屏東縣第65屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：我的移動城堡

關 鍵 詞：凸多面體、展開圖、尤拉公式

編號：A1006

摘　要

摺紙是藝術，與數學相結合，可以產生甚麼火花呢？於是我們將摺紙融入課程學習到的幾何概念，如角度、正方形、正三角形、尋找規律的基本理論，嘗試在幾何世界中，了解更多存在的現象，創造更多無限可能。所以我們尋找可用的摺紙方法，展現多采多姿的多面體，在藝術領域中沉靜思考，對於數學的學習有著不可思議的成效。

前　言

一、研究動機

升上四年級為了準備校慶的作品展覽，我們用紙摺出了正三角形和正方形，並且組合成各種立體。我們從三年級開始就對各種幾何圖形產生濃厚的興趣，四年級上學期我們學到了正三角形、正方形、圖形的密鋪，這學期更學到四邊形的單元，老師都會利用她擅長的摺紙把這圖形具象化變成我們可以摸得到的教具，讓我們能更深入淺出的學習這些圖形特徵；其中老師延伸了一些摺紙的技巧，雖然其中的理論是高年級，甚至是國中的的範圍，但是我們利用實際量測的方式，也能了解。隨著難度增加，這些幾何圖形已不是我們在課本裡學到的基礎，但卻觸發我們想要持續探索的心，我們開始思考，如果依靠動手實際量測及試驗，運用我們所學到的概念，進一步尋找規律，單純的摺紙是否能跟其他已知的基本概念相結合？於是我們開始展開了研究多面體的旅程。

二、研究目的

1、用正方形色紙摺出正三角形的邊與正方形的邊等長。
2、正方形對角線與邊長的關係
3、將正三角形與正方形組合成凸多面體。
4、從柏拉圖多面體到詹森多面體的組成。
5、從組合的凸多面體研究邊、頂點與面的關係。
6、找出多面體展開圖的規律。

貳、研究設備及器材

1、色紙、瓦楞紙
2、麥克筆、彩色筆
3、膠水、雙面膠、透明膠帶
4、美工刀、剪刀
5、平板、電腦
6、用色紙摺好的正方形、正三角形及等腰三角形

參、研究過程或方法

一、名詞解釋

1、正方形：四個角都是 90 度，四個邊都一樣長的四邊形。
2、正三角形：三個角都是 60 度，三個邊都一樣長的三角形。
3、等腰三角形：兩個底角香等，兩個腰一樣長的三角形。
4、對角線：多邊形或多面體中兩個不在同一邊上之頂點的線段。
5、全等：將兩個三角形剪下疊合，若它們所有的頂點、邊、角都完全重合，就稱這兩個三角形全等。
6、凸多面體：指所有邊上的二面角（兩個面所形成的角）都不大於 180°不存在自相交的多面體。
7、尤拉公式：多面體的頂點數 V ，邊數 E ，面數 F，則 V - E + F = 2。
8、旋轉對稱：把一個圖形圍繞某一個點旋轉一定度數，旋轉後的圖形與旋轉前重合，該圖形就具備旋轉對稱性。
9、立體角：可以組成立體圖形的角度。

二、代號說明

F：面的個數

F_3：正三角形面的個數

F_4 ：正方角形面的個數

E：邊的個數

V：頂點的個數

ETn(F_3）：由正三角形組成的多面體

SETn(F_3、F_4）；由正方形及正三角形組成的多面體

三、研究架構

（一）正方形及正三角形的摺法探討
（二）找出與正方形邊長相等的等腰三角形組合元件
（三）柏拉圖多面體
（四）利用正三角形組合多面體
（五）正方形及正三角形組合多面體
（六）從立體到展開圖
（七）尋找規律
（八）生活中的應用

伍、研究過程與結果

一、正方形及正三角形的摺法

1、正方形的摺法

Step1	Step2	Step3
Step8	正方形的摺法	Step4
Step7	Step6	Step5

2、正三角形的摺法

一張色紙對摺 Step1 Step2	Step3	Step4
Step9	正三角形的摺法	Step5
Step8	Step7	Step6

二、與正方形邊長相等的等腰三角形組合元件

1、等腰三角形的摺法

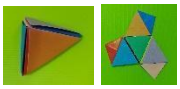
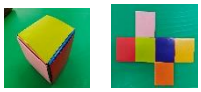
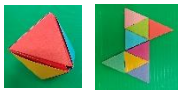
<table>
<tr>
<td>將一張色紙分成四等分
Step1 Step2

Step3
 </td>
<td>Step4:取一張 1/4 色紙對摺
 </td>
<td>Step5:
 </td>
</tr>
<tr>
<td>Step10
 </td>
<td>等腰三角形的摺法</td>
<td>Step6
 </td>
</tr>
<tr>
<td>Step9
 </td>
<td>Step8
 </td>
<td>Step7
 </td>
</tr>
</table>

三、柏拉圖多面體

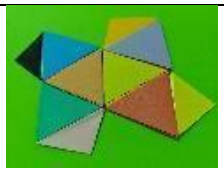
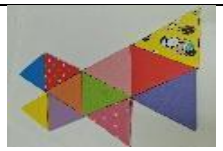
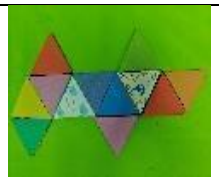
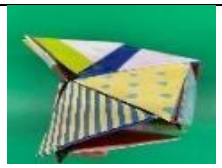
(一)從平面到立體:組合成立體最少要三個面，而且不可以拼成 360^0，因此，我們得到一個結果如下表。

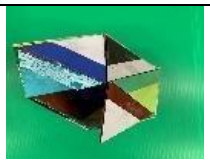
(二)組合凸多面體

	P1(正四面體)	P2(正六面體)	P3(正八面體)	P5(正二十面體)
				
F_3	4	6	8	20
E	6	12	12	30
V	4	8	6	12

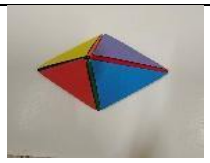
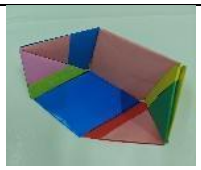
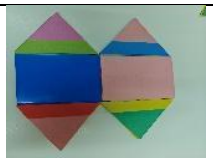
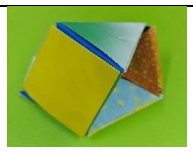
四、利用正三角形組合多面體

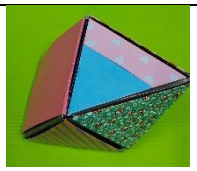
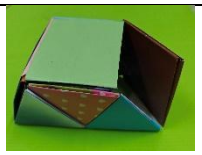
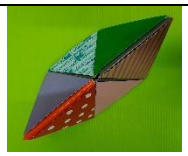
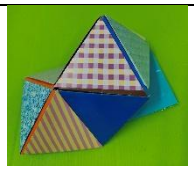
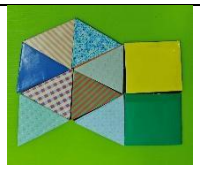
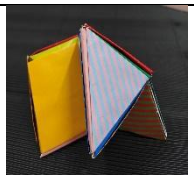
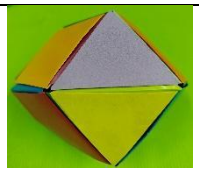
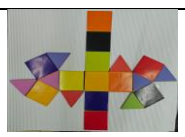
	立體圖	展開圖
$F_3=5$		

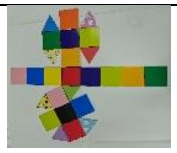
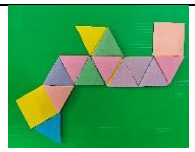
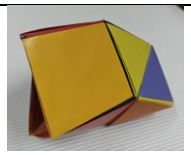
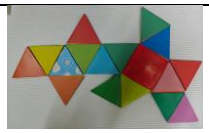
F_3=6		
F_3=7		
F_3=9		
F_3=10		
F_3=11		
F_3=12		
F_3=13		
F_3=14		
F_3=15		
F_3=16		

F_3=17		
F_3=18		
F_3=19		
F_3=20		

五、正方形及正三角形組合多面體

	立體圖	展開圖
F_3 =4，F_4=1		
F_3=4，F_4=2		
F_3=4，F_4=3		
F_3=4，F_4=4		
F_3=4，F_4=5		
F_3=6，F_4=1		

$F_3=6$，$F_4=2$		
$F_3=6$，$F_4=3$		
$F_3=6$，$F_4=4$		
$F_3=8$，$F_4=1$		
$F_3=8$，$F_4=2$		
$F_3=8$，$F_4=3$		
$F_3=8$，$F_4=4$		
$F_3=8$，$F_4=5$		
$F_3=8$，$F_4=6$		
$F_3=8$，$F_4=10$		
$F_3=8$，$F_4=12$		

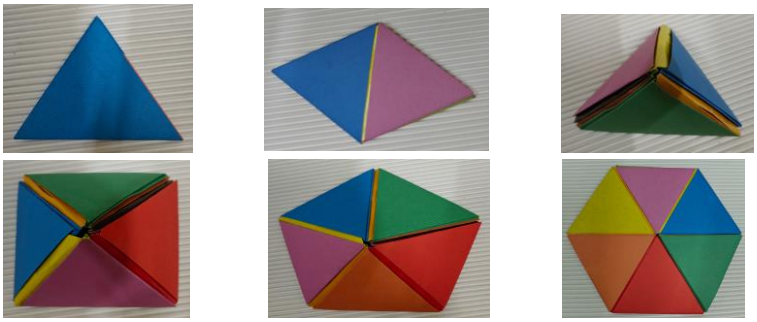
$F_3=8$，$F_4=18$		
$F_3=10$，$F_4=1$		
$F_3=10$，$F_4=2$		
$F_3=10$，$F_4=5$		
$F_3=12$，$F_4=1$		
$F_3=12$，$F_4=2$		
$F_3=14$，$F_4=1$		
$F_3=14$，$F_4=2$		
$F_3=16$，$F_4=1$		
$F_3=16$，$F_4=2$		
$F_3=20$，$F_4=4$		

$F_3=20$，$F_4=6$		
$F_3=24$，$F_4=2$		
$F_3=24$，$F_4=10$		

六、從平面到立體

(一)用正方形組合：一張正方形是平面，兩張正方形組合是平面，四張正方形組合也是平面，只有三張正方形組合成立體，如下面的圖。

（二）、用正三角形組合：以正三角形的組合，一張、兩張及六張是平面，三張、四張及五張可以組成立體，結果如下。

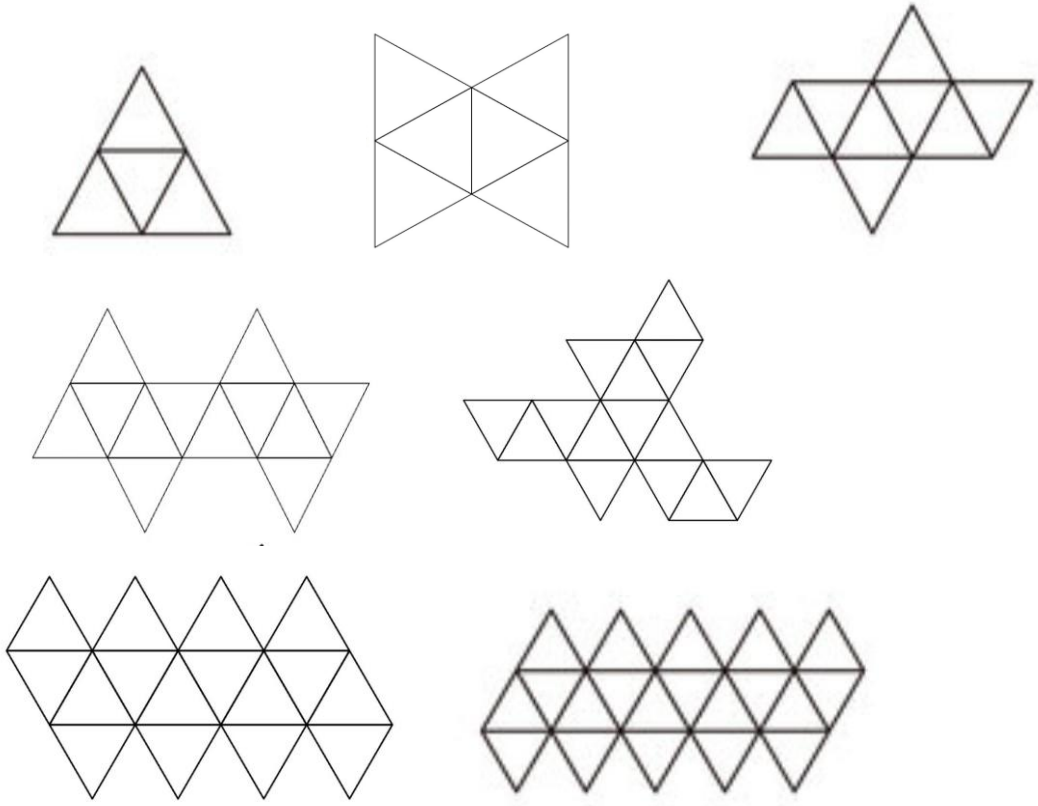


（三）、用正方形及正三角形組合：可以組成立體有六種，如下表。

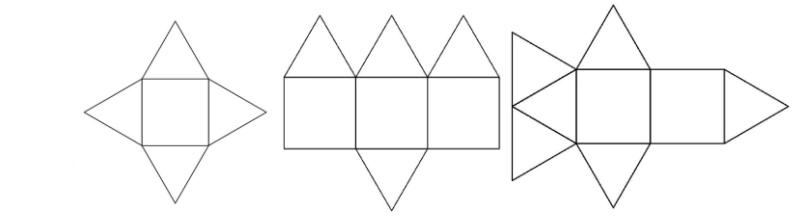
F_4+2F_3	F_4+3F_3	F_4+4F_3	$2F_4+1F_3$	$2F_4+2F_3$	$3F_4+F_3$

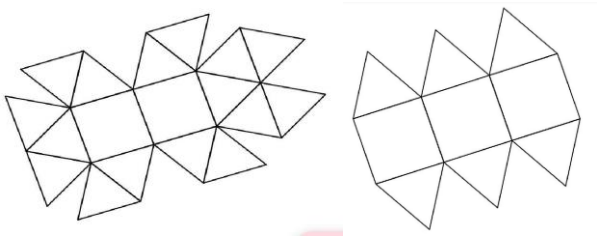
七、尋找規律：我們將組成的多面體分類，得到了三種族群。

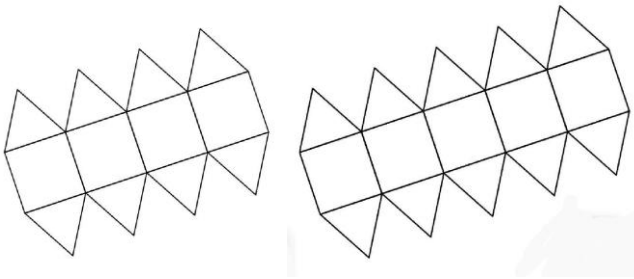
（一）只有正三角形的正多面體的展開圖



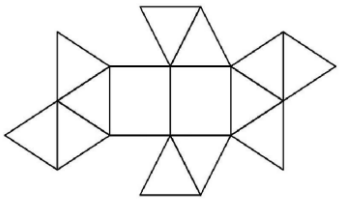
（二）用正方形和正三角形組合的線對稱

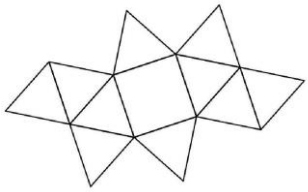


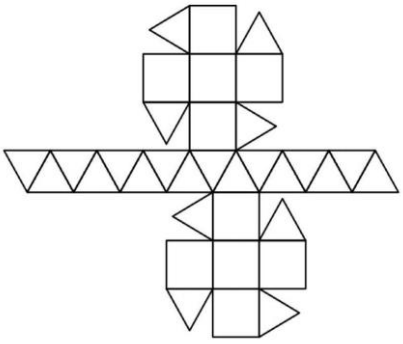


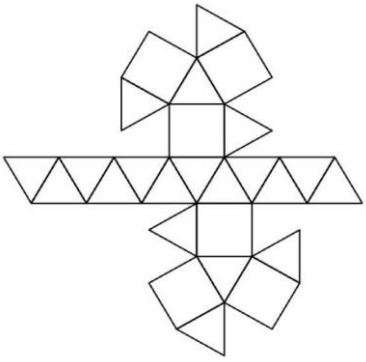


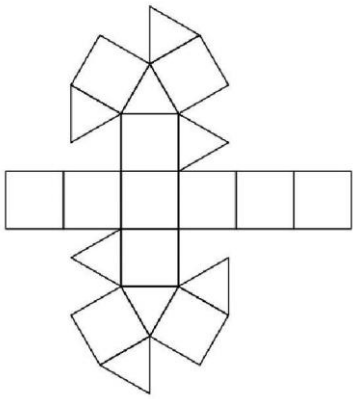
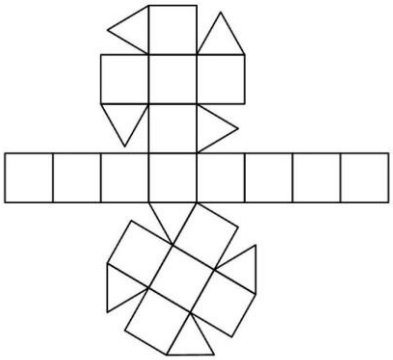
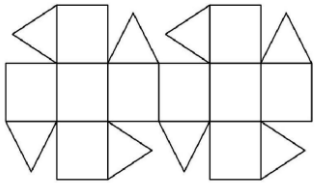
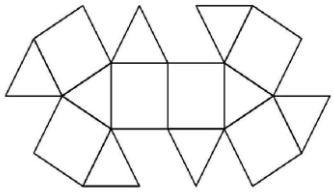
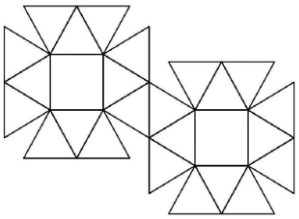
（三）旋轉風車









八、生活中的應用

(一)設計組合屋或帳篷

（二）汽車多視角後照鏡

陸、討論

一、立體角的探討:將組成立體咬的所有可能裂成下表。

F_4	0			1			2		3
	0^0			90^0			$90^0\times3=180^{0\times}$		$90^0\times3=270^{0\times}$
F_3	3	4	5	2	3	4	1	2	1
	$60^0\times3$ $=180^0$	$60^0\times4$ $=240^0$	$60^0\times5$ $=300^0$	$60^0\times2$ $=120^0$	$60^0\times3$ $=180^0$	$60^0\times4$ $=240^0$	60^0	$60^0\times2$ $=120^0$	60^0
總度數	180^0 $<$ 360^0	240^0 $<$ 360^0	300^0 $<$ 360^0	310^0 $<$ 360^0	270^0 $<$ 360^0	330^0 $<$ 360^0	150^0 $<$ 360^0	300^0 $<$ 360^0	330^0 $<$ 360^0

二、邊、點、面的個數：將組合出來的多面體重新命名，由正三角形組合而成的多面體成為 $ETn(F_3)$，由正方形及正三角形組合成的多面體名為 $SETn(F_3，F_4)$。因此，我們將扁、點、面的個數做成表格如下：

（一）、只有正三角形組成的多面體

名稱	E(邊的個數）	F(面對個數)	V(點的個數)
ET1(4)	6	4	4
ET2(6)	9	6	5
ET3(8)	12	8	6
ET4(10)	15	10	7
ET5(12)	18	12	8
ET6(14)	21	14	9
ET7(16)	24	16	10
ET8(20)	30	20	12

（二）、由正方形及正三角形組合成的多面體

名稱	E(邊的個數）	F(面對個數)	V(點的個數)
SET1(4，1)	8	5	5
SET3(4，3)	12	7	7
SET3(4，4)	14	8	8
SET4(4，5)	16	9	9
SET5(6，2)	13	8	7
SET6(6，3)	15	9	8
SET7(8，4)	20	12	10
SET8(8，6)	24	14	12
SET9(8，10)	32	18	16
SET10(8，12)	36	20	18
SET11(8，18)	48	26	24
SET12(10，1)	17	11	8

SET13(10，5)	25	15	12
SET14(12，1)	20	13	9
SET15(12，2)	22	14	10
SET16(16，1)	26	17	11
SET17(16，2)	28	18	12
SET18(20，4)	38	24	16
SET19(20，6)	42	26	18
SET20(24，2)	40	26	12
SET21(24，10)	56	34	24

二、多面體的關係

(一)線對稱：以下八種綻開圖是線對稱

ET2(6) 、 ET3(8) 、ET4(10) 、

SET1(4，1) 、SET2(4，3) 、SET5(6，2) 、SET9(8，10) 、SET17(16，2)

(二)以正方形為底的家族

SET1(4，1) 、SET5(6，2) 、SET6(6，3) 、SET7(8，4) 、SET13(10，5)

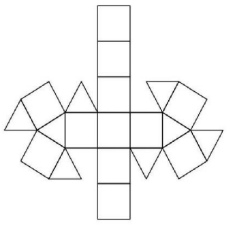
（三） SET3(4，3）家族

1、SET3(4，3）

2、 SET8(8，6）= SET3(4，3）×2+6

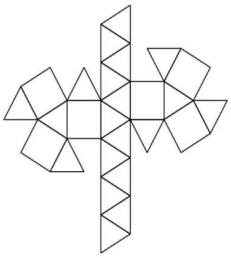
3、SET10（8，12）= SET3(4，3）×2+6（F_4)

展開圖



4、SET19（20，6）= SET3(4，3）×2+12（F_3）

展開圖



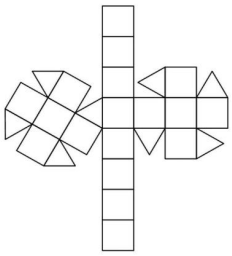
（四） SET4(4，5）家族

1、SET4(4，5）

2、SET9(8，10）=SET4(4，5）×2

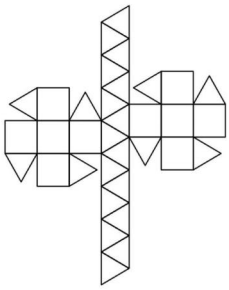
3、SET11（8，18）=SET4(4，5）×2+8（F_4)

展開圖



4、SET21（24，20）=SET4(4，5）×2+16（F_3）

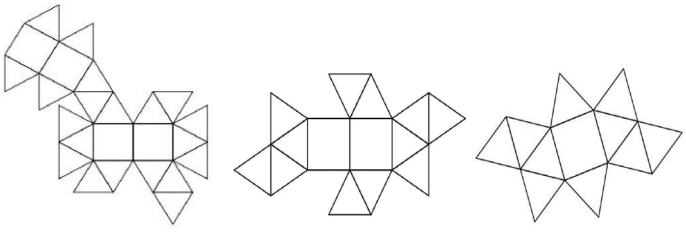
展開圖

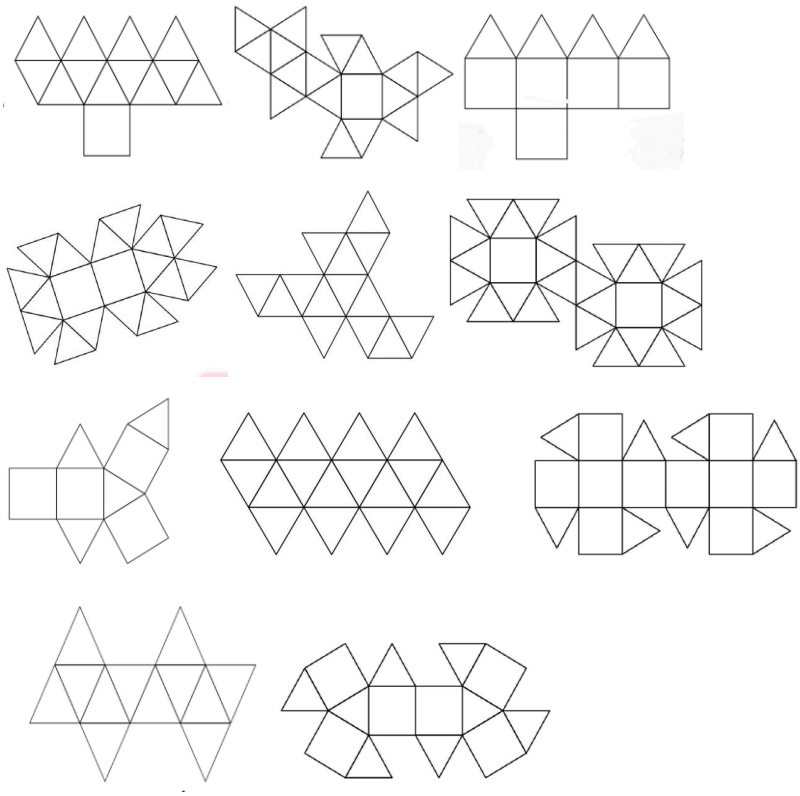


三、邊與面的關係:因為正三角形有 3 個遍，正方形有 4 個遍，但是在組合時，兩個面共用一邊，所以要除以 2。因此我們把邊的求法記成

$$E=(F_3\times3+F_4\times4)\div2$$

四、展開圖的旋轉與對稱:如果將展開圖的某處當成中心點，旋轉每個角度之後，展開圖會與原來重合。





柒、結論

一、立體角:組合成立體至少要三個面，而且角度的總和要小於 360 度。

二、旋轉對稱：凸多面體有些是線對稱，有些是點對稱，但是如果以旋轉對稱來看，我們組合的都屬於旋轉對稱。

三、邊與面的關係：計算多面體邊數的公式

$$E=F_3\times3+F_4\times4\div2$$

四、點、邊、面的關係:符合尤拉公式，可以了解點、邊、面的關係。

$$V+F=E+2$$

捌、未來展望

以上的研究及討論，只有侷限在正方形及正三角形的組合，若是能夠加入更多其他的多邊形，在生活中的應用能更加有成效。因此，未來我們將尋找更多的摺紙方法，探討出適切的結論，創造有用的設計。

玖、參考文獻及資料

國小數學課本第七冊 翰林版
國小數學課本第八冊 翰林版
第 46 屆國中小學科學展覽會作品 柏拉圖的天空-正多面體展開圖之研究
第 46 屆國中小學科學展覽會作品 璀菜幾何-多面體之規律探究
展開圖二三事 https://www.sec.ntnu.edu.tw
維基百科-詹森多面體 https://zh.wikipedia.org