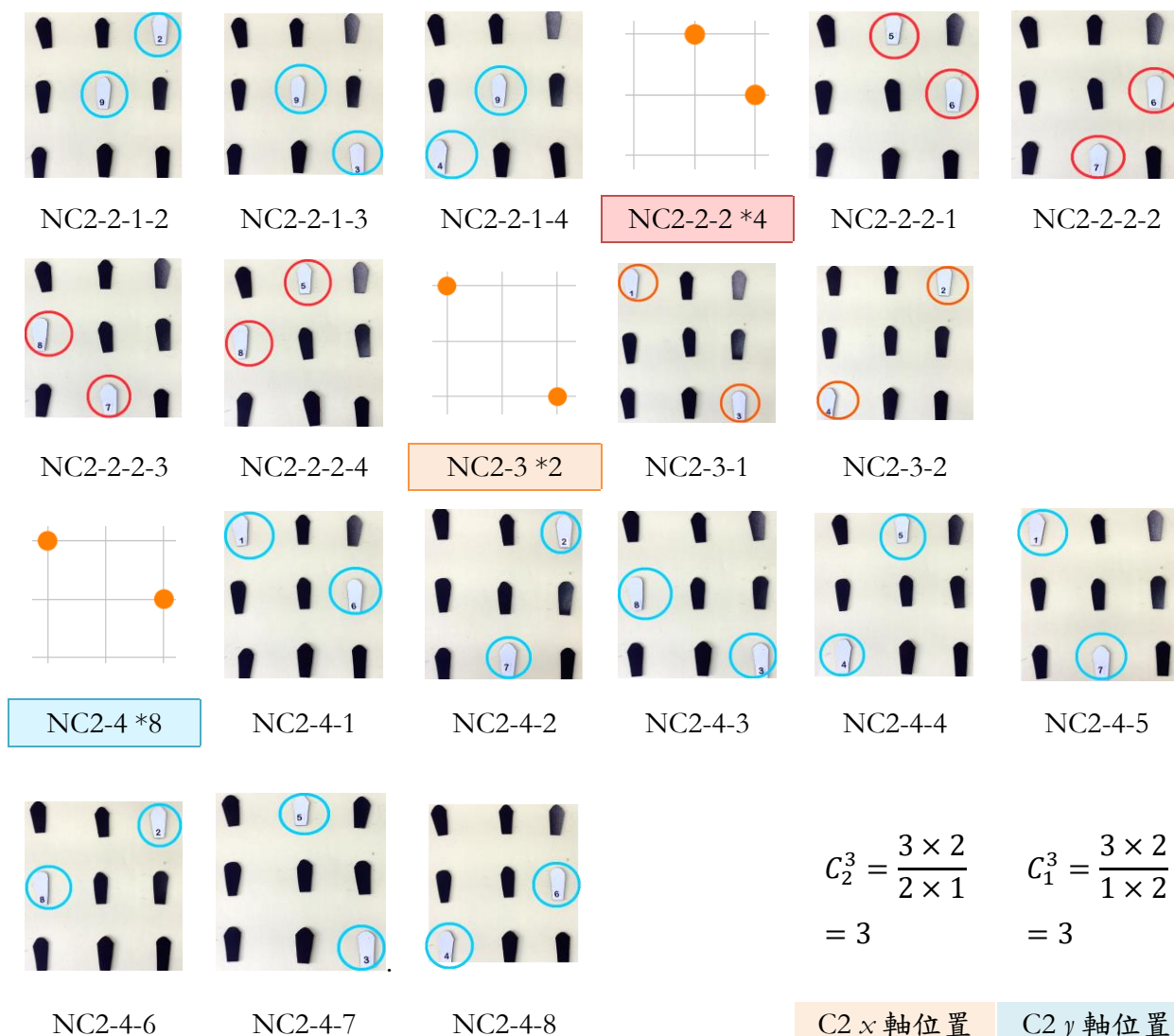


圖 5 檢視異構的方法

(一)2 個鐘面配置結果：C2 & NC2(圖 C2-1-1~ NC2-4-8)





$$C_2^3 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$$

$$C_1^3 = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3$$

我將 NC2 依照鐘面相對位置，以鏡射、翻轉、平移分類成「相同類型」，再依角、邊、中心鐘的數目細分(亦即不考慮平移)變成「同構類型」，搭配坐標軸找出唯一圖得到以下結果。

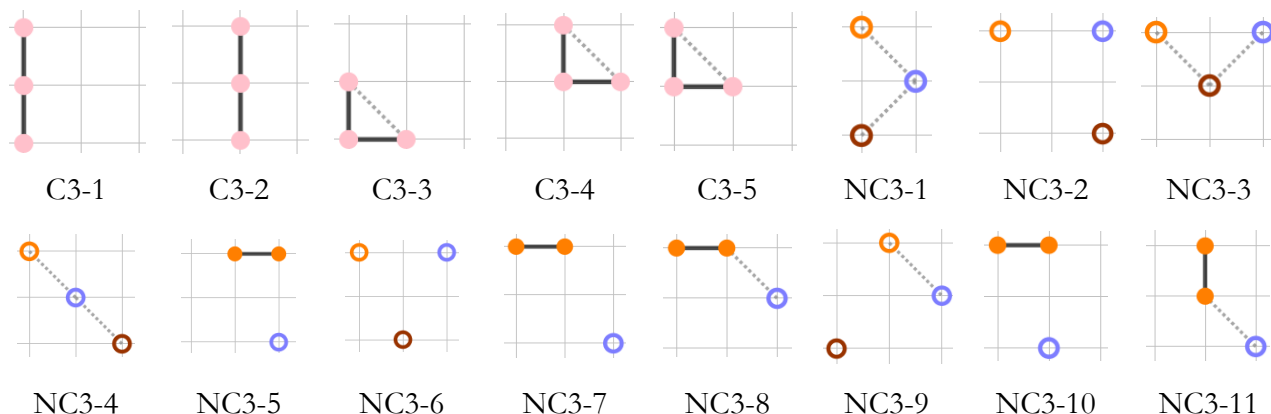
1. **C2** 共有 12 種組合，其中 8 個不包含中心鐘，和 C2-1-1 同構；另外 4 個有中心鐘，和 C2-1-2 同構。C2 的可能擺放位置， x 軸位置有 $C_2^3 = 3$ 種，但是「左、右」的組合會不連續； y 軸則有 $C_1^3 = 3$ 種可能擺放位置；而 C2 可以是「 2×1 」或是「 1×2 」兩種擺法，故 C2 共有 $(3 - 1) \times 3 \times 2 = 12$ 種組合。
2. **NC2-1** 有 6 種組合，其中，4 個由 2 個角鐘組成，和 NC2-1-1 同構；另外 2 個是相對的邊鐘，和 NC2-1-2 同構。NC2-1 在棋盤上的可能擺放位置， x 軸位置有 $C_2^3 = 3$ 種，但是「左、中」及「中、右」兩組合會成為連續圖 C2； y 軸則有 $C_1^3 = 3$ 種可能擺放位置；此 NC2 可以是 3×1 「橫放」或是 1×3 「直放」兩種擺法，故 NC2-1 共有 $(3 - 2) \times 3 \times 2 = 6$ 種組合。
3. **NC2-2** 的「最小外接矩形」為 2×2 ，共有 8 種組合，4 種為「中心+角鐘」的組合，和 NC2-2-1 同構；另外 4 種是兩個相鄰的邊鐘，和 NC2-2-2 同構。NC2-2 的可能擺放位置， x 軸位置有 $C_2^3 = 3$ 種，可是「左、右」的組合外接矩形是 $n \times 3$ ，形成異構圖； y 軸位置有 $C_2^3 = 3$ 種，但「上、下」的組合外接矩形是 $3 \times m$ ，也會形成異構圖($1 \leq n, m \leq 3$)。 x, y 組合確定後，形成一個 2×2 的範圍，NC2-2 在此範圍內的擺放可能性有 $4 \times 2 = 8$ 種，但「旋轉 180° 」及「沿著 45° 線翻轉」都不會改變 NC2-2，因此不同的擺放法剩下 $8 \div (2 \times 2) = 2$ 種，故 NC2-2 共有 $(3 - 1) \times (3 - 1) \times 2 = 8$ 種可能組合。

4. **NC2-3** 只有 2 種組合，2 種屬於同一個同構類型，都是由兩個相對的角鐘組成的。**NC2-3**「最小外接矩形」為 3×3 ，和鐘面範圍相同，所以不需考慮平移。翻轉的作用和旋轉 90° 一樣，所以也不納入考慮。但 **NC2-3** 如果旋轉 180° ，就會變回原樣，因此只有

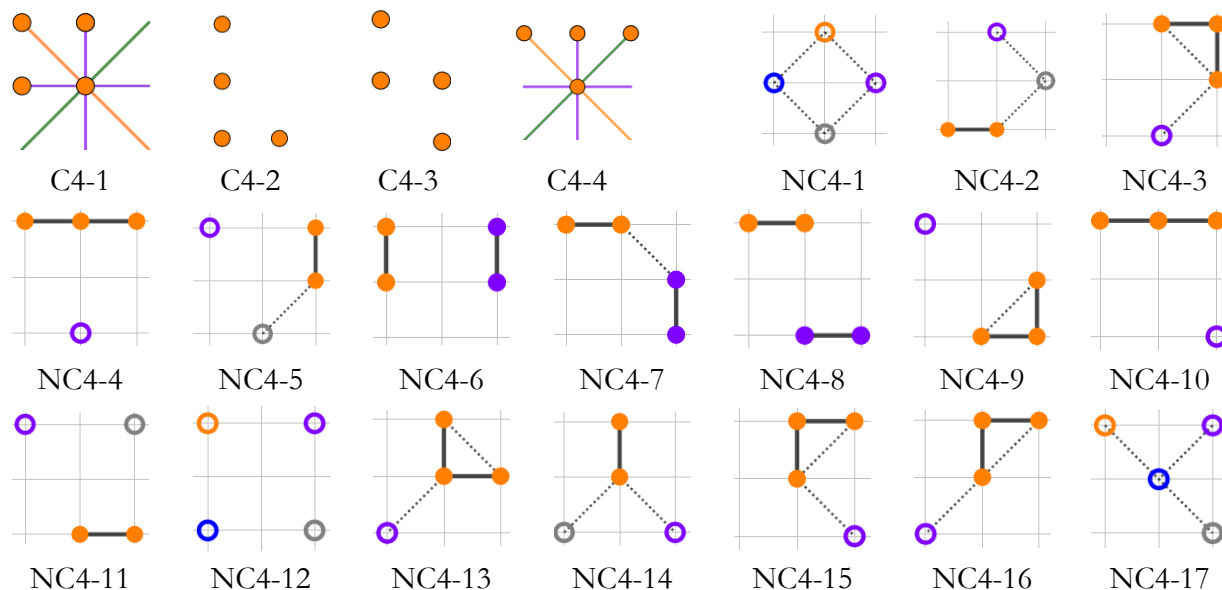
$$\frac{360^\circ \div 90^\circ}{360^\circ \div 180^\circ} = \frac{4}{2} = 2 \text{ 種組合。}$$

5. **NC2-4** 有 8 種組合，都是一個角鐘和一個不相鄰的邊鐘，所以全部屬於同一個同構類型。**NC2-4** 中，每個角鐘可能配對 2 個邊鐘，因此共有 $4 \times 2 = 8$ 種組合。

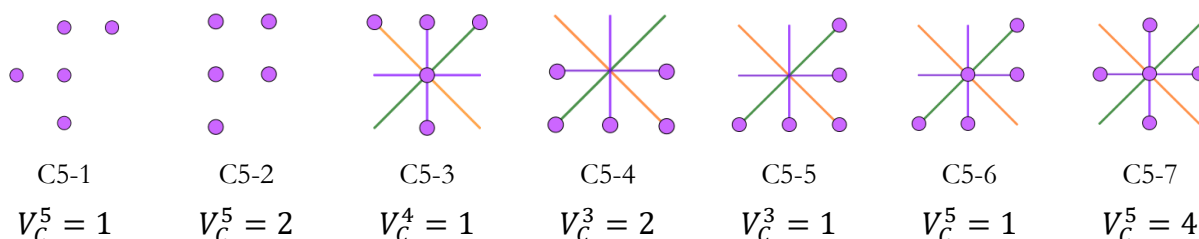
(二) 3 個鐘面配置結果：全部配置有 16 個，5 個連續鐘面和 11 個不連續鐘面(圖 C3-1~NC3-11)

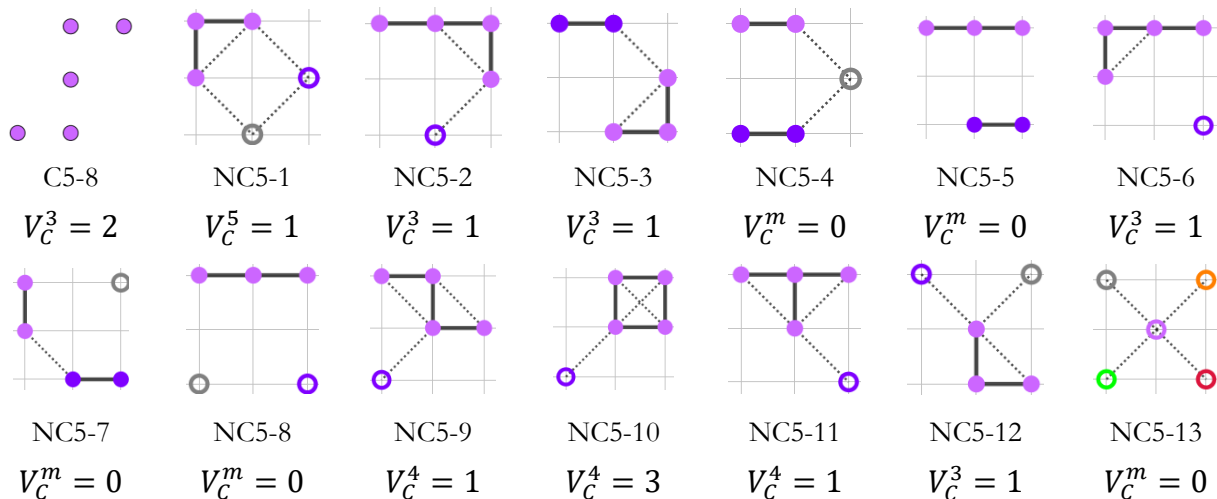


一、4 個鐘面配置結果：全部配置有 21 個，4 個連續鐘面和 17 個不連續鐘面(圖 C4-1~NC4-17)

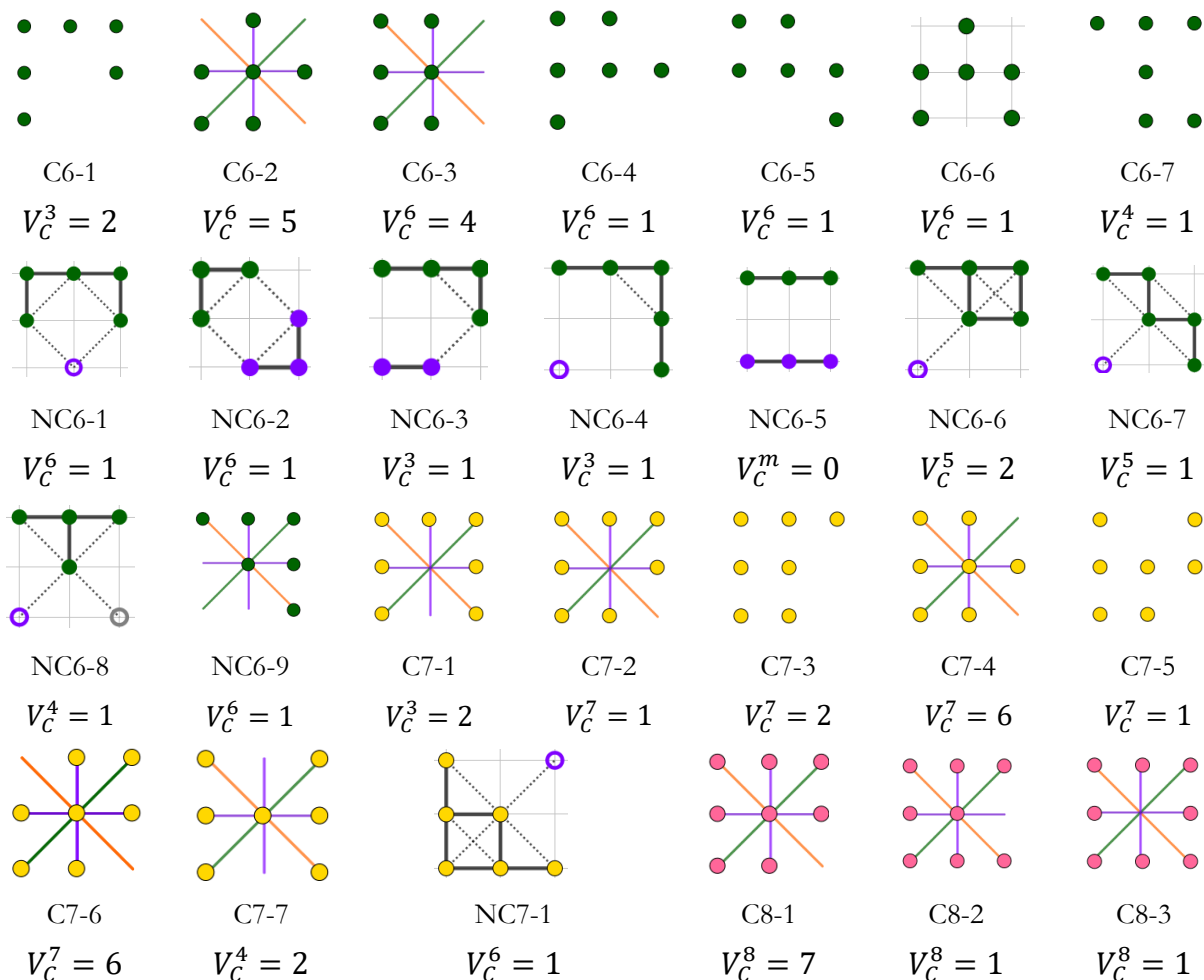


二、5 個鐘面配置結果：有 8 個連續鐘面和 13 個不連續鐘面(圖 C5-1~NC5-13) 全部有 21 個。





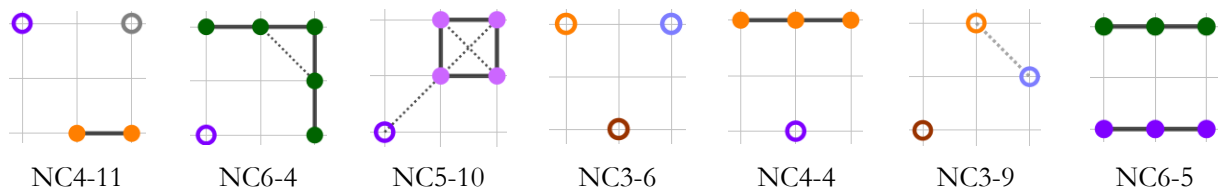
三、6~8 個鐘面配置結果：6 個鐘面全部配置有 16 個，8 個連續鐘面和 8 個不連續鐘面；7 個鐘面全部配置有 8 個，7 個連續鐘面和唯一 1 個不連續鐘面如下；8 個鐘面只有 3 個連續鐘面，沒有不連續的鐘面組合。(圖 C6-1~C8-3)



六、異構圖特徵判斷——孤立點、弦、環、輪

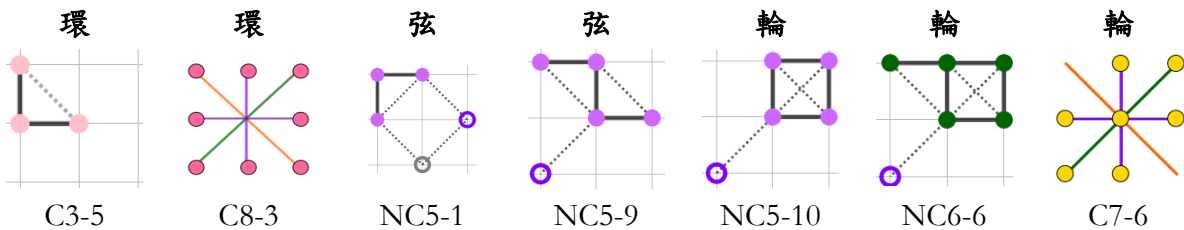
(一) 圖——不連通

不孤立點只出現在非連通圖，因為它的度序列為 0，n 點圖不可能有 n-1 個孤立點，因為 n-1 個孤立點表示最後一個點也是孤立點。

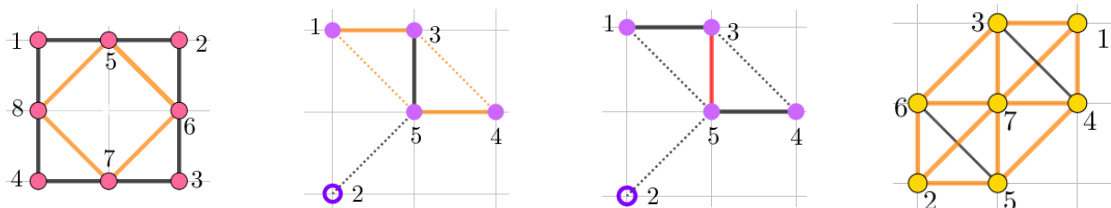


(二) 圖——連通

環是一個起點和終點相同的封閉迴路，如 C3-5。弦是連接環上兩個不相鄰點的邊，如 NC5-1。輪是將環上每個點都連接到一個新點的圖，如 C7-6。



C8-3 有 3 點環(1,5,8),(2,5,6),(3,6,7),(4,7,8)， V_C^4 有(5,6,7,8)， V_C^5 有(1,5,6,7,8),(2,6,7,8,5),(3,7,8,5,6),(4,8,5,6,7)， V_C^6 有(1,5,2,6,7,8),(2,6,3,7,8,5),(3,7,4,8,5,6),(4,8,1,5,6,7),(1,5,6,3,7,8),(2,6,7,4,8,5)， V_C^7 有(1,5,2,6,3,7,8),(2,6,3,7,4,8,5),(3,7,4,8,1,5,6),(4,8,1,5,9,6,7)， V_C^8 有(1,2,3,4,5,6,7,8)，共 20 種環。



C8-3 環種類

NC5-9 環種類

NC5-9 弦種類

C7-6 輪種類

本研究出現最小環點數的配置是 3 個鐘面，隨著鐘面數增加，會出現環套環，也就是弦，

$$3 \leq V_C^m \leq 8, 4 \leq W_n \leq 7$$

七、 立柱唯一性

將各立柱狀態的影響範圍矩陣對以圖解方式呈現，黃色為 1、白色為 0、立柱為藍色。反面為正面沿著 Z 軸旋轉(z-Flip)後的結果，因此討論立柱時只考慮正面結果。

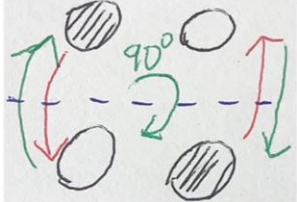
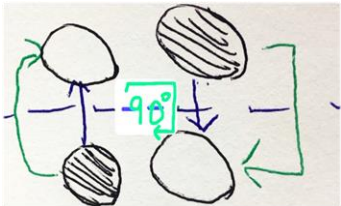
(一) 立柱對稱

不考慮對稱性，立柱有 $2^4 - 1 = 15$ 種狀態，(1,0,0,0)、(1,0,0,1)、(1,0,1,0)、(1,0,1,1)、(1,1,0,0)、(1,1,0,1)、(1,1,1,0)、(1,1,1,1)、(0,0,0,1)、(0,0,1,0)、(0,0,1,1)、(0,1,0,0)、(0,1,0,1)、(0,1,1,0)、(0,1,1,1)。考慮對稱性去除重複的立柱狀態，我得到 5 種「唯一立柱」：(1,0,0,0)、(1,1,0,0)、(1,0,1,0)、(1,1,1,0)、(1,1,1,1)。

(1,0,0,1)	(1,1,0,0)	(1,1,1,0)	(1,1,0,1)	(1,0,1,1)	(1,0,0,0)	(0,1,0,0)
2 實 2 虛立柱		3 實 1 虛立柱			1 實 3 虛立柱	
圖 6-1~2		圖 6-3~5			圖 6-6~7	

【對稱中的對稱】(1,0,1,0)除了斜45°的翻轉，也就是「第一級對稱」以外，若是縱、橫翻轉，再旋轉90°，也會維持原樣，這就是翻、旋轉並用的「第二級對稱」。我發現，在有對稱性的前提下，翻轉和旋轉是可以達到相同結果的。下表中第1排是依序變換，第2排則是分開變換。

表 1 第二級對稱

									
(1,0,1,0)		橫向翻轉→旋轉90°		縱向翻轉→旋轉90°					
									
(1,0,1,0)		橫向翻轉		旋轉90°		縱向翻轉		旋轉90°	
圖 7		圖 8							

(二)立柱影響範圍

1. 立柱 1↔3：正面 1 反面 3 的影響範圍，共有 4 種狀況，4 種的差異只有旋轉角度，相對鐘面位置皆相同。

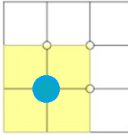
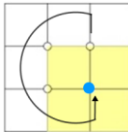
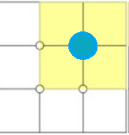
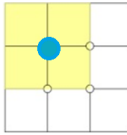
狀況 1	狀況 2	狀況 3	狀況 4
			
(10,0,0,1) ↔ (1,1,1,0)	(0,0,1,0) ↔ (1,1,0,1)	(0,1,0,0) ↔ (1,0,1,1)	(1,0,0,0) ↔ (0,1,1,1)

圖 9 立柱 1↔3 影響範圍

單一個立柱的影響範圍就是周圍的 4 個鐘面，及背面對應的角鐘面。當鄰近立柱的齒輪轉動時，會帶動正、反角鐘面，正角鐘面再透過立柱影響鄰近 3 個鐘面。

2. 立柱 2↔2：正面 2 反面 2 的影響範圍

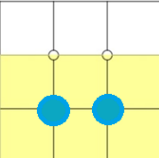
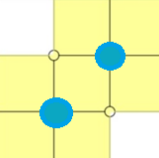
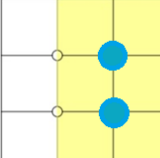
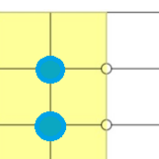
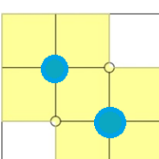
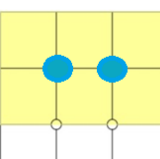
		
10-1_(0,0,1,1) ↔ (1,1,0,0)	10-2_(0,1,0,1) ↔ (1,0,1,0)	10-3_(0,1,1,0) ↔ (1,0,0,1)
		
10-4_(1,0,0,1) ↔ (0,1,1,0)	10-5_(1,0,1,0) ↔ (0,1,0,1)	10-6_(1,1,0,0) ↔ (0,0,1,1)

圖 10 立柱 2↔2 影響範圍

相鄰的兩個立柱影響範圍是周邊 6 個鐘加背面兩個鐘，對角的兩個立柱因重疊較少，影響範圍較大，為正面 7 個鐘加背面 2 個鐘。

3. 立柱 $3 \rightleftharpoons 1$ ：正面 3 反面 1 的影響範圍

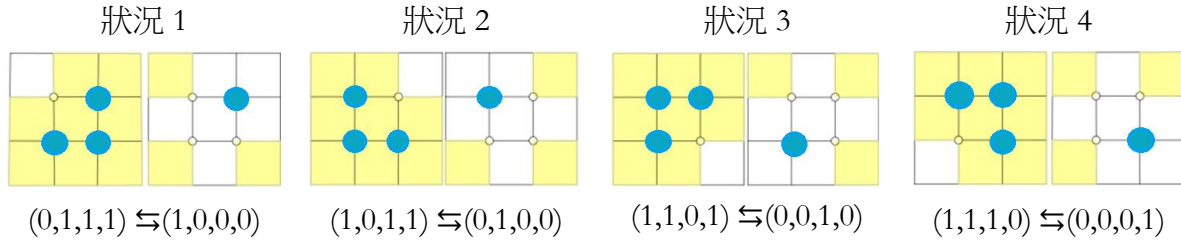


圖 11 立柱 $3 \rightleftharpoons 1$ 的影響範圍

3 個立柱的影響範圍包含正面除了一個角鐘面外的所有鐘及背面 3 個角鐘面。

4. 立柱 $4 \rightleftharpoons 0$ ：正面 4 上反面 0 的影響範圍



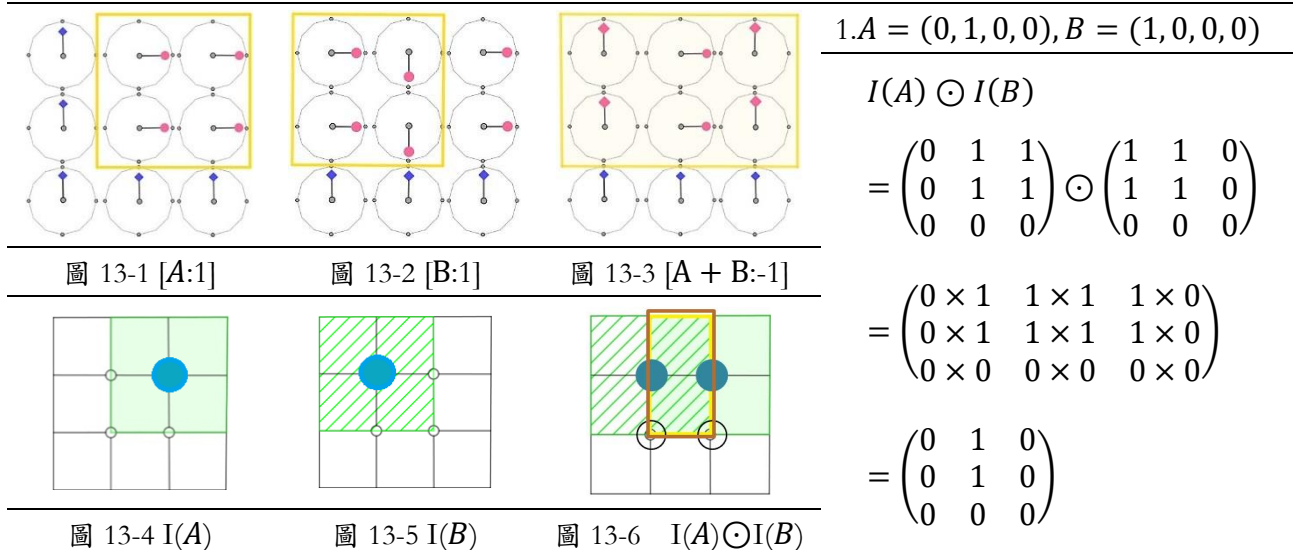
4 個立柱影響範圍含括正面每一個鐘和背面所有角鐘面，當所有正面指針指向皆相同時，可用來將全部指針指向 12 點。我發現位於對面的角鐘面會**連動**：當正角鐘面是 0, 1, 2, 3 時，反面角鐘面分別會是 0, 3, 2, 1，**指向永遠相同**。

(三) 多重影響範圍的分析

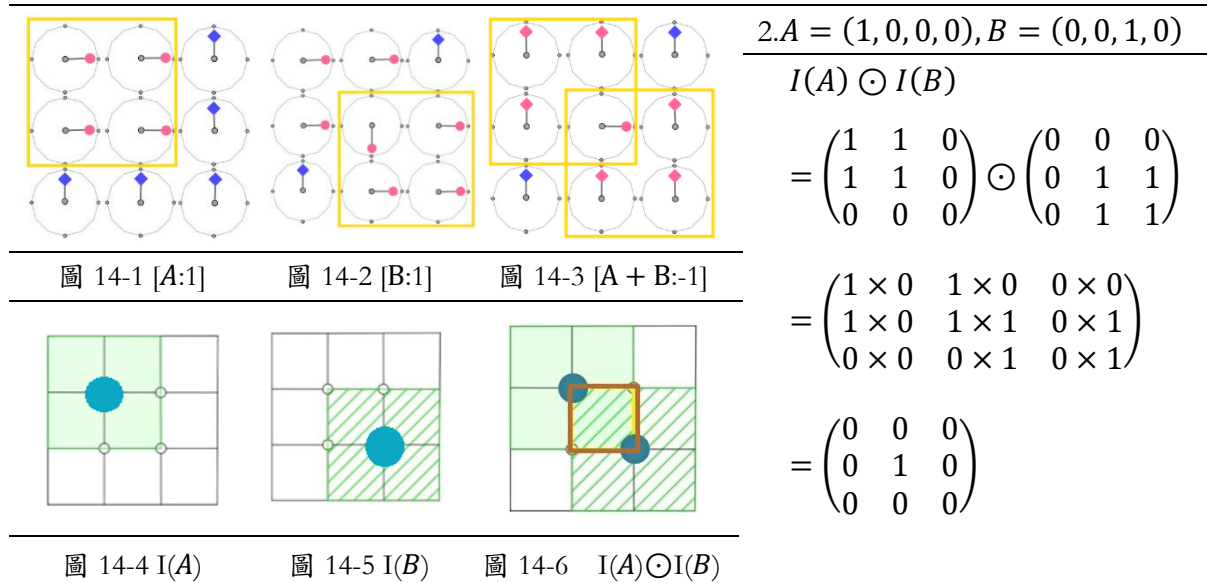
1. 重疊產生交集

有時候，兩個不同的立柱狀態A和B的影響範圍會重疊。此時，從完成狀態進行[A:1]和[B:1]後再進行[A + B:-1]，也就是兩個立柱狀態的聯集往負方向轉動一格後，「非 0 鐘面」就是重複範圍，以第 1 種A = (0, 1, 0, 0), B = (1, 0, 0, 0) 依序處理[A:1] → [B:1] → [A + B:-1] 得到交集、第 2 種A = (1, 0, 0, 0), B = (0, 0, 1, 0)、第 3 種A = (0, 1, 0, 0), B = (1, 0, 1, 0)。我發現，鐘面集合的交集和阿達瑪矩陣積都可以用來計算重疊的連動範圍。

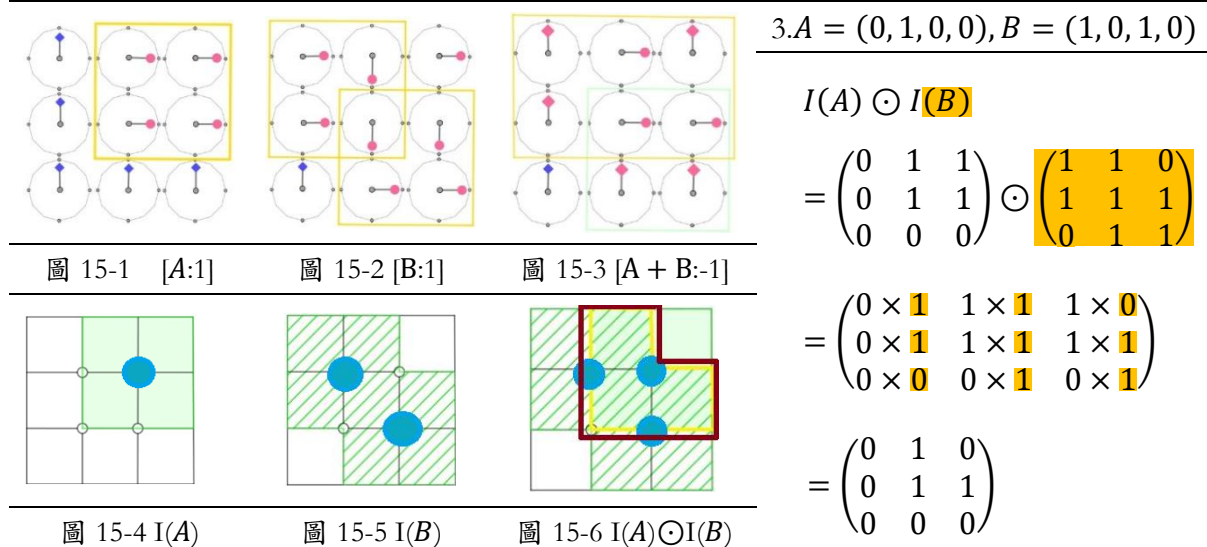
第 1 種



第 2 種：這個情況和第 1 種情況相似，但由於兩個影響範圍互相位於斜對角，因此重疊範圍較少，只有中心鐘面。



第 3 種：I(B)未包含右上方 2 號角鐘面的緣故，I(A)和 I(B)的重疊範圍即 I(A) – 角鐘面。

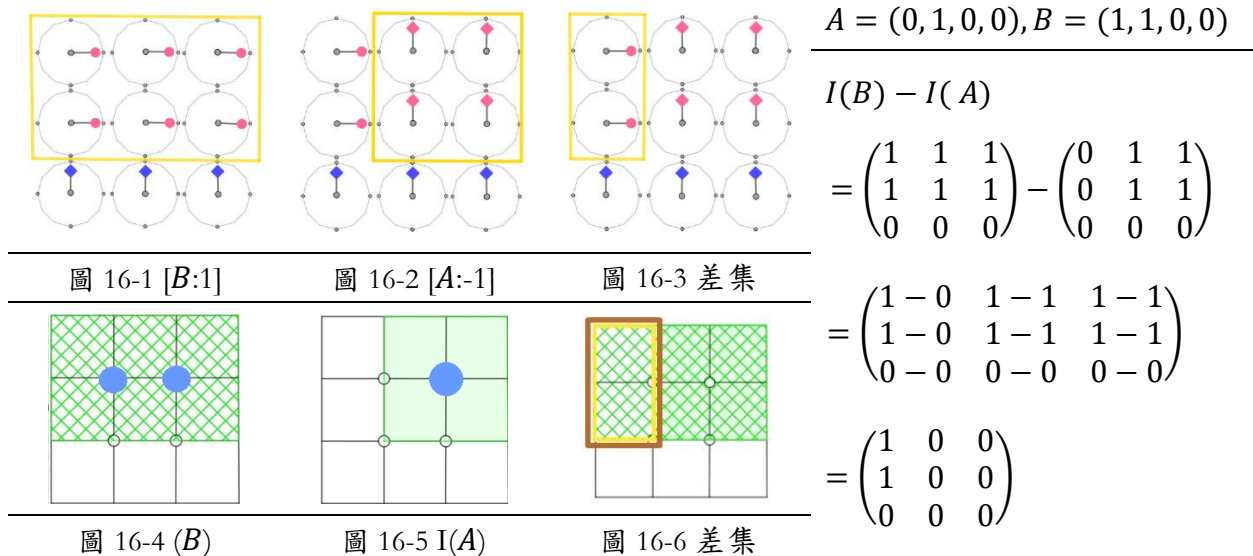


儘管 I(A)和 I(B)的影響範圍也包含背面的角鐘面，但沒有重疊，進行完這 3 個轉動後會恢復指向 12。兩矩陣的阿達瑪積也會成為重複範圍的矩陣。由於矩陣內的元素都是 0 和 1，這兩個數字的乘法組合只有 1×1，故只有A和B重疊的區域會是 1，其他的元素都是 0。

2. 「突出」產生差集

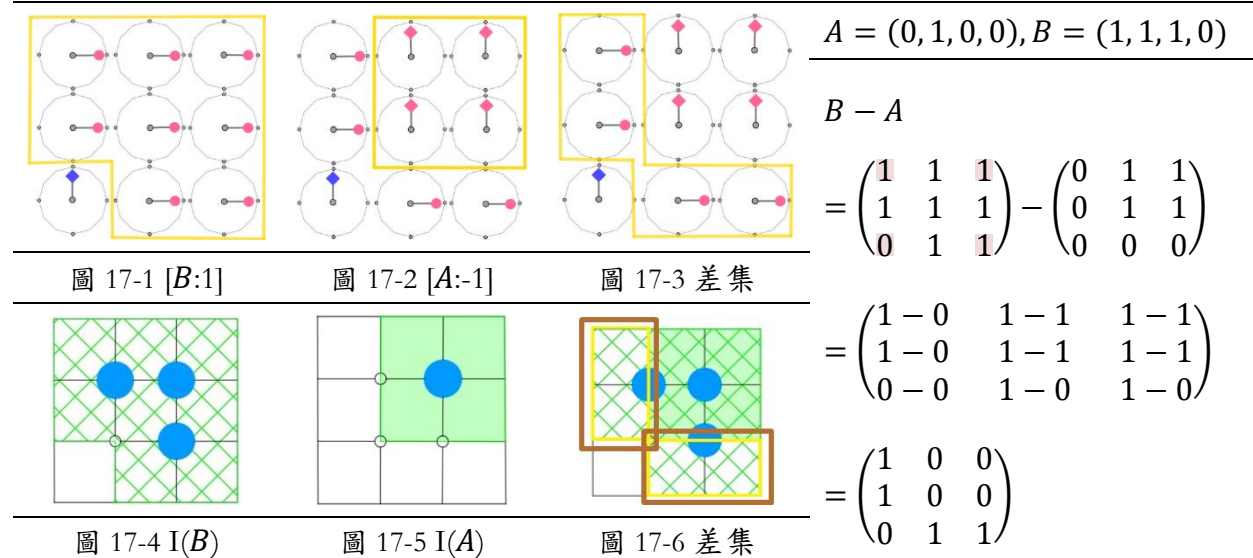
兩個影響範圍A和B除了相互重疊外，也可能A完全包含在B內，兩者交集為A，也就是 $I(A) \odot I(B) = I(A)$ 。此時，B和A的差集 $B \setminus A$ ，也就是在B內但不在A內的鐘面，可由從完成狀態做[B:1]和[A:-1]後，非 0 的鐘面所得。第 1 種 $A = (0, 1, 0, 0), B = (1, 1, 0, 0)$ 、第 2 種 $A = (0, 1, 0, 0), B = (1, 1, 1, 0)$ 、第 3 種 $A = (0, 1, 0, 0), B = (0, 1, 0, 1)$ 。

第 1 種

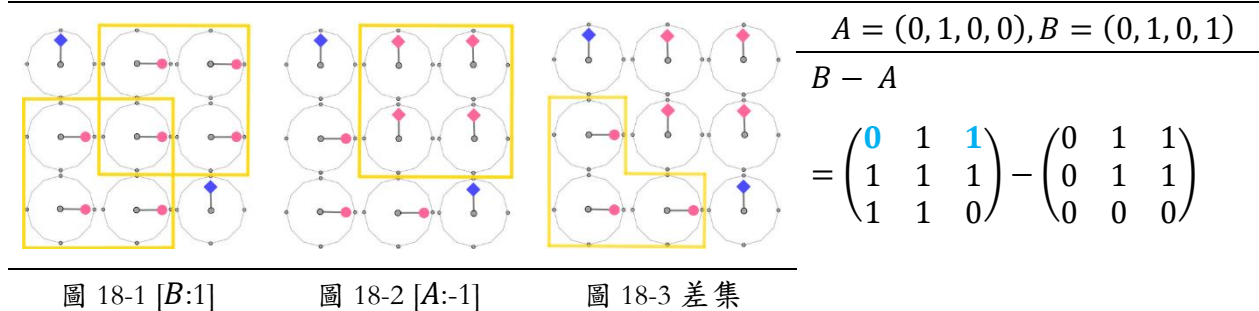


差集可由矩陣間相減所得。由於 A 完全包含在 B 內，不會出現「在 A 內但不在 B 內」，0-1 得到-1 的情況。我發現如果 A 維持 $(0, 1, 0, 0)$ ，但 B 改為 $(1, 1, 1, 0)$ ，則這個情況和上一個類似，但 B 多了一個立柱和兩個鐘面。由於這兩個鐘面都不屬於 A ，因此差集變大。 A 位於 B 正中央，將 B 分成兩塊，因此不連續鐘面也能以差集同步改變。

第 2 種



第 3 種



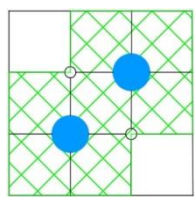


圖 18-4 I(B)

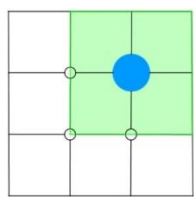


圖 18-5 I(A)

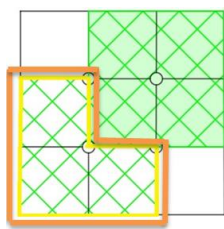


圖 18-6 差集

$$= \begin{pmatrix} 0-0 & 1-1 & 1-1 \\ 1-0 & 1-1 & 1-1 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

因為B的正立柱呈斜對角，含括7個鐘面而不是6個，因此去掉A後，剩下的差集有3個鐘面，左下角鐘面將其他兩個邊鐘面連接起來，不會被A切斷，所以差集和上一個情況相反，是連續的。

八、分析同步轉—導出最少步數

RC上可以同時進行「正面立柱」及「背面立柱」的轉動：18個鐘面，有4個角鐘面互相連動，因此有14個獨立數值。由於1次轉動可以將1個鐘面對齊，因此需要14個轉動。正、反面同時轉動需 $14 \div 2 = 7$ 個同步轉(ST)。以下為1種起始狀態，以數值 mod4 呈現。

表 2 同步轉編碼

正面/反面鐘面符號			計算結果			數值 mod4		
a/-b	e/j	b/-a	0/1	1/1	3/0	a=0	b=3	c=2
左上-角鐘	上-邊鐘	右上-角鐘				-a=0	-b=1	-c=2
h/k	i/n	f/m	2/0	1/2	3/0	d=1	e=1	f=3
左-邊鐘	中心鐘	右-邊鐘				-d=3	j=1	m=0
d/-c	g/l	c/-d	1/2	1/3	2/3	g=1	h=2	i=1
左下-角鐘	下-邊鐘	右下-角鐘				l=3	k=0	n=2

【發現】具正反關係值：(a,-a)、(b,-b)、(c,-c)、(d,-d)。獨立存在值：e,f,g,h,i,j,k,l,m,n。

數值分析例如 $[0111; g-f-d-m/n-l] \Leftrightarrow (g-f-d-m/n-l) = (1-3-1-0/2-3) = (-3,-1) \Leftrightarrow [1011; (-3,-1)] \bmod 4 = (1,3)$ ，以9個鐘面的7個同步轉例，色框表示角鐘連動。為了使正反面同步，正面ST數值使用加法、反面使用減法：

(一) 同步轉 1-ST 1 $[1011; g-f-d-m/n-l]$ ，正面轉動計算 $g-f-d-m=-3$ ；反面轉動計算 $n-l=-1$

正面 1011			數值 mod 4			鐘面狀態		
$a+g-f-d-m=0+(-3)$	$e+g-f-d-m=1+(-3)$	$b+n-l=3+(-1)$	1	2	2	→	↓	↓
$h+g-f-d-m=2+(-3)$	$i+g-f-d-m=1+(-3)$	$f+g-f-d-m=3+(-3)$	3	2	0	←	↓	↑
$d+g-f-d-m=1+(-3)$	$g+g-f-d-m=1+(-3)$	$c+g-f-d-m=2+(-3)$	2	2	3	↓	↓	←
反面 1000			反面 mod 4			鐘面狀態		
$-b-(n-l)=1-(-1)$	$j-(n-l)=1-(-1)$	$-a-(g-f-d-m)=0-(-3)$	2	2	3	↓	↓	←
$k-(n-l)=0-(-1)$	$n-(n-l)=2-(-1)$	$m=0$	1	3	0	→	←	↑
$-c-(g-f-d-m)=2-(-3)$	$l=3$	$-d-(g-f-d-m)=3-(-3)$	1	3	2	→	←	↓

ST1完成後，反面的中心鐘與下邊鐘必消去變成1°。下邊鐘不會被ST1影響，依然為 $l=3$ ，而中心鐘數值為 $n-(n-l)=n-n+l=l=3$ ，數值相同。

(二) 同步轉 2-ST 2 [1001;f-g,l-m]，正面轉動計算 $f-g=3-1=2$ ；反面轉動計算 $l-m=3-0=3$ 。

正面 1001			數值 mod 4			鐘面狀態		
$a+g-f-d-m+$ $(f-g)=1+2$	$e+g-f-d-m+$ $(f-g)=2+2$	$b+n-l+(l-m)$ $=2+3$	3	0	1	←	↑	→
$h+g-f-d-m+$ $(f-g)=3+2$	$i+g-f-d-m+$ $(f-g)=2+2$	$g-d-m=0$	1	0	0	→	↑	↑
$g-f-m+(f-g)$ $=2+2$	$2g-f-d-m+$ $(f-g)=2+2$	$c+g-f-d-m+$ $(l-m)=3+3$	0	0	2	↑	↑	↓
反面 1001			數值 mod 4			鐘面狀態		
$l-n-b-(l-m)$ $=2-3$	$l-n+j-(l-m)$ $=2-3$	$f+d+m-g-a-$ $(f-g)=3-2$	3	3	1	←	←	→
$l-n+k-(l-m)$ $=1-3$	$l-(l-m)$ $=3-3$	$m=0$	2	0	0	↓	↑	↑
$f+d+m-g-c-(l-m)$ $=1-3$	$l-(l-m)$ $=3-3$	$f+m-g-(f-g)$ $=2-2$	2	0	0	↓	↑	↑

當 ST2 完成之後，反面右下角的 4 個鐘面數值皆會消去，變成 m ，在此例子中 $m=0$ 。因為 ST1 完成時，反面的中心鐘與下邊鐘都消去變成 1，在 ST2 時，這兩個鐘由反面的立柱轉到 $m=0$ 的位置，而右下角鐘面則由正面立柱使用角鐘連動的方式轉到 $m=0$ 。角鐘連動是正反面之間唯一互相影響的方式，可以讓同步轉 1 個就 3 個數值(反面鐘、與正面連動的角鐘及正反面皆影響不到的「基準鐘」)指向變成相同。

(三) 同步轉 3-ST3[(1,0,0,0);g-i,f-c+m-l]，正面轉動計算 $g-i=1-1=0$ ；

反面轉動計算 $f-c+m-l=3-2+0-3=-2\equiv 2(mod 4)$ 。

正面(1,0,0,0)			數值 mod 4			鐘面狀態		
$a-d-m+(g-i)$ $=3+0$	$e-d-m+(g-i)$ $=0+0$	$b+n-m+$ $(f-c+m-l)=1+2$	3	0	3	←	↑	←
$h-d-m+(g-i)$ $=1+0$	$i-d-m+(g-i)$ $=0+0$	$g-d-m=0$	1	0	0	→	↑	↑
$-m+(f-c+m-l)$ $=0+2$	$g-d-m=0$	$c+g-f-d-2m+l+$ $(f-c+m-l)=2+2$	2	0	0	↓	↑	↑
反面(1,0,1,1)			數值 mod 4			鐘面狀態		
$m-n-b-$ $(f-c+m-l)=3-2$	$j+m-n-$ $(f-c+m-l)=3-2$	$d+m-a-$ $(g-i)=1-0$	1	1	1	→	→	→
$k+m-n-$ $(f-c+m-l)=2-2$	$m-(f-c+m-l)$ $=0-2$	$m-(f-c+m-l)$ $=0-2$	0	2	2	↑	↓	↓
$f+d+2m-g-c-l$ $(f-c+m-l)=2-2$	$m-(f-c+m-l)$ $=0-2$	$m-(f-c+m-l)$ $=0-2$	0	2	2	↑	↓	↓

當 ST3 完成之後，正面右下角的 4 個鐘面數值皆會消去，變成 $g-d-m=0$ 。因為 ST2 完成時，正面的右邊鐘與下邊鐘都消去變成 $g-d-m=0$ ，在 ST3 時，中心鐘由正面立柱轉向 $g-d-m=0$ ；右下角鐘則是由反面立柱透過角鐘連動轉到 $g-d-m=0$ 。同時，反面的右下 4 個鐘面依然相同，因為反面立柱(1,0,1,1)和右下 4 個鐘面的差集為空集合。

從 ST1 到 ST3，數值消去使兩面的右下都產生數值相同，我稱為「階段 1」，且這個過程可由對角對稱軸「複製」至兩面的左上方。

(四) **x-Flip**：由於正反兩面的右下角 2×2 範圍完成，利用對稱性翻轉 (Flip 左上→右下)，形成 **2 對角立柱**(1,0,1,0)與(0,1,0,1)影響範圍，「 $c-f+l=2$ 」和「 $g-d-m=0$ 」改稱“A”及“B”。

正面			數值 mod 4			鐘面狀態		
A=2	A=2	-B=0	2	2	0	↓	↓	↑
A=2	A=2	k-n+c-f+l=0	2	2	0	↓	↓	↑
d+m-a+i-g=1	j-n+c-f+l=1	c-f+l-n-b=1	1	1	1	→	→	→
反面			數值 mod 4			鐘面狀態		
B=0	B=0	-A=2	0	0	2	↑	↑	↓
B=0	B=0	h-d-m+g-i=1	0	0	1	↑	↑	→
b+n-c+f-l=3	e-d-m+g-i=0	a-d-m+g-i=3	3	0	3	←	↑	←

(五) **同步轉 4-ST4** [1011;j-k+a-h,i-e]，正面轉動計算 $j-k+a-h = 1 - 0 + 0 - 2 = -1 \equiv 3(mod 4)$ ；反面轉動計算 $i-e = 1 - 1 = 0$ 。

正面 1011			數值 mod 4			鐘面狀態		
A+(j-k+a-h)=2+3	A+(j-k+a-h)=2+3	-B+(i-e)=0+0	1	1	0	→	→	↑
A+(j-k+a-h)=2+3	A+(j-k+a-h)=2+3	k-n+c-f+l+(j-k+a-h)=0+3	1	1	3	→	→	←
d+m-a+i-g+(j-k+a-h)=1+3	j-n+c-f+l+(j-k+a-h)=1+3	c-f+l-n-b+(j-k+a-h)=1+3	0	0	0	↑	↑	↑
反面 1000			數值 mod 4			鐘面狀態		
B-(i-e)=0-0	B-(i-e)=0-0	-A-(j-k+a-h)=2-3	0	0	3	↑	↑	←
B-(i-e)=0-0	B-(i-e)=0-0	h-d-m+g-i=1	0	0	1	↑	↑	→
b+n-c+f-l-(j-k+a-h)=3-3	e-d-m+g-i=0	a-d-m+g-i-(j-k+a-h)=3-3	0	0	0	↑	↑	↑

ST4 完成後，反面的中心鐘與下邊鐘必消去變成 B-i+e。下邊鐘不會被 ST4 影響，依然為 $e-d-m+g-i=0$ ，而中心鐘數值為 $B-(i-e)=g-d-m-i+e=e-d-m+g-i=0$ ，數值相同。

(六) **同步轉 5-ST5** [1001;k-j,e-h]，正面轉動計算 $k-j = 0 - 1 = -1 \equiv 3(mod 4)$ ；反面轉動計算 $e-h = 1 - 2 = -1 \equiv 3(mod 4)$ 。

正面 1001			數值 mod 4			鐘面狀態		
A+j-k+a-h+(k-j)=1+3	A+j-k+a-h+(k-j)=1+3	i-e-B+(e-h)=0+3	0	0	3	↑	↑	←
A+j-k+a-h+(k-j)=1+3	A+j-k+a-h+(k-j)=1+3	A+j+a-h-n=3	0	0	3	↑	↑	←
d+m+i-g+j-k-h+(k-j)=0+3	2j-n+A-k+a-h+(k-j)=0+3	A-n-b+j-k+a-h+(e-h)=0+3	3	3	3	←	←	←

反面 1001			數值 mod 4			鐘面狀態		
$B+e-i-(e-h)=0-3$	$B+e-i-(e-h)=0-3$	$k-a+h-j-A-(k-j)=3-3$	1	1	0	→	→	↑
$B+e-i-(e-h)=0-3$	$B+e-i-(e-h)=0-3$	$h+B-i=1$	1	1	1	→	→	→
$b+n-A-j+k-a+h-(e-h)=0-3$	$B+e-i-(e-h)=0-3$	$B-i-j+k+h-(k-j)=0-3$	1	1	1	→	→	→

當 ST5 完成之後，反面右下角的 4 個鐘面數值皆會消去，變成 $B-i+h=1$ 。

因為 ST4 完成時，反面的中心鐘與下邊鐘都消去變成 $B+e-i$ ，在 ST5 時，這兩個鐘由反面的立柱轉到 $B-i+h=1$ 的位置，而右下角鐘面則由正面立柱使用角鐘連動的方式轉到 $B-i+h=1$ 。

(七) 同步轉 6-ST6 [1000;j-n,k+b+h-e]，正面轉動計算 $j-n=1-2=-1\equiv 3(mod\ 4)$ ；

反面轉動計算 $k+b+h-e=0+3+2-1=4\equiv 0(mod\ 4)$ 。

正面 1000			數值 mod 4			鐘面狀態		
$(j-n)+A+a-h=0+3$	$(j-n)+A+a-h=0+3$	$i-B-h+(k+b+h-e)=3$	3	3	3	←	←	←
$(j-n)+A+a-h=0+3$	$(j-n)+A+a-h=0+3$	$j-n+A+a-h=3$	3	3	3	←	←	←
$i-B-h+(k+b+h-e)=3$	$j-n+A+a-h=3$	$A-n-b+j-k+a-2h+e+(k+b+h-e)=3$	3	3	3	←	←	←
反面 1011			數值 mod 4			鐘面狀態		
$B-i+h-(k+b+h-e)=1-0$	$B-i+h-(k+b+h-e)=1-0$	$h-A-a-(j-n)=0+1$	1	1	1	→	→	→
$B-i+h-(k+b+h-e)=1-0$	$B-i+h-(k+b+h-e)=1-0$	$B-i+h-(k+b+h-e)=1-0$	1	1	1	→	→	→
$b+n-A-j+k-a+2h-e-(k+b+h-e)=1-0$	$B-i+h-(k+b+h-e)=1-0$	$B-i+h-(k+b+h-e)=1-0$	1	1	1	→	→	→

當 ST6 完成之後，正面右下角的 4 個鐘面數值皆會消去，變成 $j-n+A+a-h=3$ 。

因為 ST5 完成時，正面的右邊鐘與下邊鐘都消去變成 $g-d-m=0$ ，在 ST6 時，中心鐘由正面立柱轉向 $j-n+A+a-h=3$ ；右下角鐘則是由反面立柱透過角鐘連動轉到 $j-n+A+a-h=3$ 。

從 ST4 到 ST6，數值消去使兩面的右下都產生數值相同，我稱為「階段 2」。階段 1 和 2 將兩面左上及右下共 7 個鐘面轉至相同，這 7 個鐘恰好為立柱(1,0,1,0)的影響範圍。

(八) 同步轉 7-ST7 [1010;n-j-A-a+h,i-B+k+b-e]，正面轉動計算 $n-j-A-a+h=2-1-2-0+2=1$ ；反面轉動計算 $B-i-k-b+e=0-1-0-3+1=-3\equiv 1(mod\ 4)$ 。

正面 1010			數值 mod 4			鐘面狀態		
$j-n+A+a-h+(n-j-A-a+h)=3+1$	$j-n+A+a-h+(n-j-A-a+h)=3+1$	$i-B+k+b-e+(i-B+k+b-e)=3+1$	0	0	0	↑	↑	↑
$j-n+A+a-h+(n-j-A-a+h)=3+1$	$j-n+A+a-h+(n-j-A-a+h)=3+1$	$j-n+A+a-h+(n-j-A-a+h)=3+1$	0	0	0	↑	↑	↑
$j-n+A+a-h+(n-j-A-a+h)=3+1$	$j-n+A+a-h+(n-j-A-a+h)=3+1$	$j-n+A+a-h+(n-j-A-a+h)=3+1$	0	0	0	↑	↑	↑

反面 1010			數值 mod 4			鐘面狀態		
B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	n-A-j-a+h- (n-j-A-a+h)=1-1	0	0	0	↑	↑	↑
B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	0	0	0	↑	↑	↑
B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	0	0	0	↑	↑	↑

最後一個**同步轉 7-ST7**，使用 I(1,0,1,0)的範圍將正、反面同時轉至方向 0。I(1,0,1,0)包含中心鐘與 4 個邊鐘、2 個角鐘，兩面的角鐘因為**角鐘連動**而可以同時指向 0。(1,0,1,0)是唯一連動範圍包括 $4 \div 2 = 2$ 個角鐘，以及所有邊鐘的唯一立柱：由於邊鐘無法從另一面控制（「邊鐘連動」並不存在），立柱必須要可以控制全部的邊鐘。(1,0,1,0)也擁有對稱性，因此可以透過斜角對稱的 2x2 範圍，對齊 I(1,0,1,0)的所有鐘面。

伍、研究結果與討論

我發現立柱對鐘面組合產生影響，實際操作時，鐘面數會隨著立柱有無改變。我分析 n 個鐘面的組合配置中，指向同一最少步數的立柱順序。

一、立柱數量對鐘面連動範圍的影響—3~8 個鐘面組合

表 3 NC3 起始混散狀態到完成指向同一的結果

始混散狀態		完成指向	指向同一/0 最少步數		影響範圍	圖(V,E)的特徵			
鐘面 編號	組和數	立柱順序	指 123	指 0	鐘面數	$\overline{K_n}$	P_n	$\overline{K_n}$	P_n
567-1	39	4→3→2,3	2	3	8	3	0	0	3
567-2	39	1→2→2,3	2	3	8	3	0	0	3
123	39	1→2→3	3	3	8	3	0	3	0
129-1	39	4→1→1,2	2	3	8	3	0	0	3
129-2	39	3→1→1,2	2	3	8	3	0	0	3
139-1	39	2→1→1,3	2	3	8	3	0	0	3
139-2	39	4→1→1,3	2	3	8	3	0	0	3
139-3	39	1→3→1,3	2	3	7	3	0	0	3
235-1	63	1→2→3	3	3	8	1	2	1	2
235-2	63	1→2→2,3	2	3	8	1	2	1	2
127-1	39	1→1,2→1,2,3,4	2	3	9	3	0	3	0
127-2	39	1→2→4	3	3	8	3	0	3	0
127-3	39	1→2→3	3	3	8	3	0	3	0

始混散狀態		完成指向	指向同一/0 最少步數		影響範圍	圖(V,E)的特徵			
鐘面 編號	組和數	立柱順序	指 123	指 0	鐘面數	$\overline{K_n}$	P_n	$\overline{K_n}$	P_n
135	63	2→1→3	2	3	8	1	2	1	2
156	63	3→2→1,2	2	3	8	1	2	0	3
456-1	39	4→3→2	3	3	8	3	0	1	2
456-2	39	4→1→2	3	3	8	3	0	1	2
157-1	63	4→2→1	3	3	8	1	2	1	2
157-2	63	3→2→1	3	3	8	1	2	1	2
359-1	63	2→3→2,3	2	3	6	1	2	0	3
359-2	63	2→3→4	3	3	8	1	2	0	3
359-3	63	1→3→2,3	2	3	8	1	2	0	3
359-4	63	1→4→2,3	2	3	9	1	2	0	3

表 4 C3起始混散狀態到完成指向同一的結果

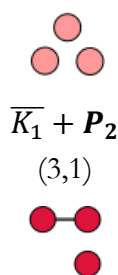
始混散狀態		完成指向	指向同一/ 最少步數		影響 範圍	圖(V,E)的特徵			
鐘面編號	組和數	立柱順序	指 123	指 0	鐘面數	P_n	C_n	P_n	C_n
184	39	1→4→1,4	2	3	6	3	0	3	0
579-1	39	2→3→2,3	2	3	6	3	0	3	0
579-2	39	4→2→2,3	2	3	8	3	0	3	0
579-3	39	1→3→2,3	2	3	8	3	0	3	0
579-4	39	1→4→2,3	2	3	9	3	0	3	0
579-5	39	1→4→1,4	2	3	6	3	0	3	0
579-6	39	2→4→1,4	2	3	8	3	0	3	0
579-7	39	3→1→1,4	2	3	8	3	0	3	0
158	39	1→2→4	2	3	8	3	0	0	3
569-1	39	4→1→2	2	3	8	3	0	0	3
569-2	39	4→3→2	2	3	8	3	0	0	3
159	63	4→2→1	2	3	8	3	0	0	3

【發現】

- (1) 鐘面編號相同，但立柱不同的圖，圖特徵是一樣的，因為圖論特徵由鐘面配置決定，不會被立柱影響。

- (2) C3 中，「直邊」形成的圖必為 P_3 ，因為形成的最小環為 $V_C^4 = C_4$ ，因此不存在 C_3 。
- (3) 「斜邊」也考慮後，會出現「縱橫邊形成 P_3 ，全部邊形成 C_3 」的狀況。
- 因為在 9 鐘面配置中， P_3 形成 L 形，考慮斜邊會增加一條邊，變成 C_3 。
- (4) NC3 與 C3 會出現都是孤立點的圖例如 $\overline{K_3}$ ，還有路徑和孤立點混和圖 $\overline{K_1} + P_2$ 、單純路徑圖 P_3 、3 點環圖 C_3 的組合

$\overline{K_3}$ (3,0)



$\overline{K_1} + P_2$ (3,1)



表 5

	直	斜
$\overline{K_3}$	$(\overline{K_3}, \overline{K_3})$	
$\overline{K_1} + P_2$	$(\overline{K_3}, \overline{K_1} + P_2)$	$(\overline{K_1} + P_2, \overline{K_1} + P_2)$
P_3	$(\overline{K_3}, P_3)$	$(\overline{K_1} + P_2, P_3)$
C_3		(P_3, P_3)

P_3 (3,2)



C_3 (3,3)



圖 19-1~2

圖 19-3~4

表 6 NC4 起始混散狀態到完成指向同一的結果

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			(V,E)特徵				
鐘面編號	組合數	立柱順序	指 0123 指 0		鐘面數	圖形類別	$\overline{K_n}$	C_n	mP_n	$K_{m,n}$
5678-1	54	1,2→1,2	3	3	6	直	4	0	(0,0)	(0,0)
5678-2	54	2→3→2,3	3	3	6	直	4	0	(0,0)	(0,0)
5678-3	54	3→4→3,4	3	3	6	斜	0	4	(0,0)	(0,0)
5678-4	54	4→1→4,1	3	3	6	斜	0	4	(0,0)	(0,0)
5674-1	255	2→3→2,3→2,3,4	3	4	8	直	2	0	(1,2)	(0,0)
5674-2	255	1→2→2,3→4	3	4	9	斜	0	0	(1,4)	(0,0)
5672-1	255	2→1→3→4	3	4	9	直	1	0	(1,3)	(0,0)
5672-2	255	1→3→2→2,3	3	4	8	斜	0	3	(1,2)	(0,0)
1257-1	159	1→2→1,2→3	4	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
1257-2	159	1→2→1,2→4	4	4	8	斜	1	0	(1,3)	(0,0)
1267-1	255	1→2→3→4	4	4	9	直	2	0	(1,2)	(0,0)
1267-2	255	1→2→3→2,3	3	4	8	斜	1	0	(1,3)	(0,0)
1268	135	1→2→3→4	4	4	9	直	0	0	(2,2)	(0,0)
1356	135	1→2→1,2→1,2,3	3	4	8	直	0	0	(2,2)	(0,0)
						斜	0	0	(1,4)	(0,0)
1357	135	1→3→2→4	3	4	9	直	0	0	(2,2)	(0,0)

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			(V, E) 特徵				
1367	159	3→2→4→1	3	4	9	直	1	0	(1,3)	(0,0)
						斜	1	3	(0,0)	(0,0)
1235	255	1→2→1,2→3	4	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
1237	255	1→2→3→4	4	4	9	直	2	0	(1,2)	(0,0)
1234	55	1→2→3→4	3	3	9	直	4	0	(0,0)	(0,0)
5694-1	159	4→1→3→1,3	3	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
5694-2	159	4→1→2→2,4	3	4	8	斜	0	3	(1,2)	(0,0)
5694-3	159	4→3→2→2,4	3	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
3459-1	159	4→2→3→2,3	4	4	8	直	2	0	(1,2)	(0,0)
3459-2	159	4→1→3→1,3	4	4	8	斜	0	0	(0,0)	(1,3)
2359	255	2→3→1→4	4	4	9	直	1	0	(1,3)	(0,0)
						斜	0	3	(1,2)	(0,0)
2459-1	255	2→4→1,4→2,4	3	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
2459-2	255	1→2→3→4	4	4	8	斜	0	3	(1,2)	(0,0)
1239	159	1→2→3→4	4	4	9	直	4	0	(0,0)	(0,0)
						斜	0	0	(0,0)	(1,3)

表 7 C4 起始混散狀態到完成指向同一的結果

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			(V, E) 特徵				
鐘面編號	組和數	立柱順序	指 0123 指 0	鐘面 數	圖形 類別	C_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n	
1256	255	1→2→1,2→3	4	4	8	直	0	(1,4)	(0,0)	0
						斜	3	(1,2)	(0,0)	0
5679-1	159	4→1→3→2,3	3	4	9	斜	4	(1,2)	(0,0)	0
5679-2	159	2→1→3→2,3	3	4	8	斜	4	(1,2)	(0,0)	0
5679-3	159	3→4→2→2,3	3	4	8	直	0	(0,0)	(1,3)	0
2569	159	2→3→1→4	4	4	9	直	4	(0,0)	(0,0)	0
						斜	0	(0,0)	(0,0)	4
1569	255	1→2→3→4	4	4	9	直	0	(1,4)	(0,0)	0
						斜	4	(1,2)	(0,0)	0
1689	255	1→2→4→3,4	4	4	9	直	0	(1,4)	(0,0)	0
						斜	3	(1,2)	(0,0)	0
1259-1	159	1→2→1,2→3	4	4	8	直	0	(0,0)	(1,3)	0
1259-2	159	1→2→1,2→4	4	4	8	斜	4	(1,2)	(0,0)	0

1. **直線圖形**：無論鐘面配置數，直線圖形全部都不會有 C_3 ，因為縱橫邊無法形成 $C_3 = V_C^3$ 。

表 8 4 個鐘面圖形表與唯一圖

$\overline{K_4}$	$P_2 + \overline{K_2}$	$P_3 + \overline{K_1}$	$2P_2$	$K_{1,3}$	P_4	C_4

2. **斜線圖形**： C_4 和 NC_4 的斜線圖形包含純孤立點圖、路徑和孤立點混和圖、多重不相連路徑圖、圈和孤立點混和圖、純圈圖、純路徑圖、圈和分支路徑混和圖、完全二分圖及完全圖。

表 9 4 個鐘面圖形表與唯一圖

$\overline{K_4}$	$P_2 + \overline{K_2}$	$P_3 + \overline{K_1}$	$2P_2$	$C_3 + \overline{K_1}$	$K_{1,3}$	P_4
C_4	$C_3 + P_1$	$C_4 + P_1$	K_4			

圖 20 2 鐘面+3 鐘面

5 鐘面的組合經常出現 2 鐘面+3 鐘面的形式，2 鐘面的組合一定是角鐘(C)+角鐘= $2C$ ，3 鐘面組合可能是邊鐘(E)+中心鐘(M)+邊鐘= $2E+M$ ， $E+E+C=2E+C$ ， $C+E+C=2C+E$ ， $E+E+E=3E$ ， $E+M+C$ ， $C+M+C=2C+M$ ，也就是 $C((1,1,0,0))$ 的 6 個鐘面組合。

表 10 NC5 起始混散狀態到完成指向同一的結果

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍		(V, E) 特徵					
鐘面編號	組和數	立柱順序	指 0123 →指 0	鐘數	圖形類別	$\overline{K_n}$	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n
15678-1	543	1→4→2→3→2,3	5 5	9	直	2	(0,0)	(1,3)	(0,0)	0
15678-2	543	1→2→3→4→3,4	5 5		斜	0	(1,5)	(1,1)	(0,0)	0
12567	1023	1→2→1,2→4→3	5 5	9	直	1	(0,0)	(1,4)	(0,0)	0
					斜	0	(1,3)	(2,1)	(0,0)	0
13567	1023	1→2→3→2,3→4	5 5	9	直	0	(0,0)	(1,3),(1,2)	(0,0)	0
					斜	0	(1,3)	(1,3)	(0,0)	0
14567	543	1→4→2→3→2,3	5 5	9	直	1	(0,0)	(2,2)	(0,0)	0
					斜	0	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0
12357	1023	1→2→1,2→3→4	5 5	9	直	0	(0,0)	(1,3),(1,2)	(0,0)	0
12358	1023	1→2→1,2→3→4	5 5	9	直	1	(0,0)	(1,4)	(0,0)	0
					斜	1	(1,3)	(1,2)	(0,0)	0
12378	543	1→2→3→4→3,4	5 5	9	直	1	(0,0)	(2,2)	(0,0)	0
					斜	1	(0,0)	(1,4)	(0,0)	0

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			(V,E)特徵					
12345	543	3→4→1→2→1,2	5	5	9	直	2	(0,0)	(1,3)	(0,0)	0
14569	1023	1→3→1,3 →2,4→1,2,4	4	5	9	直	1	(0,0)	(1,4)	(0,0)	0
						斜	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0
24569	640	1→3→4→2→2,4	4	5	9	直	1	(1,4)	(0,0)	(0,0)	0
						斜	0	(0,0)	(1,2)	(0,0)	4
12359	1023	1→2→1,2→3→4	5	5	9	直	1	(0,0)	(0,0)	(1,3)	0
						斜	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0
12379	1023	1→4→3 →2,3→1,2,3	4	5	9	直	2	(0,0)	(1,3)	(0,0)	0
						斜	0	(1,3)	(2,2)	(0,0)	0
12349	219	3→1→1,2 →1,2,3→1,2,3,4	4	5	9	直	5	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0
						斜	0	(0,0)	(0,0)	(1,4)	0

表 11 C5 起始混散狀態到完成指向同一的結果

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			(V,E)特徵					
鐘面 編號	組和數	立柱順序	指 0123 →指 0		鐘 數	圖形 類別	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n	W_n
23567	543	3→4→3,4→1→1,4	4	5	9	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
						斜	(2,3)	(0,0)	(0,0)	0	0
12356	543	2→3→1 →2,3→1,2,3	4	5	8	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
						斜	(1,3)	(2,1)	(0,0)	0	0
56789	219	1→4→2 →2,3→1,2,3,4	4	5	9	直	(0,0)	(0,0)	(1,4)	0	0
						斜	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0	4
25679	1023	1→3→4→2→2,3	4	5	9	直	(1,4)	(1,2)	(0,0)	0	0
						斜	(0,0)	(1,3)	(0,0)	4	0
45679-1	1023	3→4→1→1,4→1,3,4	4	5	8	直	(0,0)	(1,2)	(1,3)	0	0
45679-2	1023	3→1→4→1,4→1,2,4	4	5	9	斜	(2,3)	(1,2)	(0,0)	0	0
13569-1	543	1→4→2→1,2→1,2,3	4	5	9	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
13569-2	543	1→3→2→1,2→1,3	4	5	8	斜	(2,3)	(1,2)	(0,0)	0	0
12569-1	1023	1→2→3→4→1,2	4	5	9	直	(1,4)	(1,2)	(0,0)	0	0
12569-2	1023	1→2→1,2→3→4	4	4	9	斜	(0,0)	(1,3)	(0,0)	4	0
23579-1	543	2→3→1→4→1,4	5	5	9	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
23579-2	543	1→3→2→2,4→2,3	4	5	9	斜	(2,3)	(0,0)	(0,0)	0	0
12579	640	1→4→1,4 →2,3→1,2,3,4	4	5	9	直	(0,0)	(1,2)	(1,3)	0	0
						斜	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0	0
13579	543	2→3→2,3 →1,4→1,3,4	4	5	9	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
						斜	(2,3)	(0,0)	(0,0)	0	0

【發現】C5 與 NC5 在去除對稱後，幾乎都只有 1 種「最佳立柱順序」，就是在歐拉圖上由範圍大到小的立柱順序。角鐘面旁的立柱一定要先動，因為角鐘面只受一個立柱控制，後面

再動會增加轉動數。有些 $C5/NC5$ 有兩種順序，在歐拉圖上為「大→小」與「小→大」範圍。從立柱與鐘面建構歐拉圖分 1,5,2 與 6,7 鐘面不同步指如下：

原始鐘面配置

建構出歐拉圖

1,5,2 鐘面+1,2 立柱

6,7 鐘面+3,4 立柱

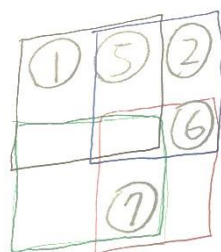


圖 21

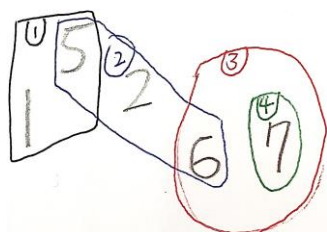


圖 22



圖 23

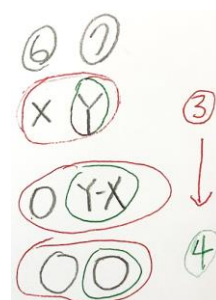


圖 24

「大→小」的策略會造成階段性的指向 0，所以指向同一時就指向 0 了。「小→大」的策略利用階段性的指向同一，因此最後會多一個轉動把鐘面全部指向 0。在策略中，**每個階段的鐘面都是立柱間的差集**。

(一) 6 鐘面組合

6 鐘面的組合會出現 3+3 鐘面的形式，前 3 鐘面的組合一定是角鐘(C)+邊鐘+角鐘=2C+E，後 3 鐘面組合同樣是 $C((1,1,0,0))$ 的 6 個組合。這種組合在 $NC6$ 較常出現， $C6$ 由於沒有不同的「連通部分」而較少出現，只出現在 125689 的組合。 $C6$ 還有 3 個影響範圍鐘面數=8 的圖，和 $C((1,1,1,0))$ 的 3 個唯一圖相同。7 鐘面以上的影響範圍全部為 9，故不列出。

表 12 $C6$ 與 $NC6$ 起始混散狀態到完成指向同一結果

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			(V, E) 特徵						
鐘面 編號	組和數	立柱順序	指 0123 →指 0	鐘 數	圖形 類別	$\overline{K_n}$	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n	W_n	
125678	1407	1→2→1,2	6	6	9	直	1	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
		→3→4 →3,4				斜	0	(2,3)	(1,3)	(0,0)	0	0
135678	1099	2→4→1	5	6	9	直	0	(0,0)	(2,3)	(0,0)	0	0
		→1,2→1,2,4 →1,3				斜	0	(2,3)	(2,2)	(0,0)	0	0
124567	4095	1→2→1,2	6	6	9	直	0	(0,0)	(1,4) (1,2)	(0,0)	0	0
		→3→4 →3,4				斜	0	(1,3)	(1,3) (1,2)	(0,0)	0	0
123456	1407	1→3→2	6	6	9	直	1	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
		→1,2→1,2,3 →4				斜	1	(1,3)	(2,2)	(0,0)	0	0
123457	1134	1→2→1,2 →3→4→3,4	6	6	9	直	0	(0,0)	(2,3)	(0,0)	0	0
124569	4095	1→2→1,2	6	6	9	直	1	(1,4)	(1,2)	(0,0)	0	0

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			(V, E) 特徵					
134569	1407	$\rightarrow 3 \rightarrow 4$ $\rightarrow 3, 4$	5	6	9	斜	0	(1,5)	$\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{pmatrix}$	(0,0)	0 0
		$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$				直	1	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0 0
		$\rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 3$ $\rightarrow 1, 3, 4$				斜	0	(2,3)	(1,2)	(0,0)	0 0
123459	1407	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 2$ $\rightarrow 3 \rightarrow 4$ $\rightarrow 3, 4$	6	6	9	直	2	(0,0)	(0,0)	(1,3)	0 0
						斜	0	(1,4)	(3,2)	(0,0)	0 0
123568	4095	$3 \rightarrow 2 \rightarrow 2, 3$ $\rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1, 2, 3$	5	6	9	直	0	(0,0)	(1,6)	(0,0)	0 0
						斜	0	(2,3)	(1,2)	(0,0)	0 0
156789	1407	$4 \rightarrow 2 \rightarrow 4, 2$ $\rightarrow 1 \rightarrow 1, 2$ $\rightarrow 1, 2, 4$	5	6	8	直	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0 0
						斜	0	(0,0)	(1,2)	(0,0)	0 5
125689	1407	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 2$ $\rightarrow 3 \rightarrow 4$ $\rightarrow 3, 4$	6	6	9	直	0	(1,6)	(1,2)	(0,0)	0 0
						斜	0	(2,3)	(0,0)	(1,5)	0 0
145689	4095	$4 \rightarrow 2 \rightarrow 4, 2$ $\rightarrow 1 \rightarrow 1, 2$ $\rightarrow 1, 2, 4$	5	6	8	直	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0 0
						斜	0	$\begin{pmatrix} 1,6 \\ 1,3 \end{pmatrix}$	(1,2)	(0,0)	0 0
135689	4095	$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ $\rightarrow 1 \rightarrow 1, 2$ $\rightarrow 1, 2, 3$	5	6	9	直	0	(1,4)	(1,3)	(0,0)	0 0
						斜	0	(1,6)	(1,2)	(1,3)	0 0
345689	1407	$3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ $\rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 4$ $\rightarrow 1, 2, 3, 4$	5	6	9	直	0	(0,0)	$\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,2 \end{pmatrix}$	(0,0)	0 0
						斜	0	(1,6)	(0,0)	(1,3)	0 0
123579	4095	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ $\rightarrow 1, 2 \rightarrow 1, 2, 4$ $\rightarrow 1, 2, 3$	5	6	9	直	0	(0,0)	$\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,2 \end{pmatrix}$	(0,0)	0 0
						斜	0	(1,2)	$\begin{pmatrix} 1,4 \\ 1,3 \end{pmatrix}$	(0,0)	0 0
123569	1407	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 3$ $\rightarrow 2 \rightarrow 1, 2$ $\rightarrow 1, 2, 3$	5	6	8	直	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0 0
						斜	0	(1,6)	(1,2)	(1,3)	0 0

(二)7、8 鐘面組合

7 鐘面的組合有 3+1+3 鐘面的形式，前 3 鐘面的組合一定是角鐘(C)+邊鐘+角鐘=2C+E，後 3 鐘面組合同樣是 C((1,1,0,0))組合；中間的鐘面是邊鐘或中心鐘，由前 3 鐘面對齊至後 3 鐘面。

表 13 C7、NC7 及 C8 起始混散狀態到完成指向同一結果

始混散狀態		完成指向	指向同一		(V, E) 特徵					
鐘面 編號	組和 數	立柱順序	指 0123 →指 0	圖形 類別	$\overline{K_n}$	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	mK_n	W_n
123 5678	8319	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 2$ $\rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3, 4$ $\rightarrow 1, 2, 3$	6 7	直	0	(0,0)	(1,7)	(0,0)	(0,0)	0
				斜	0	(1,4)	(1,7)	(0,0)	(0,0)	0

始混散狀態		完成指向	指向同一		(V, E) 特徵						
1234 567	8319	1→2→1,2 →3→4→3,4 →1,2,3	6	7	直	0	(0,0)	(1,7)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(2,3)	(2,2)	(0,0)	(0,0)	0
12 56789	8703	1→ 2→1,2 →3→4→3,4 →1,2,3	6	7	直	0	(1,6)	(2,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(0,0)	(1,3)	(0,0)	(0,0)	6
13 56789	4539	2→3→4→1 →1,2→1,2,4 →1,3	6	7	直	0	(2,4)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(0,0)	(2,2)	(0,0)	(2,4)	0
123 5679	16383	2→3→2,3 →1→4→1,4 →1,2,3	6	7	直	0	(1,6)	(2,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(2,3)	(1,2)	(1,6)	(0,0)	0
134 5679	16383	3→4→3,4 →1→2→1,2 →1,3,4	6	7	直	0	(1,5)	(1,3) (1,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(1,3)	(1,2) (1,3)	(1,6)	(0,0)	0
1234 579	4539	1→2→1,2 →3→4→3,4 →1,2,3	6	7	直	0	(0,0)	(3,3)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(0,0)	(2,3)	(1,6)	(0,0)	0
1234 569	8703	1→2→1,2 →3→4→3,4 →1,2,3	7	7	直	1	(1,4)	(2,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(1,3)	(2,2)	(1,6)	(0,0)	0
123 56789	33279	1→2→3→4 →3,4→1,2 →1,2,4→1,2,3	7	8	直	0	(1,8)	(1,3)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(0,0)	(1,4)	(0,0)	(0,0)	7
1234 5679	33279	1→2→1,2→3→4 →3,4→1,2,4 →1,2,3,4	7	8	直	0	(1,6)	(3,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(2,3)	(2,2)	(1,7)	(0,0)	0
1234 5678	10095	1→2→3→4 →3,4→1,2,3 →1,2,4→1,2,3,4	7	8	直	0	(1,8)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(4,3)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0

記錄過程中，我發現最難的是組合數的計算，尤其是 2^+ 個對稱軸時。計算組合數要針對各種對稱類型考量，因為對稱軸會造成看似不同其實是相同的狀態。以 NC3—567 為例，有兩種情況，**對稱**：5 鐘和 7 鐘相同，6 鐘有 4 種選擇，5 與 7 鐘也有 4 種選擇，共 $4 \times 4 = 16$ 種；**不對稱**：5 鐘和 7 鐘不同，共 $4 \times 4 \times 3 = 48$ 種組合。鐘面不對稱，翻轉會產生不同圖，要刪除一半，有 $48 \div 2 = 24$ 種唯一組合。全部共 $16 + 24 = 40$ 種組合，一種為完成狀態，起始狀態組合數 $40 - 1 = 39$ 個。如果鐘面配置完全**沒有對稱性**，如 NC3—235，組合數不受對稱影響，共 4^n 種，起始狀態組合數共 $4^n - 1$ 個 (n 表示鐘面數)。

如果鐘面配置剛好有一個對稱軸，對稱軸上有 A 個鐘，不在對稱軸上有 $2B$ 個鐘(兩邊對稱，不再對稱軸上的鐘必為偶數)，則對稱時有 $4^A \times 4^B \times 1^B = 4^{A+B}$ 種組合，不對稱時有分

成左右兩邊「完全不同」、「1 個鐘相同」、...、「 $B-1$ 個鐘相同」等共 B 個組合，其中「 n 個鐘相同」的類別會有 $4^A \times 4^B \times 1^B \times 3^{B-n} \times 1^n \times C_n^B = 4^{A+B} 3^{B-n} C_n^B$ 種組合，刪除一半的後有 $\frac{4^{A+B} 3^{B-n} C_n^B}{2}$ 種。全部共有 $4^{A+B} + 4^{A+B} \sum_{n=0}^{B-1} \frac{3^{B-n} C_n^B}{2}$ 種組合。

【引理】

$$f(B) = \sum_{n=0}^{B-1} 3^{B-n} C_n^B = 4^B - 1$$

使用數學歸納法(Mathematical Induction)證明：

步驟 1： $B = 1$

$$f(1) = 3^{1-0} C_0^1 = 3 = 4^1 - 1$$

$B = 1$ 時，引理成立。

步驟 2：若 $f(x) = 4^x - 1$ ，則 $f(x+1) = 4^{x+1} - 1$

我希望去除 Sigma 內大部分的項，因此計算 $f(x+1) - f(x)$

圖 25

括號內出現 $C_{n+1}^{x+1} - C_n^x$ ，我使用帕斯卡法則(Pascal's law)精簡： $C_{n+1}^{x+1} - C_n^x$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+1)!}{((x+1)-(n+1))!(n+1)!} - \frac{x!}{(x-n)!n!} = \frac{x!(x+1)}{(x-n)!(n+1)!} - \frac{x!(n+1)}{(x-n)!(n+1)!} \\ &= \frac{x!(x-n)}{(x-n)!(n+1)!} = \frac{x!}{(x-n-1)!(n+1)!} = \frac{x!}{(x-(n+1))!(n+1)!} = C_{n+1}^x \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= 3^{x+1} + 3^x C_1^x + 3^{x-1} C_2^x + \dots + 3^1 C_x^x = 3^{x+1} + \sum_{n=0}^{x-1} 3^{x-n} C_{n+1}^x \\ &= 3^{x+1} + \sum_{n=1}^x 3^{x-n+1} C_n^x = 3^{x+1} + 3 \sum_{n=1}^x 3^{x-n} C_n^x = 3^{x+1} + 3 \left(\sum_{n=0}^{x-1} (3^{x-n} C_n^x) - 3^x + 1 \right) \\ &= 3^{x+1} + 3(f(x) - 3^x + 1) = 3^{x+1} + 3f(x) - 3^{x+1} + 3 = 3f(x) + 3 \end{aligned}$$

又

$$f(x+1) - f(x) = 3f(x) + 3$$

$$f(x+1) = 4f(x) + 3 = 4(4^x - 1) + 3 = 4^{x+1} - 4 + 3 = 4^{x+1} - 1$$

$$f(x+1) = 4^{x+1} - 1$$

故 $f(x) = 4^x - 1 \Rightarrow f(x+1) = 4^{x+1} - 1$ 證明完成。

綜合以上，得出對於所有正整數 B ，

$$\sum_{n=0}^{B-1} 3^{B-n} C_n^B = 4^B - 1$$

【定理】有一對稱軸，且對稱軸上有 A 個鐘，不在對稱軸上有 $2B$ 個鐘，組合數為

$$\frac{4^{A+2B} + 4^{A+B}}{2} \text{個，起始狀態數有 } \frac{4^{A+2B} + 4^{A+B}}{2} - 1 \text{個。}$$

【證明】組合數 = 對稱圖 + $\frac{\text{非對稱圖}}{2} = 4^{A+B} + 4^{A+B} \sum_{n=0}^{B-1} \frac{3^{B-n} C_n^B}{2} = 4^{A+B} + \frac{4^{A+B}(4^B - 1)}{2}$

$$= 4^{A+B} \left(1 + \frac{4^B - 1}{2} \right) = 4^{A+B} \left(\frac{4^B + 1}{2} \right) = \frac{4^{A+2B} + 4^{A+B}}{2}$$

$$\text{起始狀態數} = \text{組合數} - 1 = \frac{4^{A+2B} + 4^{A+B}}{2} - 1$$

【推論】有一個對稱軸，且對稱軸上有 A 個鐘，全部共有 N 個鐘，組合數為

$$\frac{4^N + 2^{N+A}}{2} \text{個，起始狀態數有 } \frac{4^N + 2^{N+A}}{2} - 1 \text{。}$$

【證明】 $N = A + 2B$

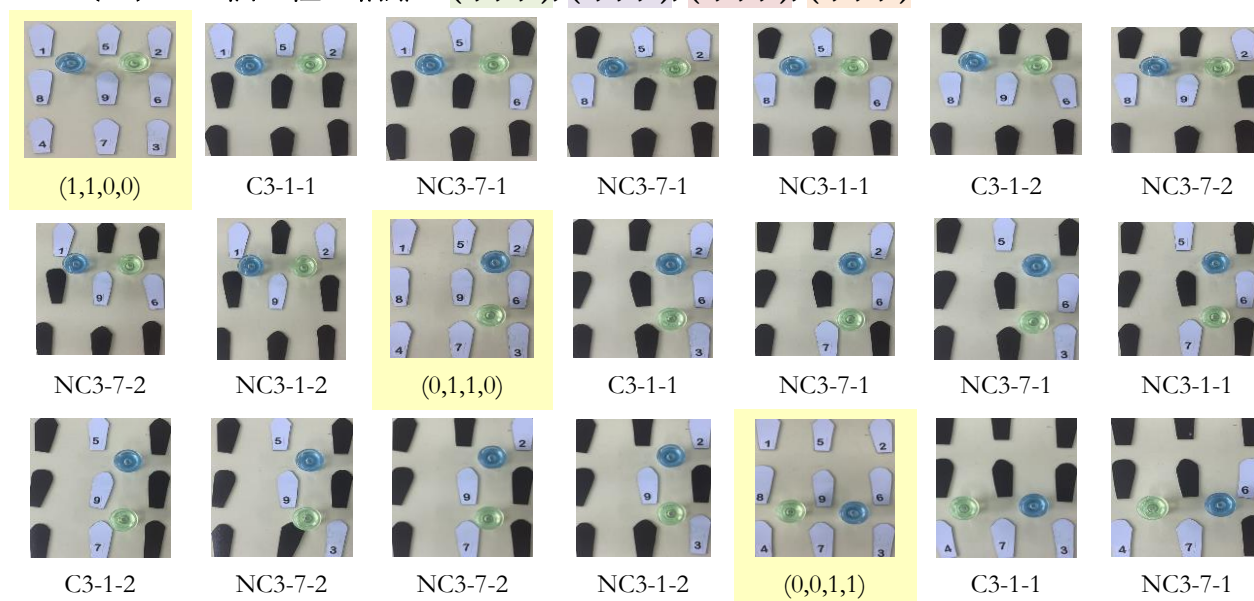
$$\text{組合數} = \frac{4^{A+2B} + 4^{A+B}}{2} = \frac{4^N + 4^{N-B}}{2} = \frac{4^N + 4^{N-\frac{N-A}{2}}}{2} = \frac{4^N + 4^{\frac{2N-(N-A)}{2}}}{2} = \frac{4^N + 4^{\frac{N+A}{2}}}{2} = \frac{4^N + 2^{N+A}}{2}$$

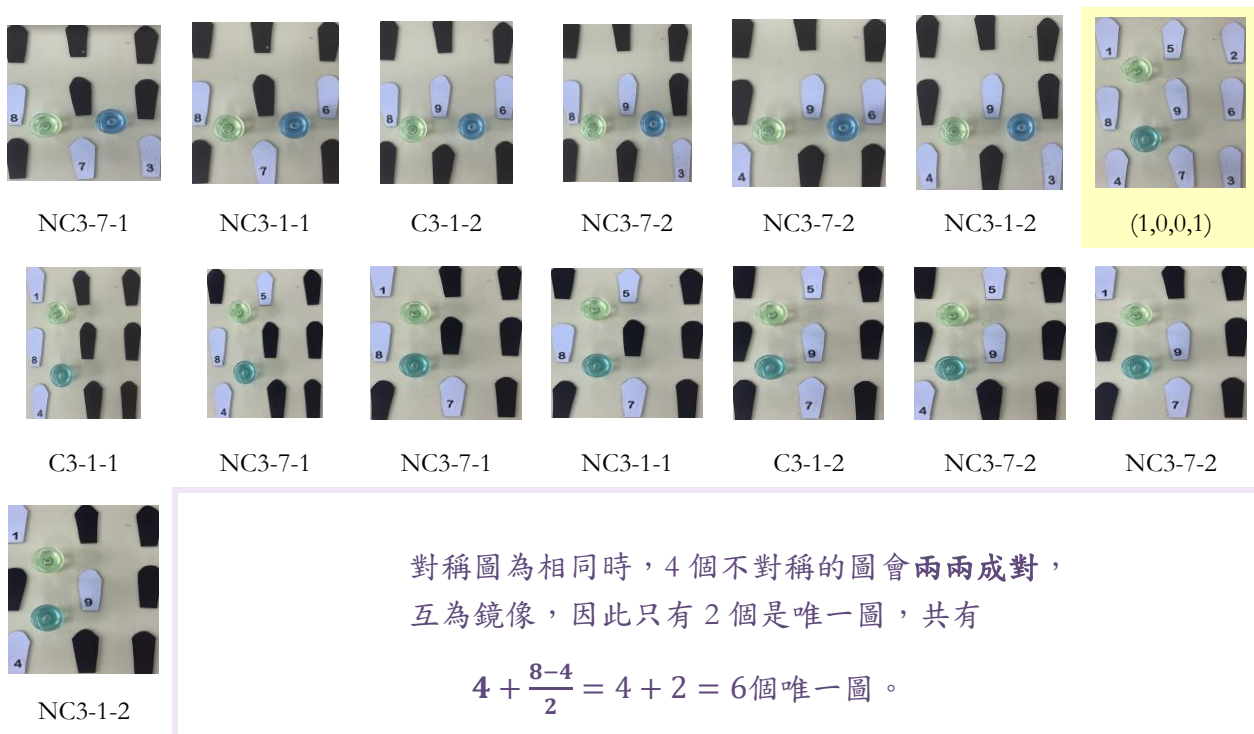
$$\text{起始狀態數} = \text{組合數} - 1 = \frac{4^N + 2^{N+A}}{2} - 1$$

二、 立柱可完成的連方塊— $C(p)$

我分析立柱組合必定可以完成的**最大鐘面組合**，結果如下。

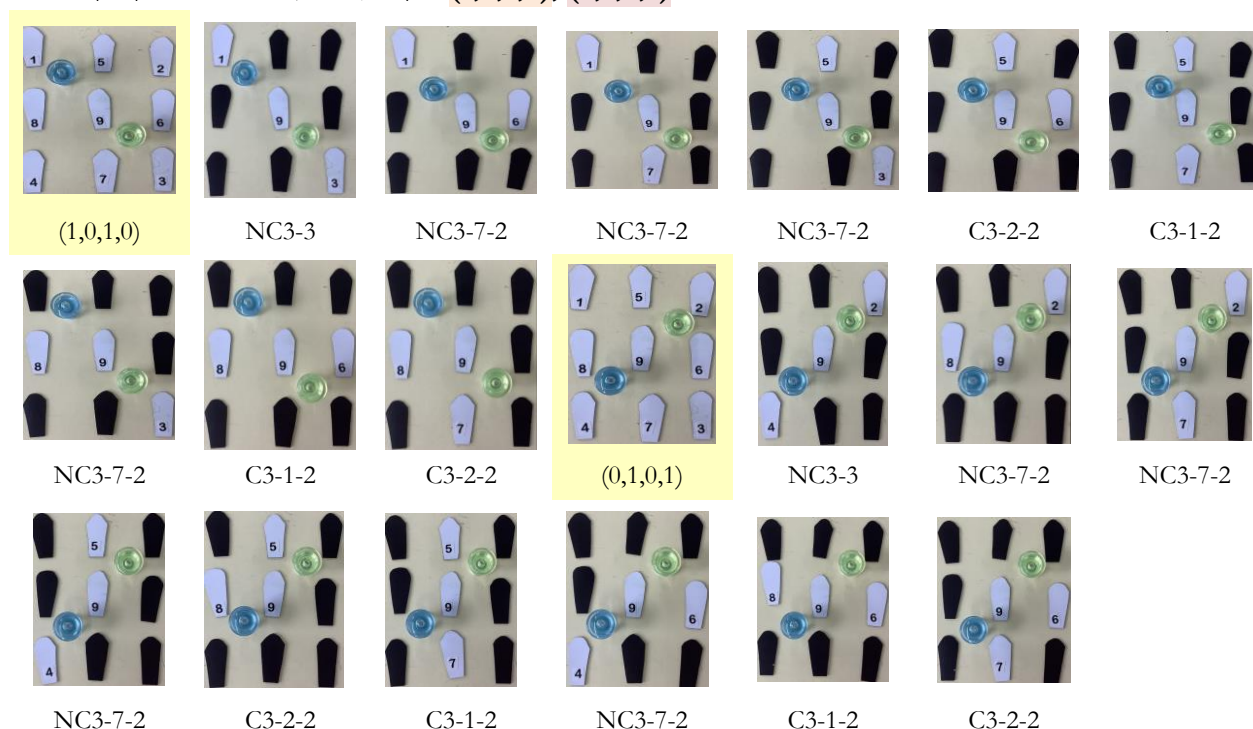
(一) 2個立柱—相鄰：(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1)





我歸類分析發現，兩相鄰立柱可以影響的鐘面組合有 8 種，4 種對稱，4 種不對稱。考慮對稱唯一圖後，組合剩下 6 種，明顯對稱的有 **C3-1-1, C3-1-2, NC3-1-2, NC3-1-1**；不具對稱性的只有 2 個，**NC3-7-1, NC3-7-2**。

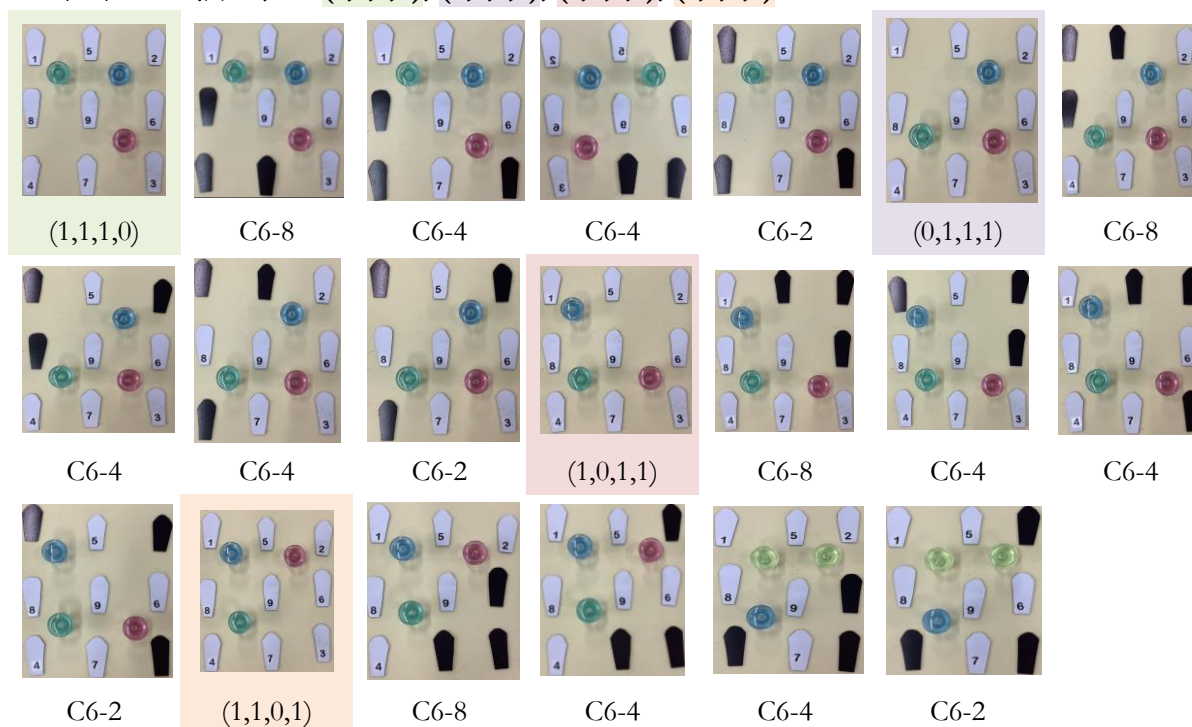
(二) 2 個立柱—相對：(1,0,1,0), (0,1,0,1)



因為兩立柱相交的範圍只有中心鐘，因此全部 18 張圖皆有中心鐘。剩下兩個差集，有「邊+邊」、「角+邊」、「角+角」，有出現的連方有 4 個，分別為 NC3-3, NC3-7-2, C3-2-2 及 C3-1-2。

【發現】有 2 個立柱時，2 立柱斜放影響的連方數較多，因為此時兩個差集較大，有 3 個元素；但 2 立柱直放時，差集只有 2 個元素。

(三) 3 個立柱：(1,1,1,0), (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1)



我歸類發現，三個立柱可以影響的鐘面組合有 4 種，2 種對稱，2 種不對稱。考慮對稱唯一圖後，組合剩下 3 種，對稱的有 **C6-8**, **C6-2**；不對稱的只有 **C6-4**。

考慮對稱圖為相同時，2 個不對稱的圖會成對，互為鏡像，因此只有 2 個是唯一圖，有 $2 + (4 - 2)/2 = 2 + 1 = 3$ 個唯一圖，和「2 立柱—相鄰」是相同的，可以由對稱圖數 (**S**) 及總圖數 (**C(p)**) 得出唯一圖數量： $S + \frac{C(p)-S}{2} = \frac{C(p)+S}{2}$ 。這是因為相鄰 2 立柱及 3 個立柱的組合都有一條對稱軸，並有對稱與無對稱兩種類型的圖的緣故。

陸、 結論

一、 立柱與連動範圍

(一) 立柱唯一性：考慮鐘面重疊範圍時， $2 \leq n \leq 8$ 用鐘面集合的交、差集計算；

i. $n = 9$ 可以透過阿達瑪矩陣積得到連動範圍。

(二) 對稱性：考慮「雙重對稱」特性，先以對稱軸刪除部分立柱狀態，再以立柱本身的對稱去除重複的立柱，得到共 5 種唯一立柱組合。

(三) 鐘面圖分析：環的範圍 $3 \leq C_n \leq 8$ ；輪的範圍 $4 \leq W_n \leq 7$ 。

二、 組合數與起始狀態數

(一) 無對稱軸時，鐘面有 n 個的組合，組合數為 4^n 個，起始狀態數有 $4^n - 1$ 。

(二) 一個對稱軸，對稱軸上有 a 個鐘，全部共有 n 個鐘的鐘面組合，

組合數為 $\frac{4^n + 2^{n+a}}{2}$ 個，起始狀態數有 $\frac{4^n + 2^{n+a}}{2} - 1$ 個。

(三) 若對稱圖數為 S ，總圖數為 $C(p)$ ，則唯一圖數量為 $\frac{C(p)+S}{2}$ 。

三、全部鐘面同步轉

- (一) ST 步驟 1~3 和 ST 步驟 4~6 利用正面角鐘連動及反面立柱，分別完成位於兩面右下和左上的 2×2 區塊，藉由中心鐘面整合，兩個區塊成為 $(1,0,1,0)$ 的連動範圍。
- (二) 只有 $(1,0,1,0)$ 的立柱符合對稱及包含所有邊鐘的限制，因此是全部鐘面 ST 中，ST1~6 透過對稱性建構出的唯一立柱。
- (三) 鐘面同步轉在考慮立柱唯一性與鐘面對稱性，彼此獨立的鐘面僅有 14 個，指向 0 的最少步數一定是 7 步。

柒、未來研究建議

本研究將一個鐘面分割為 4 個方向做討論，未來可考慮以同樣的工具來研究 12 個指向。

捌、參考文獻

一、中文

- [1] 王俊欽、社培基等。第 25 屆國中組數學科作品 (1985 年)。魔術方塊解法的數學理論。
- [2] 黃靜怡、游又臻等。第 47 屆國小組數學科作品(2007 年)。魔術「方塊」變「平面」。
- [3] 蘇元惠、廖宜翔等。第 51 屆國小組數學科作品(2011 年)。神奇的魔術方塊-餘數的應用與探討。
- [4] 劉韋杉、楊佳渝、陳韋綸。第 54 屆國中組數學科作品(2014 年)。簡析魔術方塊 2—魔術方塊公式解之分析。
- [5] 張鎮華(2017)。演算法觀點的圖論。臺北市：臺大出版中心。
- [6] 國立臺灣師範大學數學系。組合。

<https://www.math.ntnu.edu.tw/merc/wp-content/uploads/2024/07/Combinations.pdf>

二、英文

- [1] Anonymous. *Rubik's Clock has now been solved!* Retrived 1/3/2025 from <https://cube20.org/clock/>
- [2] Nieminen, Jenna and Khim, Jimin. *Multiset*. Retrived 1/21/2025 from <https://brilliant.org/wiki/multiset/>
- [3] Peil, Timothy. *Readings for Session 5 – (Continued) Complement and Set Difference*. Retrived 1/22/2025 from <https://web.mnstate.edu/peil/MDEV102/U1/S6/Complement3.htm>