

屏東縣第65屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：步步為贏

關 鍵 詞：樓梯階層、數列、危險階層

編號：A1019

目次

壹．動機	1
貳．研究目的	2
參．研究工具或設備	2
肆．研究流程或實驗過程	3
伍．研究結果	4
陸．討論	7
柒．結論	15
捌．參考資料	16

壹. 動機

爬樓梯是大家在學校或家裡常走的設備,是否想過有幾個階梯? 要如何走到樓上的走法. 例如, 一步一步走, 或者一次走兩個階層, 當然要注意安全為上策。

萬一遇到階梯濕滑或者油漆未乾, 當然是跳過或越過這危險 (陷阱), 因為會造成危險的情況發生。

那麼這樓梯的走法, 就成了我們這次研究科展的題目與動機了。



貳. 研究目的

先觀察學校直線樓梯的階層數目大約有幾個階層? 觀察有無濕滑或者油漆未乾的地方? 找個比較少人出入又安全的樓梯，準備做研究,以免影響大家上下樓的時間。



參. 研究工具或設備

計算器, 記錄紙張, 筆, 筆電,等.



肆. 研究流程或實驗過程

一. 學校直線樓梯的階層數目, 大約有幾層? 實際觀察的結果:

1. 行政大樓: 有 12 階層與 13 階層兩種。
2. 其他大樓: 幾乎是 12 階層一種。

二. 從最簡單的樓梯階層開始研究:

1. 一階層: 當然走一步就完成了, 所以只有一種走法。

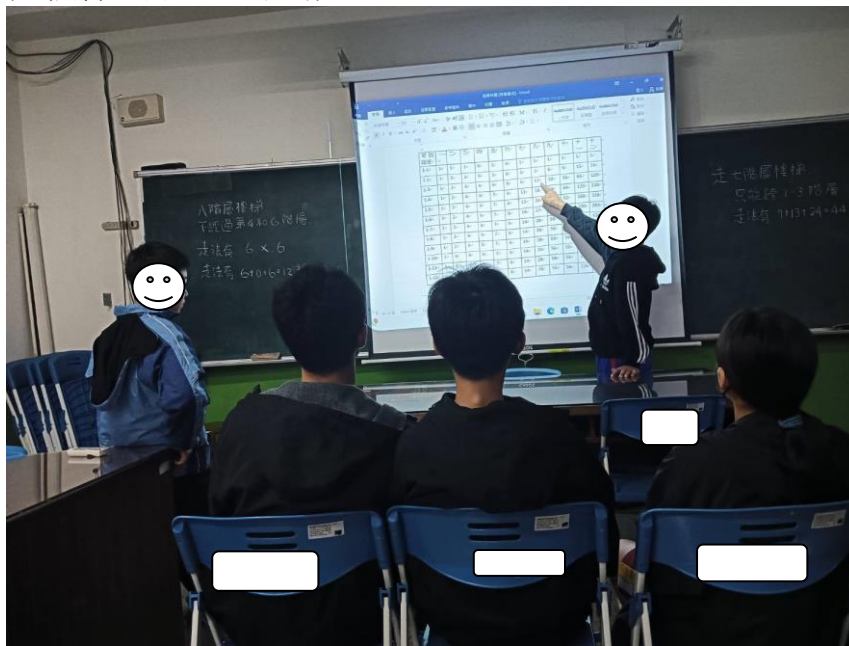
2. 二階層:

- (1) 一步一步走, 共兩步完成 (1,1)。
- (2) 一次走兩步, 一次完成 (2)。
- (3) 所以二階層樓梯有兩種走法. $2=2$ 的 1 次方。

3. 三階層---十二階層:

- (1) 一步一步走, 走三步完成 (1,1,1)。
- (2) 先走一步, 再走兩步完成 (1,2)。
- (3) 先走兩步, 再走一步完成 (2,1)。
- (4) 一次跨三層階梯完成 (3)。
- (5) 所以三階層樓梯有四種走法. $4=2$ 的 2 次方。
- (6) 如果為了安全或者身高的關係, 可以限制不能有一次三階層的走法. 這樣三階層就只剩下三種走法。

4. 危險樓梯的走法有幾種:



伍. 研究結果：

一. 四階層

1. 一步一步走，走四步完成 (1,1,1,1)。
2. (1,1,2) 步完成。
3. (1,2,1) 步完成。
4. (2,1,1) 步完成。
5. (2,2) 步完成。
6. 如果限制只能一階或二階完成走樓梯，那麼走四階層樓梯，只有伍種走法。
7. 但是如果可以一次走三或四階層，走法就變多了。
8. (1,3) 步完成。
9. (3,1) 步完成。
10. 一次四步完成(4)。
11. 這樣四階層樓梯走法就變成 8 種走法. $* 8=2$ 的 3 次方。

二. 五階層

1. 一步一步走，走五步完成 (1,1,1,1,1)。
2. (1,1,1,2) 步，(1,1,2,1) 步，(1,2,1,1) 步，(2,1,1,1) 步完成。
3. (1,2,2) 步，(2,1,2) 步，(2,2,1) 步完成。
4. 如果限制只能一階或二階完成走樓梯，那麼走五階層樓梯，只有八種走法。
5. 但是如果可以一次走三階或四階，甚至五階層，走法就變多了。
6. (1,1,3) 步，(1,3,1) 步，(3,1,1) 步完成。
7. (2,3) 步，(3,2) 步完成。
8. (1,4) 步，(4,1) 步完成。
9. 一次五步完成 (5)。
10. 這樣五階層樓梯走法，就變成 16 種走法了. $* 16=2$ 的 4 次方。

三. 六階層

1. 一步一步走，走六步完成 (1,1,1,1,1,1)。
2. (1,1,1,1,2) 步，(1,1,1,2,1) 步，(1,1,2,1,1) 步，(1,2,1,1,1) 步，(2,1,1,1,1) 步完成。
3. (1,1,2,2) 步，(1,2,2,1) 步，(2,2,1,1) 步，(2,1,1,2) 步，(2,1,2,1) 步，(1,2,1,2) 步。
4. (2,2,2) 步完成。
5. 如果限制只能一階或二階走完樓梯，那麼走六階層樓梯，只有 13 種走法。
6. 但是如果可以一次走三階，四階，五階，甚至六階層，走法就變多了。
7. (1,1,1,3) 步，(1,1,3,1) 步，(1,3,1,1) 步，(3,1,1,1) 步完成。
8. (1,2,3) 步，(1,3,2) 步，(2,1,3) 步，(2,3,1) 步，(3,2,1) 步，(3,1,2) 步完成。
9. (1,1,4) 步，(1,4,1) 步，(4,1,1) 步完成。
10. (3,3) 步完成。
11. (2,4) 步，(4,2) 步完成。
12. (1,5) 步，(5,1) 步完成。
13. 一次六步完成 (6)。
14. 這樣六階層樓梯走法，就變成 32 種走法. $* 32=2$ 的 5 次方。

四. 七階層

1. 一步一步走, 走七步完成 (1,1,1,1,1,1,1) 。
2. (1,1,1,1,1,2) 步, (1,1,1,1,2,1) 步, (1,1,1,2,1,1) 步, (1,1,2,1,1,1) 步, (1,2,1,1,1,1) 步, (2,1,1,1,1,1) 步完成。
3. (1,1,1,2,2) 步, (1,1,2,2,1) 步, (1,2,2,1,1) 步, (2,2,1,1,1) 步, (1,2,1,2,1) 步, (2,1,2,1,1) 步, (1,2,1,1,2) 步, (2,1,1,2,1) 步, (2,1,1,1,2) 步, (1,1,2,1,2) 步完成。
4. (1,2,2,2) 步, (2,1,2,2) 步, (2,2,1,2) 步, (2,2,2,1) 步完成。
5. 如果限制只能一階或二階走法, 那麼七階層樓梯走法, 只有 21 種走法。
6. 但是如果可以一次走三階, 四階, 五階, 六階, 甚至七階, 走法就變多了。
7. (1,1,1,1,3) 步, (1,1,1,3,1) 步, (1,1,3,1,1) 步, (1,3,1,1,1) 步, (3,1,1,1,1) 步完成。
8. (1,1,2,3) 步, (1,1,3,2) 步, (1,2,1,3) 步, (1,3,1,2) 步, (1,2,3,1) 步, (1,3,2,1) 步, (2,1,1,3) 步, (3,1,1,2) 步, (2,1,3,1) 步, (3,1,2,1) 步, (2,3,1,1) 步, (3,2,1,1) 步完成。
9. (1,1,1,4) 步, (1,1,4,1) 步, (1,4,1,1) 步, (4,1,1,1) 步完成。
10. (2,2,3) 步, (2,3,2) 步, (3,2,2) 步完成。
11. (1,3,3) 步, (3,1,3) 步, (3,3,1) 步完成。
12. (1,2,4) 步, (1,4,2) 步, (2,1,4) 步, (2,4,1) 步, (4,1,2) 步, (4,2,1) 步完成。
13. (3,4) 步, (4,3) 步完成。
14. (2,5) 步, (5,2) 步完成。
15. (1,1,5) 步, (1,5,1) 步, (5,1,1) 步完成。
16. (1,6) 步, (6,1) 步完成。
17. 一次走七步完成 (7) 。
18. 這樣七階層樓梯走法, 就變成 64 種走法。 * $64=2$ 的 6 次方。

五. 八階層

1. 一步一步走, 走八步完成 (1,1,1,1,1,1,1,1) 。
2. (2,1,1,1,1,1,1) 步, (1,2,1,1,1,1,1) 步, (1,1,2,1,1,1,1) 步, (1,1,1,2,1,1,1) 步, (1,1,1,1,2,1,1) 步, (1,1,1,1,1,2,1) 步, (1,1,1,1,1,1,2) 步完成。
3. (2,2,1,1,1,1,1) 步, (2,1,2,1,1,1,1) 步, (2,1,1,2,1,1,1) 步, (2,1,1,1,2,1,1) 步, (2,1,1,1,1,2,1) 步, (1,2,2,1,1,1,1) 步, (1,2,1,2,1,1,1) 步, (1,2,1,1,2,1,1) 步, (1,2,1,1,1,2,1) 步, (1,1,2,2,1,1,1) 步, (1,1,2,1,2,1,1) 步, (1,1,2,1,1,2,1) 步, (1,1,1,2,2,1,1) 步, (1,1,1,2,1,2,1) 步, (1,1,1,1,2,2,1) 步完成。
4. (2,2,2,1,1,1,1) 步, (1,2,2,2,1,1,1) 步, (1,1,2,2,2,1,1) 步, (1,2,1,2,2,1,1) 步, (1,2,2,1,2,1,1) 步, (2,1,1,2,2,1,1) 步, (2,1,2,1,2,1,1) 步, (2,2,1,1,2,1,1) 步, (2,2,1,2,1,1,1) 步完成。
5. (2,2,2,2) 步 完成走法。
6. 如果限制只能一階或二階走法, 那麼八階層樓梯就只有 34 種走法。
7. 可以一次走三, 四, 五, 六, 七, 甚至八階層, 那八階層樓梯走法就變多了。
8. (3,1,1,1,1,1,1) 步, (1,3,1,1,1,1,1) 步, (1,1,3,1,1,1,1) 步, (1,1,1,3,1,1,1) 步, (1,1,1,1,3,1,1) 步, (1,1,1,1,1,3,1) 步, (1,1,1,1,1,1,3) 步完成。
9. (2,3,1,1,1,1,1) 步, (3,2,1,1,1,1,1) 步, (2,1,3,1,1,1,1) 步, (3,1,2,1,1,1,1) 步, (2,1,1,3,1,1,1) 步, (3,1,1,2,1,1,1) 步, (2,1,1,1,3,1,1) 步, (3,1,1,1,1,2,1) 步, (1,2,3,1,1,1,1) 步, (1,3,2,1,1,1,1) 步, (1,2,1,3,1,1,1) 步, (1,3,1,2,1,1,1) 步, (1,2,1,1,3,1,1) 步, (1,1,3,2,1,1,1) 步, (1,1,2,1,3,1,1) 步, (1,1,3,1,2,1,1) 步, (1,1,1,2,3,1,1) 步, (1,1,1,1,3,2,1) 步完成。

10. (2,2,3,1) 步, (2,2,1,3) 步, (2,1,2,3) 步, (2,3,2,1) 步, (2,1,3,2) 步, (2,3,1,2) 步, (1,2,2,3) 步, (3,2,2,1) 步, (1,2,3,2) 步, (3,2,1,2) 步, (1,3,2,2) 步, (3,1,2,2) 步完成。
11. (2,3,3) 步, (3,2,3) 步, (3,3,2) 步完成。
12. (1,1,3,3) 步, (1,3,1,3) 步, (1,3,3,1) 步, (3,1,1,3) 步, (3,1,3,1) 步, (3,3,1,1) 步完成。
13. (4,1,1,1,1) 步, (1,4,1,1,1) 步, (1,1,4,1,1) 步, (1,1,1,4,1) 步, (1,1,1,1,4) 步完成。
14. (1,1,2,4) 步, (1,1,4,2) 步, (1,2,1,4) 步, (1,4,1,2) 步, (1,2,4,1) 步, (1,4,2,1) 步, (2,1,1,4) 步, (4,1,1,2) 步, (2,1,4,1) 步, (4,1,2,1) 步, (2,4,1,1) 步, (4,2,1,1) 步完成。
15. (1,3,4) 步, (1,4,3) 步, (3,1,4) 步, (4,1,3) 步, (3,4,1) 步, (4,3,1) 步完成。
16. (4,2,2) 步, (2,4,2) 步, (2,2,4) 步完成。
17. (4,4) 步完成。
18. (5,1,1,1) 步, (1,5,1,1) 步, (1,1,5,1) 步, (1,1,1,5) 步完成。
19. (6,1,1) 步, (1,6,1) 步, (1,1,6) 步完成。
20. (3,5) 步, (5,3) 步, (5,1,2) 步, (5,2,1) 步, (1,5,2) 步, (2,5,1) 步, (1,2,5) 步, (2,1,5) 步完成。
21. (2,6) 步, (6,2) 步, (1,7) 步, (7,1) 步完成。
22. 一次走八步完成 (8)。
23. 這樣八階層樓梯的走法, 總共有 128 種走法。 * $128=2$ 的 7 次方。

六. 九階層

1. 由以上一到八階層樓梯的走法. 我們發現有一個規則:
走 N 階層樓梯的走法有 2 的 (N-1) 次方的走法。
2. 如果這樣規則, 那麼 九階層, 有 2 的 8 次方的走法, 就是有 256 種走法。

七. 十階層

1. 按照以上的規則走法, 那麼 十 階層樓梯的走法, 總共有 2 的 9 次的走法。
2. 也就是 十 階層 有 512 種走法。

八. 十一階層

1. 十一階層樓梯的走法, 總共有 2 的 10 次方種走法。
2. 也就是 11 階層樓梯有 1024 種走法。

九. 十二階層

1. 十二階層樓梯的走法, 總共有 2 的 11 次方種走法。
2. 也就是 12 階層樓梯有 2048 種走法。

陸. 討論

一. 我們將以上發現的走法與階層樓梯走法用表格來表示。如果限制其走法, 不包刮危險樓梯的走法。

1. 可跨 1-2 階層, 先找到該格子, 再加上前 2 項數字的和來表示其走法。

(1) 例如: 三階層樓梯, 只能跨一階或二階層的走法, 是先找到三階層, 但只能 1-2 階的格子, 發現前 2 數字是 1 和 2, 那麼三階層樓梯但限制 1-2 階層走法就是 $1+2=3$ 種走法。

(2) 例如: 四階層樓梯, 只能跨一或二階層的走法, 是先找到四階層, 但只能走 1-2 階層的格子, 發現前 2 數字是 2 和 3, 那麼四階層樓梯但限制 1-2 階層走法, 就是有 $2+3=5$ 種走法。

2. 可跨 1-3 階層, 先找到該格子, 加上前 3 項數字的和來表示其走法。

(1) 例如: 四階層樓梯, 只能跨一或二或三階層的走法, 是先找到該格子, 發現前 3 數字是 1,2,4, 那麼四階層樓梯可跨 1-3 階層, 就有 $1+2+4=7$ 種走法。

(2) 例如: 五階層樓梯, 可跨 1-3 階層, 也是先找到該格子, 發現前 3 數字是 2,4,7, 那麼五階層樓梯可跨 1-3 階層, 就有 $2+4+7=13$ 種走法。

3. 可跨 1-4 階層, 先找到格子, 再加上前 4 項數字的和來表示其走法。

(1) 例如: 五階層樓梯, 只能跨 1-4 階層的走法, 先找到該格子, 發現前 4 個數字是 1,2,4,8, 那麼五階層樓梯, 可跨 1-4 階層, 就有 $1+2+4+8$ 種走法。

(2) 例如: 七階層樓梯, 只能 1-4 階層, 先找到該格子, 發現前 4 個數字分別是 4,8,15,29, 那麼七階層樓梯, 可跨 1-4 階層的走法有 $4+8+15+29=56$ 種走法。

4. 可跨 1-5 階層, 先找到該階層格子, 再加上前 5 項數字的和來表示其走法。

(1) 例如: 七階層樓梯, 只能跨 1-5 階層的走法, 就有 $2+4+8+16+31=61$ 種走法。

5. 可跨 1-6 階層, 先找到該階層格子, 再加上前 6 項數字的和來表示其走法。

(1) 例如: 九階層樓梯, 能跨 1-6 階層的走法, 就有 $4+8+16+32+63+125=248$ 種走法。

二. 以上的樓梯階層, 和限制的階層走法, 依照前面的規則, 就能用一張表格來表示其走法。

三. 依照題目的限制階層, 查表得知, 該階層樓梯的限制階層的走法了。

可跨 階層	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
1-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1-2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
1-3	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927
1-4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401	773	1490
1-5	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464	912	1793
1-6	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492	976	1937
1-7	1	2	4	8	16	32	64	127	253	504	1004	2000
1-8	1	2	4	8	16	32	64	128	255	509	1016	2028
1-9	1	2	4	8	16	32	64	128	256	511	1019	2038
1-10	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1023	2045
1-11	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2047
1-12	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

四．再來是討論：萬一樓梯階層中間有危險的情況發生，那麼又有什麼走法呢？

我們這項難題，想了很久，終於用表格來呈現其走法與步數。

(一) 可跨 1-N 階層，也是先找到該階層格子，再加上前 N 項數字的和。

1. 如果不經過第 4 階層與第 6 階層，那麼我們就跳過第 4 階層和第 6 階層

並且用 0 計算，依照以下方法來製作表格。

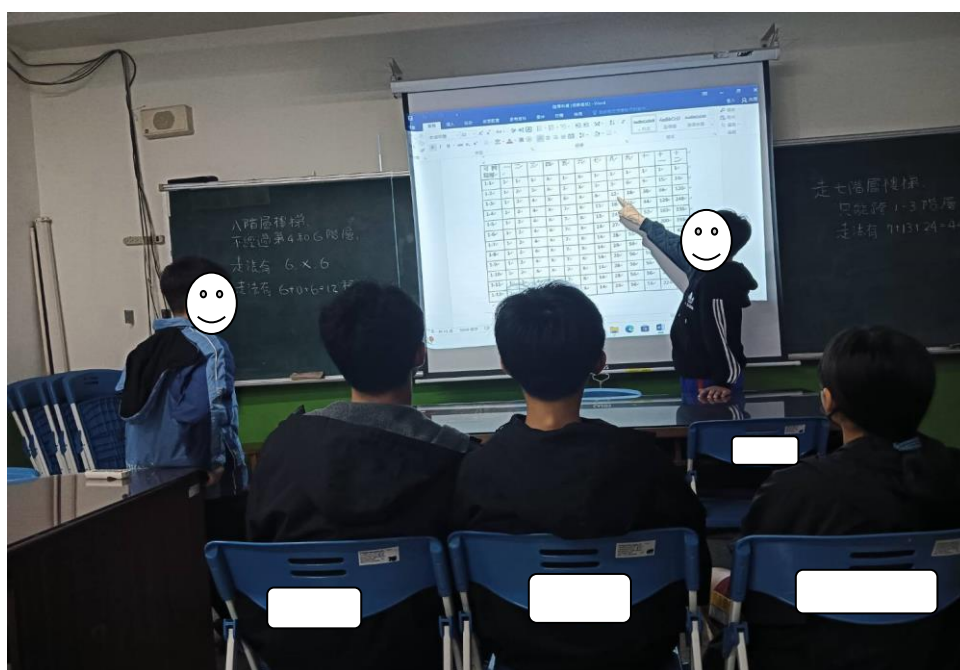
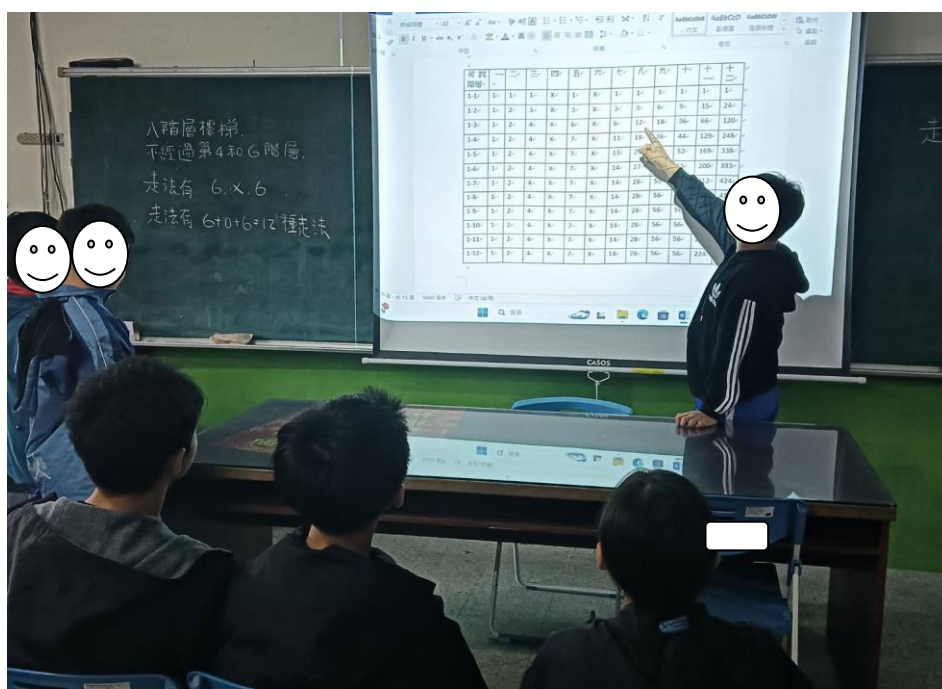
(1) 例如：八階層樓梯，可跨 1-3 階層，不經過第 4 階層，和第 6 階層，先找到第八階層，可跨 1-3 階層的格子，發現該格子的前 3 個數字是 6,X,6，那麼該格數字的填法就是 $6+0+6=12$ ，也就是有 12 種走法。

(2) 例如：九階層樓梯，可跨 1-4 階層，不經過第 4 階層和第 6 階層，先找到第九階層，可跨 1-4 階層的格子，發現該格子的前 4 個數字是 7,X,11,18，那麼該格數字的填法就是 $7+0+11+18=36$ ，也就是有 36 種走法。

(3) 例如：七階層樓梯，可跨 1-3 層階層，不經過第 4 階層和第 6 階層，先找到第七階層，可跨 1-3 階層的格子，發現該格子的前 3 個數字是 X,6,X，那麼該格子數字的填法就是 $0+6+0=6$ ，也就是有 6 種走法。

可跨階層	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
1-1	1	1	1	X	1	X	1	1	1	1	1	1
1-2	1	2	3	X	3	X	3	3	6	9	15	24
1-3	1	2	4	X	6	X	6	12	18	36	66	120
1-4	1	2	4	X	7	X	11	18	36	44	129	248
1-5	1	2	4	X	7	X	13	24	44	52	169	338
1-6	1	2	4	X	7	X	14	27	52	55	200	393
1-7	1	2	4	X	7	X	14	28	55	56	212	424
1-8	1	2	4	X	7	X	14	28	56	56	219	435
1-9	1	2	4	X	7	X	14	28	56	56	223	444
1-10	1	2	4	X	7	X	14	28	56	56	224	447
1-11	1	2	4	X	7	X	14	28	56	56	224	448
1-12	1	2	4	X	7	X	14	28	56	56	224	448

- (4) 例如：七階層樓梯，可以跨 1-4 階層，但是要避開第 4 階與第 6 階走法是：
11 種走法。(查表，即可以看出其走的步數走法有幾種？)
- (5) 十階層樓梯，限制只准跨 1-3 階層，而且要避開第 4 與第 6 階層的走法有
36 種走法 (也是查詢以上的表格來看出其走法有幾種)。
- (6) 所以因此可以看出，要避開危險陷阱的階梯走法，就必須要先知道有哪些或
哪個階層要避開，當然就有其不同的表格來製作與說明了。

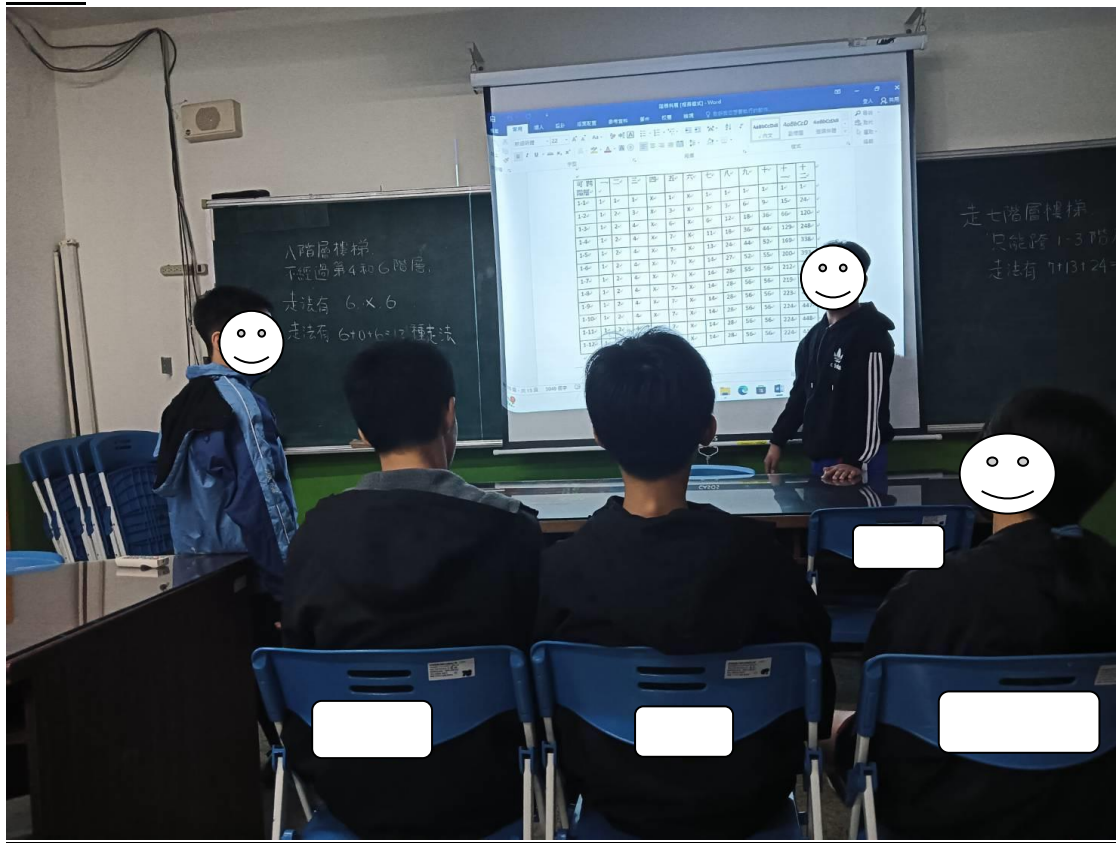


2. 如果不經過第 5 階層, 那麼我們就 越(跳)過, 不經過第 5 階層, 第 5 階層的步數用 0 來計算, 於是又有一張表格. 依照題目的規則, 來製作表格:

- (1) 例如: 七階層樓梯, 跨 1-3 階層, 但是不能經過第 5 層階梯, 先找到七階層, 可跨 1-3 階層, 發現該格子的前 3 個數字是 7, X, 11, 三個數字, 麼該格子的填法就是 $7+0+11=18$ 。
- (2) 例如: 八階層樓梯, 可跨 1-2 階層, 但是不經過第 5 階層。先找到第八階層, 可跨 1-2 階層. 發現該格子的前 2 個數字是 5, 5. 那麼該格子的填法就是 $5+5=10$, 也就是有 10 種走法。
- (3) 例如: 七階層樓梯, 可跨 1-2 階層. 先找到該第七階層, 可跨 1-2 階層, 發現該格子的前 2 個數字是 X, 5. 也就是該格子的填法是 $0+5=5$, 也就是有 5 種走法。

可跨階層	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
1-1	1	1	1	1	X	1	1	1	1	1	1	1
1-2	1	2	3	5	X	5	5	10	15	25	40	65
1-3	1	2	4	7	X	11	18	29	58	105	192	355
1-4	1	2	4	8	X	14	26	48	88	176	338	650
1-5	1	2	4	8	X	15	29	56	108	208	416	817
1-6	1	2	4	8	X	15	30	59	116	228	448	896
1-7	1	2	4	8	X	15	30	60	119	236	468	918
1-8	1	2	4	8	X	15	30	60	120	239	476	948
1-9	1	2	4	8	X	15	30	60	120	240	479	956
1-10	1	2	4	8	X	15	30	60	120	240	480	959
1-11	1	2	4	8	X	15	30	60	120	240	480	960
1-12	1	2	4	8	X	15	30	60	120	240	480	960

- (4) 七階層樓梯, 限制只能跨 1-3 階層, 要避開第 5 階層, 走法有 18 種走法, (查表得知)。
- (5) 九階層樓梯, 限制只能跨 1-4 階層, 要避開第 5 階層, 走法有 88 種走法, (查表得知)。
- (6) 六階層樓梯, 限制只能跨 1-3 階層, 要避開第 5 階層, 走法有 11 種走法, (查表得知)。

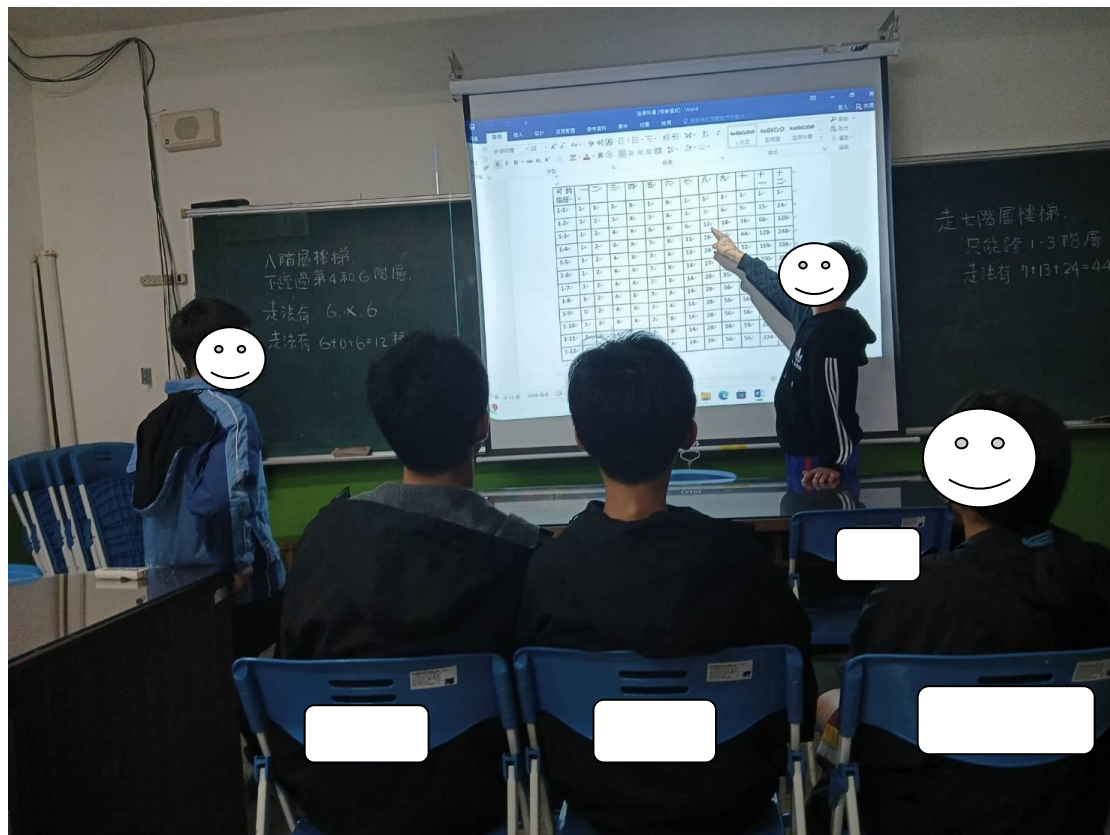


- 3 如果不經過第 5 階層, 第 8 階層, 和第 10 階層, 那我們就要跳(越)過, 不經過第 5 階層, 第 8 階層, 第 10 階層這三階層。這三階層的步數打 X, 並以 0 計算。於是又有一張表格可以畫出, 並且查表, 迅速查表得知其走法。

可跨步數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
1-1	1	1	1	1	X	1	1	X	1	X	1	1
1-2	1	2	3	5	X	5	5	X	5	X	5	5
1-3	1	2	4	7	X	11	18	X	29	X	29	58
1-4	1	2	4	8	X	14	26	X	40	X	66	106
1-5	1	2	4	8	X	15	29	X	52	X	96	177
1-6	1	2	4	8	X	15	30	X	57	X	102	204
1-7	1	2	4	8	X	15	30	X	59	X	102	206
1-8	1	2	4	8	X	15	30	X	60	X	117	230
1-9	1	2	4	8	X	15	30	X	60	X	119	236
1-10	1	2	4	8	X	15	30	X	60	X	120	239
1-11	1	2	4	8	X	15	30	X	60	X	120	240
1-12	1	2	4	8	X	15	30	X	60	X	120	240

柒. 結論：

- 一. 走樓梯的走法, 可以有很多種走法. 但是還是要以安全為最重要的目的。
- 二. 當然走樓梯階層可以限制其階層步數 (例如可以一次走 1-3 階層), 我們終於開發出一種表格。
- 三. 可以將限制的階層步數, 和樓梯總數, 做一個表格來說明與查詢。
- 四. 至於第幾階層或是那些階層要避免. 我們要將其跳過, 當然就要以陷阱的階層再製作一張表格, 來求出要走的步數與走法。
- 五. 有了限制步數的走法與危險的階層。我們就能做出一張我們心目中的一張表格來查閱與說明。



捌. 參考資料

一. AMC 8 考古題。

二. 國民小學 南一書局 第 12 冊 單元名稱 怎樣解題

