

# 屏東縣第 65 屆國中小學科學展覽會

## 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：天生麗「質」難自棄

關 鍵 詞：質數、質數分布、質數篩選（最多三個）

編號：A1015

# 作品名稱: 天生麗『質』難自棄

## 摘要

六上學完質數的單元之後，我們發現質數有無限多個(高斯，民 76)以外，還發現質數除了 2、5 兩個質數，往後的自然數中，質數的尾數都呈現 1、3、7、9 的規律(全國第 49 屆科展，民 91)。經由尋找、分析和列表，我們還想要找尋質數出現的比例，也要探索前三千個質數中，哪一種結尾的質數最多。我們分組進行探究，研究的問題有(1) 質數的分布中，個數與區間的關係是如何? (2) 三千個質數中，質數出現的占比為何? (3)研究的個數中，出現最多的是哪一種結尾的質數? 老師鼓勵我們進行相關資料分析，從探究的結果中發現：

- (1)不同結尾的質數，給定的區間內的分布相當均勻。
- (2) 前三千個質數中，以 7 結尾的質數最多，總共有 755 個，占比約 25%。
- (3) 三千個質數在定點的出現數量，也是非常接近。

總之，質數天生麗質要研究的面向與問題真的很多，任一個質數難以被放棄。

## 壹、前言

### 一、研究動機

質數除了他獨一無二的性質外，它天生就麗質。記得老師問我們：「你們覺得哪一種結尾的質數最多?」這個問題時，不但激起全班熱烈討論，也讓大家想要一探究竟的動機。但問題是，要列出 100 以內的質數很容易，可是要一一列出某個範圍內的質數卻非常困難，後來找老師求救，我們和老師用 google 大神查找發現，有一種叫做 python 的程式語言，可以幫我們找到某個區間內的所有質數。只是質數無限多個，我們無法像數學家一生都在專研，最後，有同學冒出『後宮佳麗三千人』的名句，於是我們就訂出:從 2 開始，往後三千個質數，當作是我們要研究的範圍與樣本。因此，我們與老師共同討論後，進一步想看看可以做哪些實驗來驗證我們的想法，而開始進入探究。

### 二、研究目的

從研究動機的發想，我們擬定了許多關於質數的問題，最後，討論出三個研究目的。

- (一) 探討質數數量與自然數數量有何變化?
- (二) 探討給定區間中的質數與自然數的比例如何?
- (三) 探討三千個質數中，哪一種結尾的質數最多?

藉由以上的三個研究目的，我們想探討能否發現質數分布或數量上有趣、有意思的地方？

## 一、文獻探討

為了瞭解探究問題的相關概念，我們分組找了一些與質數相關的知識；另外，數學家們仍一直在探索質數的秘密，像是它們的分佈和特性等。有些數學家更發現，質數之間的距離並不一樣，有時會很近，有時又很遠(質數的魔力，陳可崗 2005)。以下就相關名詞與概念進行理解與探討：

### (一)質數的定義

定義：質數是一種特別的數字，它們只能被 1 和自己整除。比如，2、3、5、7、11 都是質數。最小的質數是 2，而它也是唯一的偶數質數，其他的質數都是奇數。質數就像數字的「建築磚」，因為所有的自然數都可以用質數相乘來表示。例如，6 可以分解成 2 和 3 的乘積 ( $2 \times 3 = 6$ )。這就是為什麼質數在數學中非常重要！我們本次探究的是質數，是從第一個質數 2 開始，找出前三千個質數作為研究的範圍。

### (二)質數的分佈

我們查到的資料中，發現質數的分佈並不均勻，隨著自然數的增大而愈來愈稀(高斯，民 76)隨著數字的增大，質數會變得越來越稀少。數學家們對質數非常感興趣，因為它們的分佈有很多有趣的變化。右圖 1 是小於或等於某個自然數  $x$  的質數個數  $\pi(x)$ 。它是由著名數學家高斯提出的一個重要概念。我們由圖表中看出不同  $x$  值有對應的  $\pi(x)$  值。隨著  $x$  的增大，質數個數也在不斷增加，但增長速度逐漸較緩慢。例如，當  $x = 5$  時，質數個數為 3；當  $x = 50$  時，質數個數為 15；當  $x = 1,000,000$  時，質數個數為 78,498。

$x$	$\pi(x)$	$x$	$\pi(x)$
5	3	80	22
10	4	90	24
20	8	100	25
30	10	500	95
40	12	1,000	168
50	15	5,000	669
60	17	10,000	1,229
70	19	1,000,000	78,498

引用自偉大數學家的一生『高斯』

### (三)質數的篩選

埃拉托斯特尼(Eratosthenes)是古希臘的一位數學家 and 天文學家，他大約生活在公元前 276 年到公元前 194 年。除了研究數學，他還測量過地球的大小，真的是一位非常聰明的人！他發明的「埃



氏篩法」就是用來找質數的。埃氏篩法是一種簡單又有效的方法，可以幫助我們找出小於某個數字的所有質數。他的方法是這樣運作的。寫下數字：首先，寫下從 2 開始到你想要的最大數字（比如 100）的所有整數。

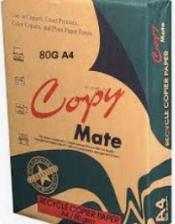
刪除質數：從 2 開始，圈住 2 這個數字，然後刪除所有能被 2 整除的數字（比如 4、6、8 等等）。接著，找出下一個未被刪除的數字 3，圈住它，然後刪除所有能被 3 整除的數字（比如 6、9、12 等等）。繼續篩選：重複這個過程，直到剩下的未被刪除的數字就是質數了！

雖然，埃氏篩法不僅簡單易懂，還能快速找出質數，但礙於研究範圍大，因此，本次研究我們借助 Python 程式語言，篩選並列出前 3000 個質數。

## 貳、 研究設備及器材

材料：電腦 office 軟體、Python 應用程式、彩色筆。

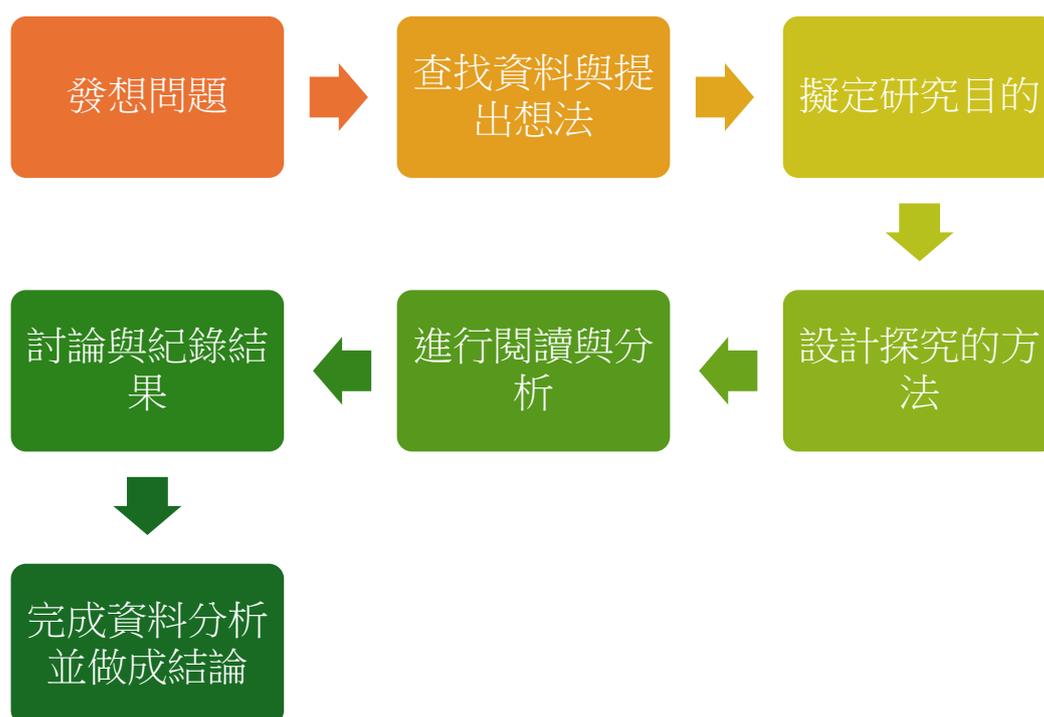
表 1 研究設備、道具及器材一覽表

電腦 office 軟體 word	電腦 office 軟體 excel	Python 應用程式
		
A4 紙	彩色筆	計算機
		

## 參、 研究過程或方法

### 一、 研究流程設計

為了找出前三千個質數，我們和老師找書、上網查書籍(陳會安，2023)，了解目前質數已完成過的相關研究，除了從書中理解他人的實驗結果，得知質數的相關概念後，我們想進一步分析某區間的質數數量、自然數與質數的比率等，並加入分別是 1、3、7、9 結尾的質數數量，幫助我們構思此次實驗的目標。接著我們分成小組，找出不同結尾的質數數量，與擬定分析的表格，準備所要探究的資料，並以電腦教室為本次實驗之地點進行實驗，輔以計算機、平板及自行設計紀錄的表格，記錄整個分析畫記的過程，最後由老師與同學就實驗結果之數據提出分析、作出結論完成實驗結果。研究步驟如下圖所示：



### 二、 研究方法

首先，因為一位數或兩位數的質數容易辨別，且在六年級教科書中對於質數的介紹也非常有限，加上要篩選出較多位數的質數也不容易；另外，一班圖書罕見有專門介紹質數的或列出某區間所有的質數個數，綜合以上的限制，加上可根據參考的文獻，我們將分析策略設計如下：

(一)實驗說明：我們想利用前三千個質數，依每個質數的結尾(個位數)的不同，分別

是1、3、7、9四組來進行統計，看這些質數的數量和分布情形。

(二)實驗步驟：

1. 本實驗首先使用 Python 程式找出前 3000 個質數，並以 500 個為一區間整理列出，方便後續分析。
2. 接著，將這些質數依據尾數分為四類：尾數為 1、3、7 和 9 的質數。這樣分類有助於我們觀察質數的分佈特徵，並進一步分析它的規律。
3. 完成分類後，統計每一類質數的數量，以便於比較各類及各區間之間的差異。
4. 最後，將統計結果整理並填入 Excel 表格中，進行數據分析。透過 Excel 的圖表功能，我們可以更清晰地展示質數的分佈情況，並得出相應的結論。

(三)紀錄表格：本研究使用表格3、表格4及表格5作為紀錄表，依序如下：

質數分類 區間	1結尾	3結尾	7結尾	9結尾	合計
1-500	123	123	127	125	498
501-1000	122	131	126	121	500
1001-1500	125	126	125	124	500
1501-2000	125	127	129	119	500
2001-2500	125	125	121	129	500
2501-30000	128	121	127	124	500
總量統計	748	753	755	742	2998

1-500個質數中，2、5兩個質數不列入四大分類中。

質數個數 區間	1結尾的質數	3結尾的質數	7結尾的質數	9結尾的質數
1-500	123/498	123/498	127/498	125/498
501-1000	122/500	131/500	126/500	121/500
1001-1500	125/500	126/500	125/500	124/500

1501-2000	125/500	127/500	129/500	119/500
2001-2500	125/500	125/500	121/500	129/500
2501-3000	128/500	121/500	127/500	124/500
總量統計	748/2998	753/2998	755/2998	742/2998

	1 結尾	3 結尾	7 結尾	9 結尾
第 100 個質數	2801	2663	2687	2879
第 200 個質數	6151	6043	6037	6379
第 300 個質數	9781	9473	9697	9839
第 400 個質數	13781	13103	13417	13649
第 500 個質數	17551	17093	17137	17659
第 600 個質數	21521	21143	21347	21559
第 700 個質數	25541	25303	25147	25609

說明:表格中，OO/XX數值的代表意義：OO是質數的數量，XX是區間總數。

## 肆、 研究結果

我們將實驗後得到的數據轉換成百分比，以長條圖呈現。如下圖所示，

### 一、 表格 3 以 500 個質數為區間的統計，以下是統計的結果

#### (一)區間 (1-500)

在前 500 個質數中，各結尾質數的分佈相對均衡，1 結尾、3 結尾和 7 結尾質數分別為 123、123 和 127 個，9 結尾質數為 125 個。這說明在質數的初期階段，不同結尾的質數數量並無明顯差異。

#### (二)區間 (501-1000)

在 501-1000 質數中，3 結尾質數數量略有上升，達到 131 個，而 9 結尾質數則有所下降，為 121 個。1 結尾和 7 結尾質數分別為 122 和 126 個，保持相對穩定。

### (三)區間 (1001-1500)

在 1001-1500 質數中，各結尾質數的數量基本持平，1 結尾和 7 結尾均為 125 個，3 結尾為 126 個，9 結尾為 124 個。這一區間質數分佈呈現較為均勻。

### (四)區間 (1501-2000)

在 1501-2000 質數中，7 結尾質數數量略有上升，達到 129 個，而 9 結尾質數數量則有所下降，為 119 個。1 結尾和 3 結尾分別為 125 和 127 個。此區間的質數分佈開始出現一些波動。

### (五)區間 (2001-2500)

在 2001-2500 質數中，9 結尾質數數量上升至 129 個，超過其他結尾。1 結尾和 3 結尾維持在 125 個，7 結尾下降至 121 個。這一區間質數分佈出現較大變化。

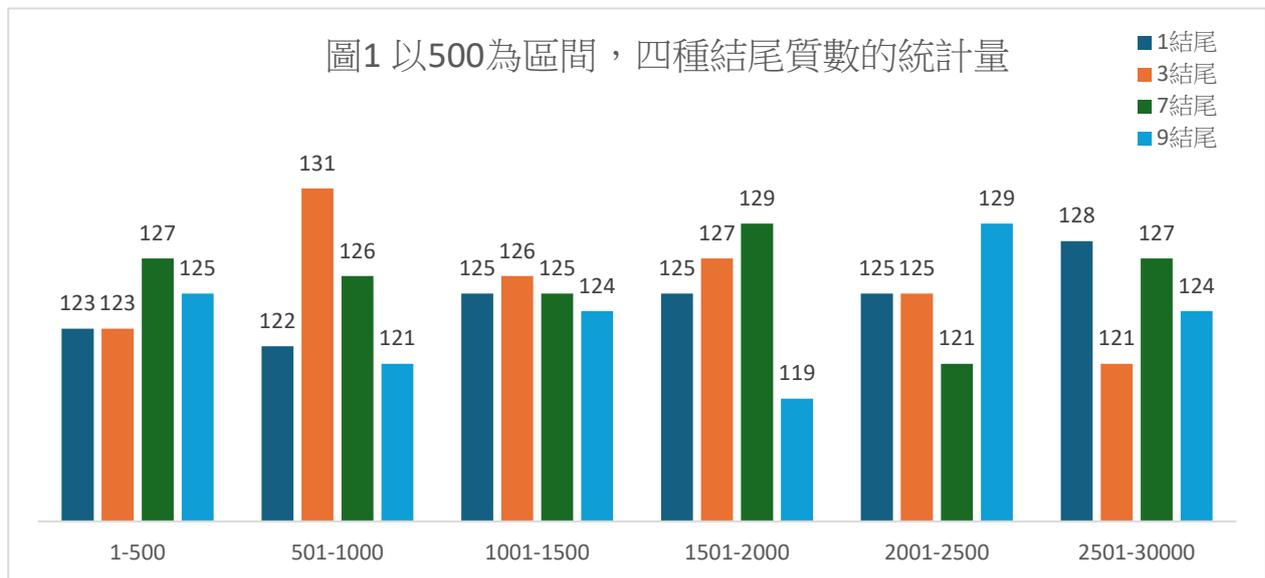
### (六)區間 (2501-3000)

在 2501-3000 質數中，1 結尾質數數量上升至 128 個，高於其他結尾。3 結尾和 7 結尾分別為 121 和 127 個，9 結尾為 124 個。這一區間質數分佈較平衡。

從長條圖中發現，我們可以從中得到以下幾點觀察：從 1-500 到 2501-3000 的 6 個區間來看，4 種結尾質數的數量基本保持平衡，數值在 120-130 之間波動。這表明質數在不同結尾上的分佈是比較均勻的。但在某些區間內還是會出現一些波動。比如在 501-1000 區間，3 結尾質數達到 131 個，高於其他結尾；在 1501-2000 區間，7 結尾質數達到 129 個，也高於其他結尾；而 1 結尾和 9 結尾質數的數量呈現緩慢上升的趨勢，而 3 結尾和 7 結尾質數則相對較為穩定。

質數分類 區間	1結尾	3結尾	7結尾	9結尾	合計
1-500	123	123	127	125	498
501-1000	122	131	126	121	500
1001-1500	125	126	125	124	500
1501-2000	125	127	129	119	500
2001-2500	125	125	121	129	500

2501-30000	128	121	127	124	500
總量統計	748	753	755	742	2998



## 二、 表格 4 質數在各區間的占比

這個圖表展示了質數個數在不同數字區間的佔比情況。我們可以從中看到以下幾點:

(一)1-500 區間: 以 1、3、7、9 結尾的質數佔比分別為 24.7%、24.7%、25.5%、25.1%。

(二)501-1000 區間: 以 1、3、7、9 結尾的質數佔比分別為 24.4%、26.2%、25.2%、24.2%。

(三)1001-1500 區間: 以 1、3、7、9 結尾的質數佔比分別為 25.0%、25.2%、25.0%、24.8%。

(四)1501-2000 區間: 以 1、3、7、9 結尾的質數佔比分別為 25.0%、25.4%、25.8%、23.8%。

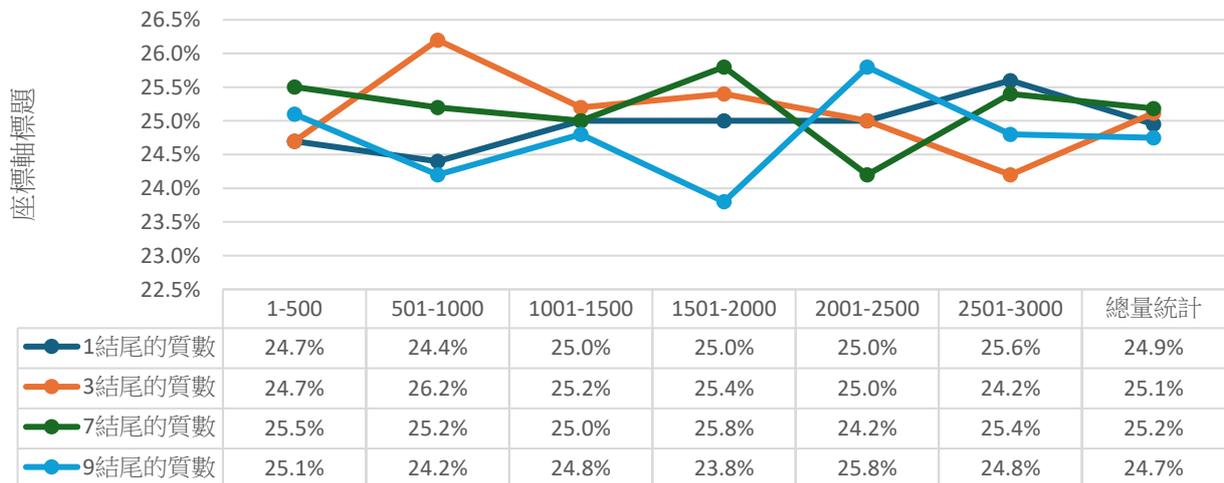
(五)2001-2500 區間: 以 1、3、7、9 結尾的質數佔比分別為 25.0%、25.0%、24.2%、25.8%。

(六)2501-3000 區間: 以 1、3、7、9 結尾的質數佔比分別為 25.6%、24.2%、25.4%、24.8%。

總量統計: 以 1、3、7、9 結尾的質數佔比分別為 24.9%、25.1%、25.2%、24.7%。從整體趨勢來看，不同數字區間的質數分佈比例大致保持穩定，沒有太大波動。

區間 \ 質數個數	1結尾的質數		3結尾的質數		7結尾的質數		9結尾的質數	
	個數	占比	個數	占比	個數	占比	個數	占比
1-500	123/498	24.7%	123/498	24.7%	127/498	25.5%	125/498	25.1%
501-1000	122/500	24.4%	131/500	26.2%	126/500	25.2%	121/500	24.2%
1001-1500	125/500	25.0%	126/500	25.2%	125/500	25.0%	124/500	24.8%
1501-2000	125/500	25.0%	127/500	25.4%	129/500	25.8%	119/500	23.8%
2001-2500	125/500	25.0%	125/500	25.0%	121/500	24.2%	129/500	25.8%
2501-3000	128/500	25.6%	121/500	24.2%	127/500	25.4%	124/500	24.8%
總量統計	748/2998	24.9%	753/2998	25.1%	755/2998	25.2%	742/2998	24.7%

圖2 質數個數在各區間的占比

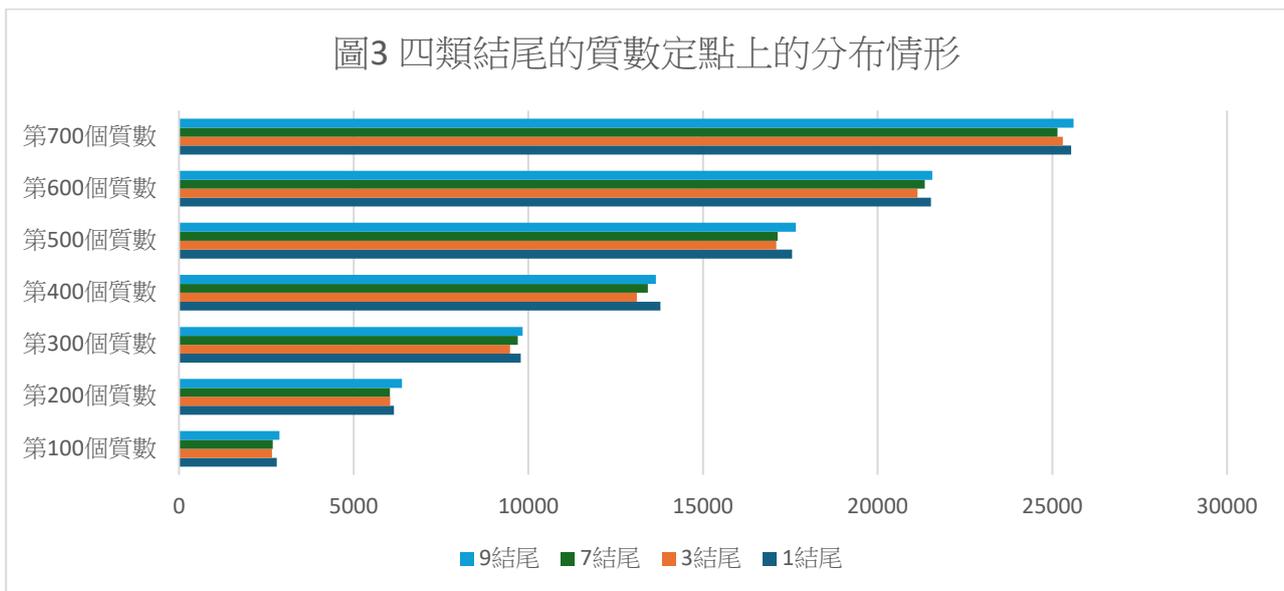


### 三、表格 5 質數在給定的定點上分布情形

這個表格顯示了四種不同結尾的質數再給定的定點上變化的情況。如下:1 結尾的質數：第 100 個質數為 2801，隨著質數序號的增加，1 結尾質數的數值也在穩定上升，第 700 個質數為 25541。3 結尾的質數:第 100 個質數為 2663，3 結尾質數的數值也在逐步增加，第 700 個質數為 25303。7 結尾的質數:第 100 個質數為 2687，7 結尾質數的數值增長相對較緩，第 700 個質數為 25147。9 結尾的質數:第 100 個質數為 2879，9 結尾質數的數值增長較快，第 700 個質數為 25609。

從整體趨勢來看，隨著質數序號的增加，各類結尾質數的數值都在穩步上升，顯示出質數分佈的特徵。其中，1 結尾和 9 結尾質數的增長速度相對較快，而 7 結尾質數的增長則相對較緩。

質數 次序	1 結尾	3 結尾	7 結尾	9 結尾
第 100 個質數	2801	2663	2687	2879
第 200 個質數	6151	6043	6037	6379
第 300 個質數	9781	9473	9697	9839
第 400 個質數	13781	13103	13417	13649
第 500 個質數	17551	17093	17137	17659
第 600 個質數	21521	21143	21347	21559
第 700 個質數	25541	25303	25147	25609



## 伍、 討論

藉由研究結果的數據，及我們在分析表格中的發現，我們和老師提出以下的討論：

- 一、 在前 3000 個質數中，不同結尾(1、3、7、9)的質數數量基本保持平衡，數值在 120-130 之間波動，顯示質數在不同結尾上的分佈是比較均勻的。但在某些區間內還是會出現一些波動，如 501-1000 區間 3 結尾質數達到 131 個，高於其他結尾;1501-2000 區間 7 結尾質數達到 129 個，也高於其他結尾。1 結尾和 9 結尾質數的數量呈現緩慢上升趨勢，而 3 結尾和 7 結尾質數則相對較為穩定。

- 二、從總體統計來看，1、3、7、9 結尾質數的佔比分別為 24.9%、25.1%、25.2%、24.7%，非常接近，顯示質數在不同結尾上的分佈是相當均勻的。也就是，在前 3000 個質數中，不同結尾質數的分佈比例大致穩定，沒有出現明顯的波動，這說明質數在不同結尾上的分佈具有一定的規律性。
- 三、在前 700 個質數中，1 結尾和 9 結尾的質數增長速度較快，第 100 個質數分別為 2801 和 2879，到第 700 個質數時分別增長到 25541 和 25609。3 結尾的質數增長排第二，第 100 個質數為 2663，到第 700 個質數時增長到 25303。相較之下，7 結尾的質數增長相對較緩慢，第 100 個質數為 2687，到第 700 個質數時增長到 25147。這顯示，在前 700 個質數中，不同結尾的質數呈現出不同的增長速度和分佈特徵。1 結尾和 9 結尾質數增長較快，3 結尾次之，而 7 結尾質數增長相對較慢。

## 陸、 結論

綜合上述，本研究得出的結論是：

- 一、前三千個質數中，不同結尾的質數，數量非常均勻，以 7 結尾最多，共有 755 個；3 結尾第二，共 753 個；1 結尾第三，共 748 個而 9 結尾雖然最少，共 742 個，但最多與最少兩者相差僅 11 個。
- 二、前三千的質數中，給予特定的區間中，它的分布非常均勻，都接近 25%。
- 三、給定定點，以 1、3、7、9 結尾的四類質數數值也非常相近。
- 四、建議：我們的研究，雖然在設定的研究範圍內，已找質數的基本特質，但無限多的質數中，仍有許多可以研究的面向，例如某個區間的質數特性，是否會和本研究的結論一樣，是值得我們繼續探究的主題。

## 柒、 參考資料及其他

- 一、質數的魔力(陳可崗， Trans.). (2005).
- 二、PrimePages。 <http://www.utm.edu/research/primes/largest.html>
- 三、第 49 屆全國科展 數學科 由 2 說起。臺灣網路科教館。  
<https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=60&sid=695>
- 四、南一出版(2024) 南一六年級上學期數學領域。台南：南一出版社。
- 五、陳會安(2023) Python X ChatGPT：零基礎 AI 聊天用流程圖學 Python 程式設計。台北