

屏東縣第65屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數 學

組 別：國 小

作品名稱：讀 心 術 — AI 魔 法 牌

關 鍵 詞：魔 法 牌、二 進 位、數 列 規 律

編號：A1017

目 錄

摘要	1
壹、前言	1
一、研究動機	1
二、研究目的	1
三、文獻回顧	2
貳、研究過程與結果	3
研究一 探討魔法牌的設計原理	3
研究二 探討不同進位方式魔法牌的設計原理	6
研究三 使用其他運算方法設計 AI 魔法牌	11
研究四 結合 Excel 設計 e 世代 AI 魔法牌	15
研究五 製作創意 AI 魔法牌	17
參、討論.....	19
肆、結論.....	21
伍、參考資料.....	22
陸、附錄.....	23
附錄一 AI 魔法牌 Excel 檔內容.....	23
附錄二 創意 AI 魔法牌玩法	25

摘要

本研究主要是探究市面上魔法牌的設計原理，並且運用不同原理製作 AI 魔法牌。研究的結果發現，市面上的魔法牌是運用二進位的原理設計而成，其他進位方式和運用乘法也都可以設計出魔法牌。進位方式的數列具有規律性，可以歸納出製作的要訣及公式；乘法原理的數列是每張卡牌第一個數的排列組合，它是變數，可以任意替換其他的質數。接著將魔法牌的設計原理與 Excel 做結合，除了自訂公式，並善用 Excel 複製公式的功能，發展出 e 世代 AI 魔法牌，可以快速產出魔法牌的數列。最後將數字替換成其他目標物(如英文字母、地名)，並將數字隱藏，製作出各式各樣的 AI 魔法牌。

壹、前言

一、研究動機

暑假時，我們參加學校的營隊，老師教大家玩魔法牌，只問卡牌有沒有你心中想的數字，就可以猜出答案，這個讀心術也太厲害了吧！當時老師教大家用二進位來製作魔法牌，並且提到卡牌的設計和 4 上數的規律、6 上規律性問題有關，但是我們還想知道更多的奧祕，譬如：其他進位方式也可以製作魔法牌嗎？魔法牌可以用其他運算方法來設計嗎？有辦法設計出更多創意魔法牌，或猜測更大的數嗎？我們想要透過研究，揭開神奇讀心術的祕密，體驗數學的奧祕和樂趣！黃仁勳回國掀起一股 AI 的浪潮，希望我們的研究可以製作出超級厲害的 AI 魔法牌，吸引大家來一探究竟，並因此對數學產生興趣，發現數學其實很有趣！

二、研究目的

- (一) 探討魔法牌的設計原理
- (二) 探討不同進位方式魔法牌的設計原理
- (三) 使用其他運算方法設計 AI 魔法牌
- (四) 結合 Excel 設計 e 世代 AI 魔法牌
- (五) 製作創意 AI 魔法牌

三、文獻回顧

從參考資料得知，市面上的魔法牌是用二進位原理設計，不同進位方式也可以設計出魔法牌。我們的研究，除了再次探討進位方式的設計原理，做更有系統的歸納。另外，**創新部分**包括：

- (一) 優化不同進位方式的設計原理及公式。
- (二) 改變每張卡牌的製作方式。如 $4^0 \times 1$ 、 $4^0 \times 2$ 、 $4^0 \times 3$ 都跟 4^0 有關，所組成的數，只會出現在同一張卡牌，而不是原先的三張卡牌。
- (三) 運用乘法設計 AI 魔法牌。
- (四) 結合 Excel 快速設計 e 世代 AI 魔法牌。
- (五) 替換目標物，隱藏數字，製作創意 AI 魔法牌。
- (六) 在附錄中說明玩法，希望人人成為魔法師，享受玩數學的樂趣。

貳、研究過程與結果

【研究一】探討魔法牌的設計原理

一、仔細觀察六張卡牌的數列，試著找出規律性。

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

二、發現：

- (一) 6張卡牌可猜測 $63=2^n-1$ 個數(1~63)。 n =卡牌張數
- (二) 每張卡牌最後一個數都是 $63=2^n-1$ 。
- (三) 每張卡牌都有 $32=2^{n-1}$ 個數。
- (四) 第一個數 $\times 2$ =下一張卡牌的第一個數。6張卡牌的第一個數依序為
1、2、4、8、16、32 ($2^0\sim 2^5$)，也就是 $2^0\sim 2^{n-1}$ 。
- (五) 卡牌上的數列有如下的規律：
 1. A 卡牌從 1 開始，每次間隔 1 個數。
 2. B 卡牌從 2 開始，有 2 個連續的數，每次間隔 2 個數。
 3. C 卡牌從 4 開始，有 4 個連續的數，每次間隔 4 個數。
 4. D 卡牌從 8 開始，有 8 個連續的數，每次間隔 8 個數。
 5. E 卡牌從 16 開始，有 16 個連續的數，每次間隔 16 個數。
 6. F 卡牌從 32 開始，有 32 個連續的數。

※ 第 m 張卡牌從 2^{m-1} 開始，有 2^{m-1} 個連續的數，每次間隔 2^{m-1} 個數。
- (六) 1~63 出現在表一的 A~F 六張卡牌中，而且剛好是這些卡牌的第一個數加總。

表一 二進位卡牌的數列組合

卡牌	F	E	D	C	B	A	卡牌	F	E	D	C	B	A
第一個 猜測的數	32 2^5	16 2^4	8 2^3	4 2^2	2 2^1	1 2^0	第一個 猜測的數	32 2^5	16 2^4	8 2^3	4 2^2	2 2^1	1 2^0
1						✓	32	✓					
2					✓		33	✓					✓
3					✓	✓	34	✓				✓	
4				✓			35	✓				✓	✓
5				✓		✓	36	✓			✓		
6				✓	✓		37	✓			✓		✓
7				✓	✓	✓	38	✓			✓	✓	
8			✓				39	✓			✓	✓	✓
9			✓			✓	40	✓		✓			
10			✓		✓		41	✓		✓			✓
11			✓		✓	✓	42	✓		✓		✓	
12			✓	✓			43	✓		✓		✓	✓
13			✓	✓		✓	44	✓		✓	✓		
14			✓	✓	✓		45	✓		✓	✓		✓
15			✓	✓	✓	✓	46	✓		✓	✓	✓	
16		✓					47	✓		✓	✓	✓	✓
17		✓				✓	48	✓	✓				
18		✓			✓		49	✓	✓				✓
19		✓			✓	✓	50	✓	✓			✓	
20		✓		✓			51	✓	✓			✓	✓
21		✓		✓		✓	52	✓	✓		✓		
22		✓		✓	✓		53	✓	✓		✓		✓
23		✓		✓	✓	✓	54	✓	✓		✓	✓	
24		✓	✓				55	✓	✓		✓	✓	✓
25		✓	✓			✓	56	✓	✓	✓			
26		✓	✓		✓		57	✓	✓	✓			✓
27		✓	✓		✓	✓	58	✓	✓	✓		✓	
28		✓	✓	✓			59	✓	✓	✓		✓	✓
29		✓	✓	✓		✓	60	✓	✓	✓	✓		
30		✓	✓	✓	✓		61	✓	✓	✓	✓		✓
31		✓	✓	✓	✓	✓	62	✓	✓	✓	✓	✓	
							63	✓	✓	✓	✓	✓	✓

三、將上述的發現整理如表二、表三：

表二 二進位卡牌的設計原理

卡牌張數	可猜測的數量	每張卡牌的數量	每張卡牌的第一個數
1	1 (2 ¹ -1)	1 (2 ¹⁻¹)	1
2	3 (2 ² -1)	2 (2 ²⁻¹)	1、2
3	7 (2 ³ -1)	4 (2 ³⁻¹)	1、2、4
4	15 (2 ⁴ -1)	8 (2 ⁴⁻¹)	1、2、4、8
5	31 (2 ⁵ -1)	16 (2 ⁵⁻¹)	1、2、4、8、16
6	63 (2 ⁶ -1)	32 (2 ⁶⁻¹)	1、2、4、8、16、32
以此類推			
n	2 ⁿ -1	2 ⁿ⁻¹	2 ⁰ 、2 ¹ 、2 ² 、……、2 ⁿ⁻¹

表三 二進位卡牌的數列規律

牌序	第一個數	連續數列的個數	間隔數	每張卡牌的數列 (直到出現 2 ⁿ⁻¹ 個數)
1	1 (2 ¹⁻¹)	1	1	①、③、5、7、9、11、13…… (1+2 ¹ =3)
2	2 (2 ²⁻¹)	2	2	②、③、⑥、7、10、11…… (2+2 ² =6)
3	4 (2 ³⁻¹)	4	4	④~7、⑫~15、20~23…… (4+2 ³ =12)
4	8 (2 ⁴⁻¹)	8	8	⑧~15、⑲~31、40~47…… (8+2 ⁴ =24)
5	16 (2 ⁵⁻¹)	16	16	⑰~31、⑳~63、80~95…… (16+2 ⁵ =48)
6	32 (2 ⁶⁻¹)	32	32	⑳~63、㉑~127…… (32+2 ⁶ =96)
以此類推 (前一個連續數列+2 ^m =下一個連續數列)				
第 m 張	2 ^{m-1}	2 ^{m-1}	2 ^{m-1}	2 ^{m-1} ×1~2 ^{m-1} ×2-1、2 ^{m-1} ×3~2 ^{m-1} ×4-1……

◎根據表二、表三的公式，可以快速設計出任何張數的二進位卡牌，以八張卡牌為例：

八張卡牌共可猜測 2ⁿ-1=2⁸-1=255 個數； 每張卡牌有 2ⁿ⁻¹=2⁸⁻¹=128 個數。

八張卡牌的數列如下：

A	1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21……251、253、255
B	<u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>14</u> 、 <u>15</u> 、 <u>18</u> 、 <u>19</u> …… <u>250</u> 、 <u>251</u> 、 <u>254</u> 、 <u>255</u>
C	<u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>12</u> 、 <u>13</u> 、 <u>14</u> 、 <u>15</u> 、 <u>20</u> 、 <u>21</u> 、 <u>22</u> 、 <u>23</u> …… <u>247</u> 、 <u>252</u> 、 <u>253</u> 、 <u>254</u> 、 <u>255</u>
D	8~15、24~31、40~47、56~63、72~79……232~239、248~255
E	16~31、48~63、80~95、112~127、144~159、176~191、208~223、240~255
F	32~63、96~127、160~191、224~255
G	64~127、192~255
H	128~255

【研究二】探討不同進位方式魔法牌的設計原理

由研究一得知，所有的數都是 $2^0 \sim 2^{n-1}$ 組合而成，心想 $3^0 \sim 3^{n-1}$ 、 $4^0 \sim 4^{n-1}$ 、……是否也能組合成所有的數 (n =卡牌的張數)。 3^0 、 3^1 、 3^2 ……是三進位，逢三進一，所以每張卡牌會有兩組數列，四進位會有三組數列，以此類推。

一、「三進位」卡牌的設計原理

表四 三進位卡牌的數列組合(每張卡牌有兩組數列)

卡牌	C		B		A	
第一個 猜測 的數	18 $3^2 \times 2$	9 $3^2 \times 1$	6 $3^1 \times 2$	3 $3^1 \times 1$	2 $3^0 \times 2$	1 $3^0 \times 1$
1						✓
2					✓	
3				✓		
4				✓		✓
5				✓	✓	
6			✓			
7			✓			✓
8			✓		✓	
9		✓				
10		✓				✓
11		✓			✓	
12		✓		✓		
13		✓		✓		✓
14		✓		✓	✓	
15		✓	✓			
16		✓	✓			✓
17		✓	✓		✓	
18	✓					
19	✓					✓
20	✓				✓	
21	✓			✓		
22	✓			✓		✓
23	✓			✓	✓	
24	✓		✓			
25	✓		✓			✓
26	✓		✓		✓	

◎三張卡牌的數列如下：

A								
1	4	7	10	13	16	19	22	25
2	5	8	11	14	17	20	23	26

B								
3	4	5	12	13	14	21	22	23
6	7	8	15	16	17	24	25	26

C								
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26

◎根據表四的發現整理如表五、表六

表五 三進位卡牌的設計原理(每張卡牌有兩組數列)

卡牌張數	可猜測的數量	每組數列的個數	每組數列的第一個數
1	$2 (3^1-1)$	$1 (3^{1-1})$	1 & 2
2	$8 (3^2-1)$	$3 (3^{2-1})$	1 & 2、3 & 6
3	$26 (3^3-1)$	$9 (3^{3-1})$	1 & 2、3 & 6、9 & 18
以此類推			
n	3^n-1	3^{n-1}	$3^0 \times 1$ & $3^0 \times 2$ 、 $3^1 \times 1$ & $3^1 \times 2$ 、……、 $3^{n-1} \times 1$ & $3^{n-1} \times 2$

表六 三進位卡牌的數列規律(每張卡牌有兩組數列)

牌序	組別	第一個數	連續數列的個數	間隔數	每組的數列 (直到出現 3^{n-1} 個數)
1	1	$1 (3^0 \times 1)$	$1 (3^{1-1})$	2	<u>1</u> 、 <u>4</u> 、7、10、13、16…… $(1+3^1=4)$
	2	$2 (3^0 \times 2)$			<u>2</u> 、 <u>5</u> 、8、11、14、17…… $(2+3^1=5)$
2	1	$3 (3^1 \times 1)$	$3 (3^{2-1})$	6	<u>3</u> 、4、 <u>5</u> 、 <u>12</u> 、13、 <u>14</u> …… $(3+3^2=12)$
	2	$6 (3^1 \times 2)$			<u>6</u> 、7、 <u>8</u> 、 <u>15</u> 、16、 <u>17</u> …… $(6+3^2=15)$
3	1	$9 (3^2 \times 1)$	$9 (3^{3-1})$	18	<u>9</u> ~17、 <u>36</u> ~44…… $(9+3^3=36)$
	2	$18 (3^2 \times 2)$			<u>18</u> ~26、 <u>45</u> ~53…… $(18+3^3=45)$
以此類推					(前一個連續數列+3^m=下一個連續數列)
第 m 張	1	$3^{m-1} \times 1$	3^{m-1}	$3^{m-1} \times 2$	$3^{m-1} \times 1$ ~ $3^{m-1} \times 2 - 1$ 、 $3^{m-1} \times 4$ ~ $3^{m-1} \times 5 - 1$ …
	2	$3^{m-1} \times 2$			$3^{m-1} \times 2$ ~ $3^{m-1} \times 3 - 1$ 、 $3^{m-1} \times 5$ ~ $3^{m-1} \times 6 - 1$ …

◎根據表五、表六的公式，可以快速設計出任何張數的三進位卡牌，以四張卡牌為例：

每張卡牌有 2 組數列；四張卡牌共可猜測 $3^4-1=80$ 個數；

每組數列有 $3^{n-1}=3^{4-1}=27$ 個數。

四張卡牌的數列如下：

A	1、4、7、10、13、16、19、22、25……61、64、67、70、73、76、79
	2、5、8、11、14、17、20、23、26……62、65、68、71、74、77、80
B	<u>3</u> 、4、 <u>5</u> 、 <u>12</u> 、13、 <u>14</u> 、 <u>21</u> 、22、 <u>23</u> ……59、 <u>66</u> 、67、 <u>68</u> 、 <u>75</u> 、76、 <u>77</u>
	<u>6</u> 、7、 <u>8</u> 、 <u>15</u> 、16、 <u>17</u> 、 <u>24</u> 、25、 <u>26</u> ……62、 <u>69</u> 、70、 <u>71</u> 、 <u>78</u> 、79、 <u>80</u>
C	9~17、36~44、63~71
	18~26、45~53、72~80
D	27~53
	54~80

二、「四進位」卡牌的設計原理

表七 四進位卡牌的數列組合(每張卡牌有三組數列)

卡牌	C			B			A			卡牌	C			B			A		
第一個 猜測的數	48 $4^2 \times 3$	32 $4^2 \times 2$	16 $4^2 \times 1$	12 $4^1 \times 3$	8 $4^1 \times 2$	4 $4^1 \times 1$	3 $4^0 \times 3$	2 $4^0 \times 2$	1 $4^0 \times 1$	第一個 猜測的數	48 $4^2 \times 3$	32 $4^2 \times 2$	16 $4^2 \times 1$	12 $4^1 \times 3$	8 $4^1 \times 2$	4 $4^1 \times 1$	3 $4^0 \times 3$	2 $4^0 \times 2$	1 $4^0 \times 1$
1									✓	32		✓							
2								✓		33		✓							✓
3							✓			34		✓						✓	
4						✓				35		✓					✓		
5						✓			✓	36		✓			✓				
6						✓		✓		37		✓			✓				✓
7						✓	✓			38		✓			✓		✓		
8					✓					39		✓			✓	✓			
9					✓				✓	40		✓		✓					
10					✓			✓		41		✓		✓					✓
11					✓		✓			42		✓		✓			✓		
12				✓						43		✓		✓			✓		
13				✓					✓	44		✓		✓					
14				✓				✓		45		✓		✓					✓
15				✓			✓			46		✓		✓				✓	
16		✓								47		✓		✓			✓		
17		✓							✓	48	✓								
18		✓						✓		49	✓								✓
19		✓					✓			50	✓						✓		
20		✓			✓					51	✓					✓			
21		✓			✓				✓	52	✓				✓				
22		✓			✓			✓		53	✓				✓				✓
23		✓			✓	✓				54	✓				✓		✓		
24		✓		✓						55	✓				✓	✓			
25		✓		✓					✓	56	✓			✓					
26		✓		✓				✓		57	✓			✓					✓
27		✓		✓			✓			58	✓			✓			✓		
28		✓	✓							59	✓			✓			✓		
29		✓	✓						✓	60	✓		✓						
30		✓	✓					✓		61	✓		✓						✓
31		✓	✓				✓			62	✓		✓					✓	
										63	✓		✓				✓		

◎三張卡牌的數列如下：

A																
1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	
3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	
B																
4	5	6	7	20	21	22	23	36	37	38	39	52	53	54	55	
8	9	10	11	24	25	26	27	40	41	42	43	56	57	58	59	
12	13	14	15	28	29	30	31	44	45	46	47	60	61	62	63	
C																
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	

◎根據表七的發現整理如表八、表九

表八 四進位卡牌的設計原理(每張卡牌有三組數列)

卡牌張數	可猜測的數量	每組數列的個數	每組數列的第一個數
1	$3 (4^1-1)$	$1 (4^{1-1})$	1 & 2 & 3
2	$15 (4^2-1)$	$4 (4^{2-1})$	1 & 2 & 3、4 & 8 & 12
3	$63 (4^3-1)$	$16 (4^{3-1})$	1 & 2 & 3、4 & 8 & 12、16 & 32 & 48
以此類推			
n	4^n-1	4^{n-1}	$4^0 \times 1$ & $4^0 \times 2$ & $4^0 \times 3$ 、 $4^1 \times 1$ & $4^1 \times 2$ & $4^1 \times 3$ 、……、 $4^{n-1} \times 1$ & $4^{n-1} \times 2$ & $4^{n-1} \times 3$

表九 四進位卡牌的數列規律(每張卡牌有三組數列)

牌序	組別	第一個數	連續數列的個數	間隔數	每組的數列 (直到出現 4^{n-1} 個數)
1	1	$1 (4^0 \times 1)$	$1 (4^{1-1})$	3	①、⑤、9、13、17、21…… $(1+4^1=5)$
	2	$2 (4^0 \times 2)$			②、⑥、10、14、18、22…… $(2+4^1=6)$
	3	$3 (4^0 \times 3)$			③、⑦、11、15、19、23…… $(3+4^1=7)$
2	1	$4 (4^1 \times 1)$	$4 (4^{2-1})$	12	④~7、⑳~23、36~39…… $(4+4^2=20)$
	2	$8 (4^1 \times 2)$			⑧~11、㉑~24、40~43…… $(8+4^2=24)$
	3	$12 (4^1 \times 3)$			⑫~15、㉒~25、44~47…… $(12+4^2=28)$
3	1	$16 (4^2 \times 1)$	$16 (4^{3-1})$	48	⑯~31、㉓~47…… $(16+4^3=80)$
	2	$32 (4^2 \times 2)$			⑳~35、㉔~49…… $(32+4^3=96)$
	3	$48 (4^2 \times 3)$			㉕~42、㉕~127…… $(48+4^3=112)$
以此類推 (前一個連續數列+ 4^n =下一個連續數列)					
第 m 張	1	$4^{m-1} \times 1$	4^{m-1}	$4^{m-1} \times 3$	$4^{m-1} \times 1 \sim 4^{m-1} \times 2 - 1$ 、 $4^{m-1} \times 5 \sim 4^{m-1} \times 6 - 1 \dots$
	2	$4^{m-1} \times 2$			$4^{m-1} \times 2 \sim 4^{m-1} \times 3 - 1$ 、 $4^{m-1} \times 6 \sim 4^{m-1} \times 7 - 1 \dots$
	3	$4^{m-1} \times 3$			$4^{m-1} \times 3 \sim 4^{m-1} \times 4 - 1$ 、 $4^{m-1} \times 7 \sim 4^{m-1} \times 8 - 1 \dots$

◎根據表八、表九的公式，可以快速設計出任何張數的四進位卡牌，以四張卡牌為例：

每張卡牌有 3 組數列；四張卡牌共可猜測 $4^n-1=4^4-1=255$ 個數；

每組數列有 $4^{n-1}=4^3=64$ 個數。四張卡牌的數列如下：

A	1、5、9、13、17、21……245、249、253
	2、6、10、14、18、22……246、250、254
	3、7、11、15、19、23……247、251、255
B	4~7、20~23、36~39、52~55……228~231、244~247
	8~11、24~27、40~43、56~59……232~235、248~251
	12~15、28~31、44~47、60~63……236~239、252~255
C	16~31、80~95、144~159、208~223
	32~47、96~111、160~175、224~239
	48~63、112~127、176~191、240~255
D	64~127
	128~191
	192~255

三、不同進位方式卡牌的設計原理

◎根據表二、五、八的發現整理如表十

表十 不同進位方式卡牌的設計原理(每張卡牌有 R-1 組數列)

進位方式	可猜測的數量	每組數列的個數	每組數列的第一個數
2	2^n-1	2^{n-1}	$2^0、2^1、2^2、2^3、\dots、2^{n-2}、2^{n-1}$
3	3^n-1	3^{n-1}	$3^0 \times 1 \& 3^0 \times 2、3^1 \times 1 \& 3^1 \times 2、\dots、3^{n-1} \times 1 \& 3^{n-1} \times 2$
4	4^n-1	4^{n-1}	$4^0 \times 1 \& 4^0 \times 2 \& 4^0 \times 3、4^1 \times 1 \& 4^1 \times 2 \& 4^1 \times 3、\dots、4^{n-1} \times 1 \& 4^{n-1} \times 2 \& 4^{n-1} \times 3$
以此類推			
R	R^n-1	R^{n-1}	$R^0 \times 1 \& R^0 \times 2 \& \dots \& R^0 \times (R-1)、R^1 \times 1 \& R^1 \times 2 \& \dots \& R^1 \times (R-1)、\dots、R^{n-1} \times 1 \& R^{n-1} \times 2 \& \dots \& R^{n-1} \times (R-1)$

※ R=進位方式；n=卡牌張數

◎根據表三、六、九的發現整理如表十一

表十一 不同進位方式每張卡牌各組的數列規律(每張卡牌有 R-1 組數列)

進位方式	組別	第一個數	連續數列的個數	間隔數	每組的數列 (直到出現 R^{m-1} 個數)
2	1	2^{m-1}	2^{m-1}	2^{m-1}	$2^{m-1} \times 1 \sim 2^{m-1} \times 2-1、2^{m-1} \times 3 \sim 2^{m-1} \times 4-1、2^{m-1} \times 5 \sim 2^{m-1} \times 6-1 \dots$
3	1	$3^{m-1} \times 1$	3^{m-1}	$3^{m-1} \times 2$	$3^{m-1} \times 1 \sim 3^{m-1} \times 2-1、3^{m-1} \times 4 \sim 3^{m-1} \times 5-1、3^{m-1} \times 7 \sim 3^{m-1} \times 8-1 \dots$
	2	$3^{m-1} \times 2$			$3^{m-1} \times 2 \sim 3^{m-1} \times 3-1、3^{m-1} \times 5 \sim 3^{m-1} \times 6-1、3^{m-1} \times 8 \sim 3^{m-1} \times 9-1 \dots$
4	1	$4^{m-1} \times 1$	4^{m-1}	$4^{m-1} \times 3$	$4^{m-1} \times 1 \sim 4^{m-1} \times 2-1、4^{m-1} \times 5 \sim 4^{m-1} \times 6-1、4^{m-1} \times 9 \sim 4^{m-1} \times 10-1 \dots$
	2	$4^{m-1} \times 2$			$4^{m-1} \times 2 \sim 4^{m-1} \times 3-1、4^{m-1} \times 6 \sim 4^{m-1} \times 7-1、4^{m-1} \times 10 \sim 4^{m-1} \times 11-1 \dots$
	3	$4^{m-1} \times 3$			$4^{m-1} \times 3 \sim 4^{m-1} \times 4-1、4^{m-1} \times 7 \sim 4^{m-1} \times 8-1、4^{m-1} \times 11 \sim 4^{m-1} \times 12-1 \dots$
以此類推 (前一個連續數列+ R^m =下一個連續數列)					
R	1	$R^{m-1} \times 1$	R^{m-1}	$R^{m-1} \times (R-1)$	$R^{m-1} \times 1 \sim R^{m-1} \times 2-1、R^{m-1} \times (R+1) \sim R^{m-1} \times (R+2)-1、R^{m-1} \times (2R+1) \sim R^{m-1} \times (2R+2)-1 \dots$
	2	$R^{m-1} \times 2$			$R^{m-1} \times 2 \sim R^{m-1} \times 3-1、R^{m-1} \times (R+2) \sim R^{m-1} \times (R+3)-1、R^{m-1} \times (2R+2) \sim R^{m-1} \times (2R+3)-1 \dots$
	3	$R^{m-1} \times 3$			$R^{m-1} \times 3 \sim R^{m-1} \times 4-1、R^{m-1} \times (R+3) \sim R^{m-1} \times (R+4)-1、R^{m-1} \times (2R+3) \sim R^{m-1} \times (2R+4)-1 \dots$

	R-1	$R^{m-1} \times (R-1)$			$R^{m-1} \times (R-1) \sim R^{m-1} \times R-1、R^{m-1} \times (2R-1) \sim R^{m-1} \times 2R-1、R^{m-1} \times (3R-1) \sim R^{m-1} \times 3R-1、R^{m-1} \times (4R-1) \sim R^{m-1} \times 4R-1 \dots$

※ R=進位方式；n=卡牌張數；m=第幾張卡牌

◎根據表十、表十一的公式，可以快速設計出任何張數的不同進位方式卡牌，以五進位三張卡牌為例：每張卡牌有 4 組數列；三張卡牌共可猜測 $5^n-1=5^3-1=124$ 個數；每組數列有 $5^{n-1}=5^{3-1}=25$ 個數。三張卡牌的數列如下：

A	1、6、11、16、21、26、.....、101、106、111、116、121
	2、7、12、17、22、27、.....、102、107、112、117、122
	3、8、13、18、23、28、.....、103、108、113、118、123
	4、9、14、19、24、29、.....、104、109、114、119、124
B	5~9、30~34、55~59、80~84、105~109
	10~14、35~39、60~64、85~89、110~114
	15~19、40~44、65~69、90~94、115~119
	20~24、45~49、70~74、95~99、120~124
C	25~49
	50~74
	75~99
	100~124

【研究三】使用其他運算方法設計 AI 魔法牌

研究一、研究二採取進位方式設計魔法牌，是運用加法的原理，心想乘法是累加的速算法，是不是也可以運用乘法來設計魔法牌。

一、採二進位設計卡牌的原理，每張卡牌只有一組數列。

(一) 用兩張卡牌設計，第一個數分別為 a、b。以 a=2、b=3 為例：

A	a	ab	2	6
B	b	ab	3	6

※可猜測的數有：2、3、6，共 3 個。每張卡牌有 2 個數。

(二) 用三張卡牌設計，第一個數分別為 a、b、c。以 a=2、b=3、c=4 為例：

2 個數相乘的有 ab、ac、bc；3 個數相乘的有 abc。三張卡牌如下：

A	a	ab	ac	abc	2	6	8	24
B	b	ab	bc	abc	3	6	12	24
C	c	ac	bc	abc	4	8	12	24

※可猜測的數有：2、3、4、6、8、12、24，共 7 個。每張卡牌有 4 個數。

(三) 用四張卡牌設計，第一個數分別為 a、b、c、d。以 a=2、b=3、c=4、d=5 為例：

2 個數相乘的有 ab、ac、ad、bc、bd、cd；3 個數相乘的有 abc、abd、acd、bcd；

4 個數相乘的有 abcd。四張卡牌如下：

A	a	ab	ac	ad	abc	abd	acd	abcd	2	6	8	10	24	30	40	120
B	b	ab	bc	bd	abc	abd	bcd	abcd	3	6	12	15	24	30	60	120
C	c	ac	bc	cd	abc	acd	bcd	abcd	4	8	12	20	24	40	60	120
D	d	ad	bd	cd	abd	acd	bcd	abcd	5	10	15	20	30	40	60	120

※可猜測的數有：2、3、4、5、6、8、10、12、15、20、24、30、40、60、120，共 15 個。

每張卡牌有 8 個數。

(四) 用五張卡牌設計，第一個數分別為 a、b、c、d、e。並以 a=2、b=3、c=4、d=5、

e=7 為例，五張卡牌的數列如表十二：

表十二 第一代 AI 魔法牌—運用乘法設計每張卡牌只有 1 組數列

牌序	1 個數	2 個數相乘				3 個數相乘						4 個數相乘				全部相乘
A	a	ab	ac	ad	ae	abc	abd	abe	acd	ace	ade	abcd	abce	abde	acde	abcde
B	b	ab	bc	bd	be	abc	abd	abe	bcd	bce	bde	abcd	abce	abde	bcde	abcde
C	c	ac	bc	cd	ce	abc	acd	ace	bcd	bce	cde	abcd	abce	acde	bcde	abcde
D	d	ad	bd	cd	de	abd	acd	ade	bcd	bde	cde	abcd	abde	acde	bcde	abcde
E	e	ae	be	ce	de	abe	ace	ade	bce	bde	cde	abce	abde	acde	bcde	abcde
可以猜測的數	a abd	b abe	c acd	d ace	e ade	ab bcd	ac bce	ad bde	ae cde	bc abcd	bd abce	be abde	cd acde	ce bcde	de abcde	abc
A	2	6	8	10	14	24	30	42	40	56	70	120	168	210	280	840
B	3	6	12	15	21	24	30	42	60	84	105	120	168	210	420	840
C	4	8	12	20	28	24	40	56	60	84	140	120	168	280	420	840
D	5	10	15	20	35	30	40	70	60	105	140	120	210	280	420	840
E	7	14	21	28	35	42	56	70	84	105	140	168	210	280	420	840
可以猜測的數	2 35	3 40	4 42	5 56	6 60	7 70	8 84	10 105	12 120	14 140	15 168	20 210	21 280	24 420	28 840	30

※可猜測的數共 31 個。每張卡牌有 16 個數。

※將上述卡牌的設計情形整理如表十三：

表十三 第一代 AI 魔法牌的設計原理

卡牌張數	可猜測的數量	每張卡牌的數量	每張卡牌的第一個數
2	$3(2^2-1)$	$2(2^{2-1})$	2、3
3	$7(2^3-1)$	$4(2^{3-1})$	2、3、4
4	$15(2^4-1)$	$8(2^{4-1})$	2、3、4、5
5	$31(2^5-1)$	$16(2^{5-1})$	2、3、4、5、7
以此類推			
n	2^n-1	2^{n-1}	a、b、c、d...共有 n 個

(五) 發現：

1. 第一代 AI 魔法牌，可猜測 2^n-1 個數，每張卡牌有 2^{n-1} 個數，和運用二進位設計的卡牌完全一樣。
2. 可猜測的最大數是每張卡牌第一個數的乘積，而可猜測的數正好是它的所有因數（除了 1 以外）。
3. 運用乘法原理設計的卡牌，可以猜測的範圍，不再是從 1 開始的連續數列，每張卡牌的第一個數不同，就會產生不同的組合，可以用來猜測很大的數。

二、採三進位設計卡牌的原理，每張卡牌有兩組數列。

(一) 用兩張卡牌設計，第一個數分別為 a 及 a^2 、 b 及 b^2 。以 $a=2$ 、 $b=3$ 為例：

A	a	ab	ab^2	2	6	18
	a^2	a^2b	a^2b^2	4	12	36
B	b	ab	a^2b	3	6	12
	b^2	ab^2	a^2b^2	9	18	36

※可猜測的數有：2、3、4、6、9、12、18、36，共 8 個。每組數列有 3 個數。

(二) 用三張卡牌設計，第一個數分別為 a 及 a^2 、 b 及 b^2 、 c 及 c^2 。以 $a=2$ 、 $b=3$ 、 $c=5$ 為例：

表十四 第二代 AI 魔法牌—運用乘法設計每張卡牌有 2 組數列

牌序	1 個數	2 個數相乘				3 個數相乘			
A	a	ab	ab^2	ac	ac^2	abc	abc^2	ab^2c	ab^2c^2
	a^2	a^2b	a^2b^2	a^2c	a^2c^2	a^2bc	a^2bc^2	a^2b^2c	$a^2b^2c^2$
B	b	ab	a^2b	bc	bc^2	abc	abc^2	a^2bc	a^2bc^2
	b^2	ab^2	a^2b^2	b^2c	b^2c^2	ab^2c	ab^2c^2	a^2b^2c	$a^2b^2c^2$
C	c	ac	a^2c	bc	b^2c	abc	ab^2c	a^2bc	a^2b^2c
	c^2	ac^2	a^2c^2	bc^2	b^2c^2	abc^2	ab^2c^2	a^2bc^2	$a^2b^2c^2$
可以猜測的數	a	a^2	b	b^2	c	c^2	ab	ab^2	ac
	ac^2	a^2b	a^2b^2	a^2c	a^2c^2	bc	bc^2	b^2c	b^2c^2
	abc	abc^2	ab^2c	ab^2c^2	a^2bc	a^2bc^2	a^2b^2c	$a^2b^2c^2$	
A	2	6	18	10	50	30	150	90	450
	4	12	36	20	100	60	300	180	900
B	3	6	12	15	75	30	150	60	300
	9	18	36	45	225	90	450	180	900
C	5	10	20	15	45	30	90	60	180
	25	50	100	75	225	150	450	300	900
可以猜測的數	2	3	4	5	6	9	10	12	15
	18	20	25	30	36	45	50	60	75
	90	100	150	180	225	300	450	900	

※可猜測的數共 26 個。每組數列有 9 個數。

三、採四進位設計卡牌的原理，每張卡牌有三組數列。

(一) 用兩張卡牌設計，第一個數分別為 a & a^2 & a^3 、 b & b^2 & b^3 。以 $a=2$ 、 $b=3$ 為例：

A	a	ab	ab^2	ab^3	2	6	18	54
	a^2	a^2b	a^2b^2	a^2b^3	4	12	36	108
	a^3	a^3b	a^3b^2	a^3b^3	8	24	72	216
B	b	ab	a^2b	a^3b	3	6	12	24
	b^2	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	9	18	36	72
	b^3	ab^3	a^2b^3	a^3b^3	27	54	108	216

※可猜測的數有：2、3、4、6、8、9、12、18、24、27、36、54、72、108、216，共 15 個，每組數列有 4 個數。

(二) 用三張卡牌設計，第一個數分別為 a & a^2 & a^3 、 b & b^2 & b^3 、 c & c^2 & c^3 。並以 $a=2$ 、 $b=3$ 、 $c=5$ 為例，三張卡牌的數列如表十五：

表十五 第三代 AI 魔法牌—運用乘法設計每張卡牌有 3 組數列

牌序	1 個數	2 個數相乘						3 個數相乘									
A	a	ab	ab^2	ab^3	ac	ac^2	ac^3	abc	abc^2	abc^3	ab^2c	ab^2c^2	ab^2c^3	ab^3c	ab^3c^2	ab^3c^3	
	a^2	a^2b	a^2b^2	a^2b^3	a^2c	a^2c^2	a^2c^3	a^2bc	a^2bc^2	a^2bc^3	a^2b^2c	$a^2b^2c^2$	$a^2b^2c^3$	a^2b^3c	$a^2b^3c^2$	$a^2b^3c^3$	
	a^3	a^3b	a^3b^2	a^3b^3	a^3c	a^3c^2	a^3c^3	a^3bc	a^3bc^2	a^3bc^3	a^3b^2c	$a^3b^2c^2$	$a^3b^2c^3$	a^3b^3c	$a^3b^3c^2$	$a^3b^3c^3$	
B	b	ab	a^2b	a^3b	bc	bc^2	bc^3	abc	abc^2	abc^3	a^2bc	a^2bc^2	a^2bc^3	a^3bc	a^3bc^2	a^3bc^3	
	b^2	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	b^2c	b^2c^2	b^2c^3	ab^2c	ab^2c^2	ab^2c^3	a^2b^2c	$a^2b^2c^2$	$a^2b^2c^3$	a^3b^2c	$a^3b^2c^2$	$a^3b^2c^3$	
	b^3	ab^3	a^2b^3	a^3b^3	b^3c	b^3c^2	b^3c^3	ab^3c	ab^3c^2	ab^3c^3	a^2b^3c	$a^2b^3c^2$	$a^2b^3c^3$	a^3b^3c	$a^3b^3c^2$	$a^3b^3c^3$	
C	c	ac	a^2c	a^3c	bc	b^2c	b^3c	abc	ab^2c	ab^3c	a^2bc	a^2b^2c	a^2b^3c	a^3bc	a^3b^2c	a^3b^3c	
	c^2	ac^2	a^2c^2	a^3c^2	bc^2	b^2c^2	b^3c^2	abc^2	ab^2c^2	ab^3c^2	a^2bc^2	$a^2b^2c^2$	$a^2b^3c^2$	a^3bc^2	$a^3b^2c^2$	$a^3b^3c^2$	
	c^3	ac^3	a^2c^3	a^3c^3	bc^3	b^2c^3	b^3c^3	abc^3	ab^2c^3	ab^3c^3	a^2bc^3	$a^2b^2c^3$	$a^2b^3c^3$	a^3bc^3	$a^3b^2c^3$	$a^3b^3c^3$	
可以猜測的數	a	a^2	a^3	b	b^2	b^3	c	c^2	c^3	ab	ab^2	ab^3	ac	ac^2	ac^3	a^2b	
	a^2b	a^2b^2	a^2b^3	a^2c	a^2c^2	a^2c^3	a^3b	a^3b^2	a^3b^3	a^3c	a^3c^2	a^3c^3	bc	bc^2	bc^3	b^2c	b^2c^2
	b^2c^3	b^3c	b^3c^2	b^3c^3	abc	abc^2	abc^3	ab^2c	ab^2c^2	ab^2c^3	ab^3c	ab^3c^2	ab^3c^3	a^2bc	a^2bc^2	a^2bc^3	
	a^2b^2c	$a^2b^2c^2$	$a^2b^2c^3$	a^2b^3c	$a^2b^3c^2$	$a^2b^3c^3$	a^3bc	a^3bc^2	a^3bc^3	a^3b^2c	$a^3b^2c^2$	$a^3b^2c^3$	a^3b^3c	$a^3b^3c^2$	$a^3b^3c^3$		
A	2	6	18	54	10	50	250	30	150	750	90	450	2250	270	1350	6750	
	4	12	36	108	20	100	500	60	300	1500	180	900	4500	540	2700	13500	
	8	24	72	216	40	200	1000	120	600	3000	360	1800	9000	1080	5400	27000	
B	3	6	12	24	15	75	375	30	150	750	60	300	1500	120	600	3000	
	9	18	36	72	45	225	1125	90	450	2250	180	900	4500	360	1800	9000	
	27	54	108	216	135	675	3375	270	1350	6750	540	2700	13500	1080	5400	27000	
C	5	10	20	40	15	45	135	30	90	270	60	180	540	120	360	1080	
	25	50	100	200	75	225	675	150	450	1350	300	900	2700	600	1800	5400	
	125	250	500	1000	375	1125	3375	750	2250	6750	1500	4500	13500	3000	9000	27000	
可以猜測的數	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18	20	24	25	27	30	
	36	40	45	50	54	60	72	75	90	100	108	120	125	135	150	180	
	200	216	225	250	270	300	360	375	450	500	540	600	675	750	900	1000	
	1080	1125	1350	1500	1800	2250	2700	3000	3375	4500	5400	6750	9000	13500	27000		

※可猜測的數共 63 個。每組數列有 16 個數。

◎根據表十三~十五的發現整理如表十六：

表十六 運用乘法設計卡牌，每張卡牌的組數不同，所產生的變化

每張卡牌的組數	可猜測的數量	每組數列的個數	每組數列的第一個數 (a、b、c...為質數，數量=n)
1	2^n-1	2^{n-1}	a、b、c...。a、b、c...不等於任兩個數相乘
2	3^n-1	3^{n-1}	a&a ² 、b&b ² 、c&c ²。
3	4^n-1	4^{n-1}	a&a ² &a ³ 、b&b ² &b ³ 、c&c ² &c ³。
以此類推			
k	$(k+1)^n-1$	$(k+1)^{n-1}$	a&a ² ...&a ^k 、b&b ² ...&b ^k 、c&c ² ...&c ^k
可猜測的數為 a ^k x b ^k x c ^k x d ^k x... (第 n 個質數) ^k 的所有因數(除了 1 以外)			

※ k=每張卡牌的組數；n=卡牌張數

【研究四】結合 Excel 設計 e 世代 AI 魔法牌 (詳見 AI 魔法牌 Excel 檔或附錄一)

魔法牌的數列是每組數列第一個數的組合，一不小心就會組合錯誤或計算錯誤，導致魔法失效。於是我們結合 Excel，運用自訂公式和複製公式的功能，擬訂製作步驟，快速產出每組的數列。

一、用進位方式設計 AI 魔法牌

※R=進位方式；n=卡牌張數；m=第幾張卡牌

根據研究二發現的數列規律，可將進位方式的卡牌製作方法歸納為下列四個步驟：

(一) 確定每張卡牌各組數列的第一個數

1. 輸入第一張卡牌各組數列的第一個數依序為 1、2、3……(R-1)。
2. 設定第二張卡牌第一組數列第一個數的公式= $1 \times R$ ，接著複製公式，往下拉，直到出現最後一張卡牌最後一組數列的第一個數 $R^{m-1} \times (R-1)$

(二) 製作第一張卡牌的數列

只有一個連續數，所以公式設定為+R，接著複製公式，往右拉，直到出現 R^{n-1} 個數，再往下拉，直到出現各組數列。其他各張卡牌製作方式一樣，只是公式不同。

(三) 製作中間各張卡牌的數列

1. 連續數列的公式設定為+1
2. 第二個連續數列的公式設定為+ R^m

(四) 製作最後一張卡牌的數列

是連續數列，所以公式設定為+1

※以“四進位三張牌”為例：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	
1																						
2		4	進位	3	張牌	猜測數量	63	個	每組數列有	16	個數											
3	A	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61					1.A 卡牌輸入 1、2、3
4		2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62					2.設定公式
5		3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63					B5=B2*4
6	B	4	5	6	7	20	21	22	23	36	37	38	39	52	53	54	55					C2=B2+4
7		8	9	10	11	24	25	26	27	40	41	42	43	56	57	58	59					C5=B5+1
8		12	13	14	15	28	29	30	31	44	45	46	47	60	61	62	63					F5=B5+16
9	C	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31					C8=B8+1
10		32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47					3.其餘皆用複製公式完成
		48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63					

1. 確定每張卡牌各組數列的第一個數。在 A 卡牌依序輸入 1、2、3。接著設定 $B5=B2 \times 4$ ，然後複製 B5 的公式往下拉，直到出現 $R^{m-1} \times (R-1) = 4^{3-1} \times (4-1) = 16 \times 3 = 48$ 。
2. A 卡牌的數列，公式設定為+4， $C2=B2+4$ 。接著複製 C2 的公式，往右拉，直到出現 $R^{n-1} = 4^{3-1} = 16$ 個數，然後整個數列(第一個數除外)往下拉，直到出現各組數列。
3. B 卡牌的數列，公式設定三次+1，亦即 $C5=B5+1$ ，複製 C5 公式，往右拉至 E5。接著設定 $F5=B5+16(R^m=4^3)$ ，然後複製 F5 公式，往右、往下拉出各組數列。

4. C 卡牌是最後一張，為連續數列，公式設定為+1，C8=B8+1，接著複製公式，往右、往下拉出各組數列。

二、用乘法設計 AI 魔法牌

(一) 將表十二、十四、十五的第一張卡牌用 Excel 製作，步驟如下：

1. 先輸入變數 a、b、c……。
2. 將組合的第一個數自訂乘法公式 $A3*B3*C3$ ……，接著複製公式往下拉，立即產出第一張卡牌的第一組數列。
3. 設定第二組數列第一個數的公式為第一組數列第一個數的 a 倍，然後複製公式往下拉，立即產出第一張卡牌的第二組數列。再將整個數列往右拉，產出各組數列。

(二) 其餘各張卡牌仿照第一張的方式設計，共設計三代 AI 魔法牌。

第一代 AI 魔法牌

每張卡牌只有一組數列，五張卡牌
可以猜測 31 個數，每張卡牌有 16 個數

	A	B	C	D	E	F
1	第一代AI魔法牌					
2	a	b	c	d	e	A 卡牌
3	2	1	1	1	1	2
4	2	3	1	1	1	6
5	2	1	4	1	1	8
6	2	1	1	5	1	10
7	2	1	1	1	7	14
8	2	3	4	1	1	24
9	2	3	1	5	1	30
10	2	3	1	1	7	42
11	2	1	4	5	1	40
12	2	1	4	1	7	56
13	2	1	1	5	7	70
14	2	3	4	5	1	120
15	2	3	4	1	7	168
16	2	3	1	5	7	210
17	2	1	4	5	7	280
18	2	3	4	5	7	840

第二代 AI 魔法牌

每張卡牌有兩組數列，三張卡牌
可以猜測 26 個數，每組數列有 9 個數

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	第二代AI魔法牌							
2	a	a ²	b	b ²	c	c ²	A 卡牌-1	A 卡牌-2
3	2	1	1	1	1	1	2	4
4	2	1	3	1	1	1	6	12
5	2	1	1	9	1	1	18	36
6	2	1	1	1	5	1	10	20
7	2	1	1	1	1	25	50	100
8	2	1	3	1	5	1	30	60
9	2	1	3	1	1	25	150	300
10	2	1	1	9	5	1	90	180
11	2	1	1	9	1	25	450	900

第三代 AI 魔法牌

每張卡牌有三組數列，三張卡牌
可以猜測 63 個數，每組數列有 16 個數

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	第三代AI魔法牌											
2	a	a ²	a ³	b	b ²	b ³	c	c ²	c ³	A 卡牌-1	A 卡牌-2	A 卡牌-3
3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	4	8
4	2	1	1	3	1	1	1	1	1	6	12	24
5	2	1	1	1	9	1	1	1	1	18	36	72
6	2	1	1	1	1	27	1	1	1	54	108	216
7	2	1	1	1	1	1	5	1	1	10	20	40
8	2	1	1	1	1	1	1	25	1	50	100	200
9	2	1	1	1	1	1	1	1	125	250	500	1000
10	2	1	1	3	1	1	5	1	1	30	60	120
11	2	1	1	3	1	1	1	25	1	150	300	600
12	2	1	1	3	1	1	1	1	125	750	1500	3000
13	2	1	1	1	9	1	5	1	1	90	180	360
14	2	1	1	1	9	1	1	25	1	450	900	1800
15	2	1	1	1	9	1	1	1	125	2250	4500	9000
16	2	1	1	1	1	27	5	1	1	270	540	1080
17	2	1	1	1	1	27	1	25	1	1350	2700	5400
18	2	1	1	1	1	27	1	1	125	6750	13500	27000

【研究五】製作創意 AI 魔法牌

數字魔法牌雖然好玩，但是容易失去新鮮感，可以將數字改成英文字母、地名、姓氏、美食……，並將原來的數字隱藏，增添神秘感，讓觀眾百思不得其解。創意魔法牌舉例如下：

◎用二進位設計

A

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

B

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

C

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

D

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

E

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

◎用乘法設計第一代數字 AI 魔法牌

A

2	6	8	10
14	24	30	40
42	56	70	120
168	210	280	840

B

3	6	12	15
21	24	30	42
60	84	105	120
168	210	420	840

C

4	8	12	20
24	28	40	56
60	84	120	140
168	280	420	840

D

5	10	15	20
30	35	40	60
70	105	120	140
210	280	420	840

E

7	14	21	28
35	42	56	70
84	105	140	168
210	280	420	840

A₂

1	5	7	8
10	14	16	18
19	20	22	25
27	28	29	31

B₃

2	5	9	11
13	14	16	19
21	23	24	25
27	28	30	31

C₄

3	7	9	12
14	15	18	20
21	23	25	26
27	29	30	31

D₅

4	8	11	12
16	17	18	21
22	24	25	26
28	29	30	31

E₇

6	10	13	15
17	19	20	22
23	24	26	27
28	29	30	31

魔法牌祕笈

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	10
9	10	11	12	13	14	15	16
12	14	15	20	21	24	28	30
17	18	19	20	21	22	23	24
35	40	42	56	60	70	84	105
25	26	27	28	29	30	31	
120	140	168	210	280	420	840	

◎用三進位設計 3 張英文字母魔法牌

☺ ₁									
1	A	D	G	J	M	P	S	V	Y
2	B	E	H	K	N	Q	T	W	Z
☺ ₃									
1	C	D	E	L	M	N	U	V	W
2	F	G	H	O	P	Q	X	Y	Z
☺ ₉									
1	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
2	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

26 個英文字母

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Y	Z				

◎用乘法設計第二代 AI 魔法牌

☺ ₂									
①	A	E	G	J	M	P	S	U	Y
②	C	H	K	N	Q	T	V	X	Z
☺ ₃									
①	B	E	H	I	M	Q	R	U	X
②	F	J	N	O	S	V	W	Y	Z
☺ ₅									
①	D	G	I	K	M	O	Q	S	V
②	L	P	R	T	U	W	X	Y	Z

魔法牌祕笈

A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	3	4	5	6	9	10	12	15
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
18	20	25	30	36	45	50	60	75
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
90	100	150	180	225	300	450	900	

◎用四進位設計 3 張地名魔法牌

A ₁																
1	台北	台中	雲林	台東	新莊	中和	淡水	名間	林口	中壢	景美	鳳山	北斗	羅東	田中	通霄
2	桃園	彰化	台南	花蓮	板橋	新店	天母	竹山	泰山	草屯	瑞芳	關廟	鹿港	東港	新營	魚池
3	新竹	南投	高雄	基隆	三重	士林	五股	樹林	虎尾	埔里	湖口	霧峰	左營	東勢	內壢	知本
B ₄																
1	苗栗	台中	彰化	南投	永和	中和	新店	士林	南港	中壢	草屯	埔里	恆春	羅東	東港	東勢
2	嘉義	雲林	台南	高雄	北投	淡水	天母	五股	松山	景美	瑞芳	湖口	豐原	田中	新營	內壢
3	屏東	台東	花蓮	基隆	蘆洲	名間	竹山	樹林	竹南	鳳山	關廟	霧峰	潭子	通霄	魚池	知本
C ₁₆																
1	宜蘭	新莊	板橋	三重	永和	中和	新店	士林	北投	淡水	天母	五股	蘆洲	名間	竹山	樹林
2	鶯歌	林口	泰山	虎尾	南港	中壢	草屯	埔里	松山	景美	瑞芳	湖口	竹南	鳳山	關廟	霧峰
3	二林	北港	鹿港	左營	恆春	羅東	東港	東勢	豐原	田中	新營	內壢	潭子	通霄	魚池	知本

63 個地名

台北	桃園	新竹	苗栗	台中	彰化	南投	嘉義	雲林	台南
高雄	屏東	台東	花蓮	基隆	宜蘭	新莊	板橋	三重	永和
中和	新店	士林	北投	淡水	天母	五股	蘆洲	名間	竹山
樹林	鶯歌	林口	泰山	虎尾	南港	中壢	草屯	埔里	松山
景美	瑞芳	湖口	竹南	鳳山	關廟	霧峰	二林	北斗	鹿港
左營	恆春	羅東	東港	東勢	豐原	田中	新營	內壢	潭子
通霄	魚池	知本							

◎用乘法設計第三代 AI 魔法牌

A ₂																
①	台北	台中	嘉義	高雄	宜蘭	永和	中和	淡水	樹林	南港	中壢	景美	關廟	左營	東港	潭子
②	新竹	雲林	屏東	新莊	新店	天母	五股	鶯歌	草屯	瑞芳	湖口	霧峰	恆春	東勢	新營	魚池
③	彰化	台東	板橋	士林	蘆洲	林口	泰山	埔里	竹南	二林	北斗	羅東	豐原	內壢	通霄	知本
B ₃																
①	桃園	台中	雲林	台南	台東	宜蘭	新店	北投	蘆洲	樹林	草屯	松山	竹南	關廟	恆春	豐原
②	南投	高雄	新莊	三重	士林	淡水	鶯歌	虎尾	埔里	景美	霧峰	鹿港	羅東	東港	新營	通霄
③	基隆	中和	五股	竹山	泰山	中壢	湖口	鳳山	北斗	左營	東勢	田中	內壢	潭子	魚池	知本
C ₅																
①	苗栗	嘉義	台南	屏東	宜蘭	板橋	三重	新店	淡水	蘆洲	竹山	鶯歌	中壢	埔里	湖口	北斗
②	花蓮	永和	北投	天母	樹林	林口	虎尾	草屯	景美	竹南	鳳山	霧峰	左營	羅東	東勢	內壢
③	名間	南港	松山	瑞芳	關廟	二林	鹿港	恆春	東港	豐原	田中	新營	潭子	通霄	魚池	知本

魔法牌祕笈

台北	桃園	新竹	苗栗	台中	彰化	南投	嘉義	雲林	台南	高雄	屏東	台東	花蓮	基隆	宜蘭
2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18	20	24	25	27	30
新莊	板橋	三和	永和	中和	新店	士林	北投	淡水	天母	五股	蘆洲	名間	竹山	樹林	鶯歌
36	40	45	50	54	60	72	75	90	100	108	120	125	135	150	180
林口	泰山	虎尾	南港	中壢	草屯	埔里	松山	景美	瑞芳	湖口	竹南	鳳山	關廟	霧峰	二林
200	216	225	250	270	300	360	375	450	500	540	600	675	750	900	1000
北斗	鹿港	左營	恆春	羅東	東港	東勢	豐原	田中	新營	內壢	潭子	通霄	魚池	知本	
1080	1125	1350	1500	1800	2250	2700	3000	3375	4500	5400	6750	9000	13500	27000	

參、討論

- 一、市面上的魔法牌是運用二進位的原理來設計，而且卡牌上的數列具有規律性，詳如表二、表三。從表二的數據還發現：每多一張卡牌，猜測數量變成 2 倍+1，每張卡牌的數量變成 2 倍，猜測數量=每張卡牌的數量 \times 2-1。玩遊戲時，如果猜測數量或每張卡牌的數量過多，會讓人心慌意亂，喪失遊戲的樂趣；如果過少，容易被拆穿，缺乏神祕感。因此以 6 張卡牌最適當，因為猜測數量為 $2^6-1=63$ ，每張卡牌的數量為 $2^{6-1}=32$ 。
- 二、研究二發現，不同進位方式魔法牌的設計原理如表十、表十一。每多一張卡牌，猜測數量變成 R 倍+(R-1)，每組數列的個數變成 R 倍，猜測數量=每組數列的個數 \times R-1(R=進位方式)。另外發現卡牌張數相同時，猜測數量、每組數列的個數都以二進位最少，而且依序遞增。猜測數量相同時，所需卡牌張數、每組數列的個數、所需總數量，都以二進位最多，而且依序遞減。舉例如下：

進位方式	每張卡牌組數	猜測數量 63	卡牌張數	每組數列的個數	所需總數量
2 進位	1	2^6-1	6	$2^{6-1}=32$	$32\times 1\times 6=192$
4 進位	3	4^3-1	3	$4^{3-1}=16$	$16\times 3\times 3=144$
8 進位	7	8^2-1	2	$8^{2-1}=8$	$8\times 7\times 2=112$

玩遊戲時以四進位 3 張牌最適當，因為只需要 3 張牌，就可以和二進位 6 張牌的猜測數量一樣；而八進位 2 張牌，目標物最多出現在 2 組數列中，每組只有 8 個數，很容易猜中，挑戰性不夠。

- 三、除了進位方式之外，也可以運用乘法來設計魔法牌。從猜測數量和每組數列的個數來說，以每張卡牌有 3 組數列，設計 3 張牌最適當，效果和四進位 3 張牌一樣，但是猜測的數變得很大。每張卡牌有多組數列時，製作 AI 魔法牌的方法如下：

【方法一】先寫出每張卡牌的第一組數列，包含 1 個數、2 個數相乘、3 個數相乘……；然後複製貼到其餘各組，再將 a、b、c 修改為 a^2 、 a^3 ……； b^2 、 b^3 ……； c^2 、 c^3 (a、b、c……數量=卡牌張數)，便可快速完成每組數列。

【方法二】根據表十六得知，可猜測的最大值是 $a^k\times b^k\times c^k\times d^k\times\cdots$ (第 n 個質數)^k，可猜測的數為 $a^k\times b^k\times c^k\times d^k\times\cdots$ (第 n 個質數)^k 的所有因數(除了 1 以外)。所以製作 AI 魔法牌可以依照下面的步驟。

1. 先算出可猜測的最大值。
2. 把可猜測的最大值做質因數分解，寫出它的所有因數。
3. 把含有 a 的數放到 A 卡牌的第一組，把含有 a^2 的數放到 A 卡牌的第二組……；把含有 b 的數放到 B 卡牌的第一組，把含有 b^2 的數放到 B 卡牌的第二組……；以此類推。

四、結合 Excel 設計 e 世代 AI 魔法牌

(一) 用進位方式設計 AI 魔法牌

按照卡牌製作方法的四個步驟進行，兩分鐘可完成一副新卡牌，而且不會出錯。

(二) 用乘法設計 AI 魔法牌

1. 自訂公式計算乘積，如果沒有出現的數要填寫 1，否則公式無效，乘積會出現 0。
2. 各組的數列，可以用 Excel 的排序功能，按最小到最大排序，玩遊戲時觀眾比較容易尋找目標物。
3. 運用“尋找與選取”功能，依照下面的步驟，就可以立即產生每張卡牌的新數列，變化無窮。

步驟(1):在【尋找目標】欄位輸入原來的數

步驟(2):在【取代】欄位輸入欲更換的數

步驟(3):按下【全部取代】，立即產生新數列

五、製作創意 AI 魔法牌時，除了將數字替換成其他目標物，增添新鮮感，還可以比較不同設計方法的魔法牌。

(一) 運用乘法設計 AI 魔法牌，猜測的範圍不再是連續數列。將可猜測的數依序轉換成從 1 開始的連續數列，卡牌張數、猜測範圍、每組數列的個數都會和進位方式設計的完全一樣，但是每組數列卻因設計方式不同而改變，可說是異曲同工之妙，這種魔法數字變變變，實在太有趣了。

(二) 26 個英文字母可以用三進位來設計，也可以用乘法(每張卡牌有兩組數列)來設計，因為設計方法不同，所以卡牌的數列也跟著改變，但是魔法依然存在。而且將魔法牌結合 26 個英文字母玩遊戲，可發揮寓教於樂的效果。

(三) 63 個地名可以用二進位來設計，也可以用四進位、八進位來設計，甚至乘法也可以設計出來，不過所需卡牌的張數和數列都不同，讓魔法千變萬化。

(四) AI 魔法牌的玩法見附錄二。

肆、結論

※ R =進位方式； n =卡牌張數； m =第幾張卡牌； k =每張卡牌的組數

- 一、市面上的魔法牌是用二進位的方式設計的，其他進位方式和乘法也都可以設計出魔法牌，多變的魔法牌讓遊戲百玩不膩。
- 二、不同進位方式設計的魔法牌，猜測數量為 $R^n - 1$ ，每組數列的個數為 R^{n-1} ；而用乘法設計的魔法牌猜測數量為 $(k+1)^n - 1$ ，每組數列的個數為 $(k+1)^{n-1}$ 。 $R=k+1$ ，所以進位方式=每張卡牌的組數+1。進位方式和乘法原理設計的魔法牌，猜測數量和每組數列的個數是一樣的。
- 三、不同進位方式設計的魔法牌，卡牌上的數列具有規律性，如表十一。只要依照 $R^{m-1} \times 1$ 、 $R^{m-1} \times 2$ 、 $R^{m-1} \times 3 \cdots R^{m-1} \times (R-1)$ 的公式寫出每張卡牌各組的第一個數，接著依循連續數列的個數 R^{m-1} 寫出每張卡牌各組的第一個連續數列，然後將第一個連續數列+ R^m ，即為第二個連續數列，將第二個連續數列+ R^m ，即為第三個連續數列，直到每組數列出現 R^{n-1} 個數，就可快速製作魔法牌。
- 四、運用乘法設計魔法牌，設計方式如表十六，除了用乘法的概念，還加入次方，可猜測的數為 $a^k \times b^k \times c^k \times d^k \times \cdots$ (第 n 個質數) ^{k} 的所有因數(除了 1 以外)。數列隨著卡牌的第一個數 a 、 b 、 $c \cdots$ 而改變，變化無窮且看不出規律性，一時之間會讓觀眾深信真的有魔法，增添遊戲的趣味性。
- 五“e 世代 AI 魔法牌”的設計，讓魔法牌千變萬化，而且製作快速，見證了 e 世代的神奇。
- 六、製作創意 AI 魔法牌，除了替換目標物，還隱藏數字。雖然多一張魔法牌祕笈，也就是轉換表，但是很神祕。
- 七、猜測的內容完全相同，譬如連續數列、26 個英文字母、63 個地名 \cdots ，魔法牌可以用進位方式來設計，也可以運用乘法來設計。同時呈現相同的猜測內容，卻發現卡牌的數列不同，會讓觀眾覺得新奇，很想一探究竟。
- 八、利用五進位 3 張卡牌設計的數字 AI 魔法牌，猜測數量為 $R^n - 1 = 5^3 - 1 = 124$ 個，可同時用來猜測出生的年、月、日及生肖、星座，甚至個人特質。只要一副牌在手，便知對方的許多祕密，可說是既神奇又有趣的讀心術。

九、各種 AI 魔法牌的比較如下：

設計原理	二進位方式	其他進位方式(R)	乘法方式
每張卡牌的第一個數	2^0 、 2^1 、 2^2 …… 是固定的	R^0 、 R^1 、 R^2 …… 是固定的	不固定，任何質數均可
可以猜測的範圍	從 1 開始的連續數列	從 1 開始的連續數列	沒有固定範圍，經過轉換也可以是連續數列
數列設計的難度	★☆☆☆☆ 可以用公式製作	★★☆☆☆ 一張卡牌有好幾組數列，設計比二進位困難	★★★★☆ 設計最困難，要用特定的組合公式
被拆穿魔法的機會	很多人都知道祕訣	原理如二進位，有可能被拆穿	看不出端倪，轉換成連續數列更難破解
理想魔法牌	6 張卡牌	四進位 3 張卡牌	3 張卡牌，每張卡牌有 3 組數列

※越多★★越難

伍、參考資料

王慶宇、陳俊廷、林聖為(第 49 屆全國科展)。魔術紙牌遊戲之數理探究。取自

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/49/pdf/080402.pdf>

田喬恩、陳炤良、陳皇蓉、王晶晶(第 50 屆全國科展)。揭開「孔明神算」的神祕面紗。取自

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/080404.pdf>

【本研究所有圖表均為作者在指導老師指導下親自繪製】

陸、附錄

附錄一 AI 魔法牌 Excel 檔內容

2-12 進位設計的魔法牌

K14																																												
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG												
1	2 進位 6 張牌 猜測 63 個數 每張卡牌 32 個數																																											
2	A	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63											
3	B	2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31	34	35	38	39	42	43	46	47	50	51	54	55	58	59	62	63											
4	C	4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31	36	37	38	39	44	45	46	47	52	53	54	55	60	61	62	63											
5	D	8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31	40	41	42	43	44	45	46	47	56	57	58	59	60	61	62	63											
6	E	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63											
7	F	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63											
8																																												
9	3 進位 4 張牌 猜測 80 個數 每組數列 27 個數																																											
10	A	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79																
11		2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80																
12	B	3	4	5	12	13	14	21	22	23	30	31	32	39	40	41	48	49	50	57	58	59	66	67	68	75	76	77																
13		6	7	8	15	16	17	24	25	26	33	34	35	42	43	44	51	52	53	60	61	62	69	70	71	78	79	80																
14	C	9	10	11	12	13	14	15	16	17	36	37	38	39	40	41	42	43	44	63	64	65	66	67	68	69	70	71																
15		18	19	20	21	22	23	24	25	26	45	46	47	48	49	50	51	52	53	72	73	74	75	76	77	78	79	80																
16	D	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53																
17		54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80																
G35																																												
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z																			
19	4 進位 3 張牌 猜測 63 個數 每組數列 16 個數																																											
20	A	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61																											
21		2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62																											
22		3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63																											
23	B	4	5	6	7	20	21	22	23	36	37	38	39	52	53	54	55																											
24		8	9	10	11	24	25	26	27	40	41	42	43	56	57	58	59																											
25		12	13	14	15	28	29	30	31	44	45	46	47	60	61	62	63																											
26	C	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31																											
27		32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47																											
28		48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63																											
29																																												
30	5 進位 3 張牌 猜測 124 個數 每組數列 25 個數																																											
31	A	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	81	86	91	96	101	106	111	116	121																		
32		2	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	82	87	92	97	102	107	112	117	122																		
33		3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	73	78	83	88	93	98	103	108	113	118	123																		
34		4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	74	79	84	89	94	99	104	109	114	119	124																		
35	B	5	6	7	8	9	30	31	32	33	34	55	56	57	58	59	80	81	82	83	84	105	106	107	108	109																		
36		10	11	12	13	14	35	36	37	38	39	60	61	62	63	64	85	86	87	88	89	110	111	112	113	114																		
37		15	16	17	18	19	40	41	42	43	44	65	66	67	68	69	90	91	92	93	94	115	116	117	118	119																		
38		20	21	22	23	24	45	46	47	48	49	70	71	72	73	74	95	96	97	98	99	120	121	122	123	124																		
39	C	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49																		
40		50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74																		
41		75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99																		
42		100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124																		
T45																																												
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK								
43	6 進位 2 張牌 猜測 35 個數 每組數列 6 個數						7 進位 2 張牌 猜測 48 個數 每組數列 7 個數						8 進位 2 張牌 猜測 63 個數 每組數列 8 個數						9 進位 2 張牌 猜測 80 個數 每組數列 9 個數																									
44	A	1	7	13	19	25	31	1	8	15	22	29	36	43	1	9	17	25	33	41	49	57	1	10	19	28	37	46	55	64	73													
45		2	8	14	20	26	32	2	9	16	23	30	37	44	2	10	18	26	34	42	50	58	2	11	20	29	38	47	56	65	74													
46		3	9	15	21	27	33	3	10	17	24	31	38	45	3	11	19	27	35	43	51	59	3	12	21	30	39	48	57	66	75													
47		4	10	16	22	28	34	4	11	18	25	32	39	46	4	12	20	28	36	44	52	60	4	13	22	31	40	49	58	67	76													
48		5	11	17	23	29	35	5	12	19	26	33	40	47	5	13	21	29	37	45	53	61	5	14	23	32	41	50	59	68	77													
49		6	7	8	9	10	11	6	13	20	27	34	41	48	6	14	22	30	38	46	54	62	6	15	24	33	42	51	60	69	78													
50	B	12	13	14	15	16	17	7	8	9	10	11	12	13	7	8	9	10	11	12	13	14	7	16	25	34	43	52	61	70	79													
51		18	19	20	21	22	23	8	9	10	11	12	13	14	8	9	10	11	12	13	14	15	8	17	26	35	44	53	62	71	80													
52		24	25	26	27	28	29	9	10	11	12	13	14	15	9	10	11	12	13	14	15	16	9	18	27	36	45	54	63	72	81													
53		30	31	32	33	34	35	10	11	12	13	14	15	16	10	11	12	13	14	15	16	17	10	19	28	37	46	55	64	73	82													
54		36	37	38	39	40	41	11	12	13	14	15	16	17	11	12	13	14	15	16	17	18	11	20	29	38	47	56	65	74	83													
55		42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	56	57	58	59	60	61	62	63													
56																																												
57																																												
58																																												
59																																												
60																																												
AB63																																												
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL							
61	10 進位 2 張牌 猜測 99 個數 每組數列 10 個數						11 進位 2 張牌 猜測 120 個數 每組數列 11 個數						12 進位 2 張牌 猜測 143 個數 每組數列 12 個數																															
62	A	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133										
63		2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	112	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	122	134										
64		3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	113	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	123	135										
65		4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	114	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	124	136										
66		5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	115	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	125	137										

乘法設計 第一代 AI 魔法牌 5 張卡牌 可猜測 31 個數 每張卡牌有 16 個數

F18 =A18*B18+C18*D18+E18																																	
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
第一代AI魔法牌					每張卡牌只有一組數列															5 張牌 可猜測 31 個數					每張卡牌有 16 個數								
2	a	b	c	d	e	A 卡牌	a	b	c	d	e	B 卡牌	a	b	c	d	e	C 卡牌	a	b	c	d	e	D 卡牌	a	b	c	d	e	E 卡牌			
3	2	1	1	1	1	2	1	3	1	1	1	3	1	1	4	1	1	4	1	1	1	5	1	5	1	1	1	1	7	7			
4	2	3	1	1	1	6	2	3	1	1	1	6	2	1	4	1	1	8	2	1	1	5	1	10	2	1	1	1	7	14			
5	2	1	4	1	1	8	1	3	4	1	1	12	1	3	4	1	1	12	1	3	1	5	1	15	1	3	1	1	7	21			
6	2	1	1	5	1	10	1	3	1	5	1	15	1	1	4	5	1	20	1	1	4	5	1	20	1	1	4	1	7	28			
7	2	1	1	1	7	14	1	3	1	1	7	21	1	1	4	1	7	28	1	1	1	5	7	35	1	1	1	5	7	35			
8	2	3	4	1	1	24	2	3	4	1	1	24	2	3	4	1	1	24	2	3	1	5	1	30	2	3	1	1	7	42			
9	2	3	1	5	1	30	2	3	1	5	1	30	2	1	4	5	1	40	2	1	4	5	1	40	2	1	4	1	7	56			
10	2	3	1	1	7	42	2	3	1	1	7	42	2	1	4	1	7	56	2	1	1	5	7	70	2	1	1	5	7	70			
11	2	1	4	5	1	40	1	3	4	5	1	60	1	3	4	5	1	60	1	3	4	5	1	60	1	3	4	1	7	84			
12	2	1	4	1	7	56	1	3	4	1	7	84	1	3	4	1	7	84	1	3	1	5	7	105	1	3	1	5	7	105			
13	2	1	1	5	7	70	1	3	1	5	7	105	1	1	4	5	7	140	1	1	4	5	7	140	1	1	4	5	7	140			
14	2	3	4	5	1	120	2	3	4	5	1	120	2	3	4	5	1	120	2	3	4	5	1	120	2	3	4	1	7	168			
15	2	3	4	1	7	168	2	3	4	1	7	168	2	3	4	1	7	168	2	3	1	5	7	210	2	3	1	5	7	210			
16	2	3	1	5	7	210	2	3	1	5	7	210	2	1	4	5	7	280	2	1	4	5	7	280	2	1	4	5	7	280			
17	2	1	4	5	7	280	1	3	4	5	7	420	1	3	4	5	7	420	1	3	4	5	7	420	1	3	4	5	7	420			
18	2	3	4	5	7	840	2	3	4	5	7	840	2	3	4	5	7	840	2	3	4	5	7	840	2	3	4	5	7	840			

乘法設計 第二代 AI 魔法牌 3 張卡牌 可猜測 26 個數 每組數列有 9 個數

Q3 =P3*3																									
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
第二代AI魔法牌				每張卡牌有2組數列												3 張牌 可猜測 26 個數				每組數列有 9 個數					
2	a	a ²	b	b ²	c	c ²	A 卡牌-1	A 卡牌-2	a	a ²	b	b ²	c	c ²	B 卡牌-1	B 卡牌-2	a	a ²	b	b ²	c	c ²	C 卡牌-1	C 卡牌-2	
3	2	1	1	1	1	1	2	4	1	1	3	1	1	1	3	9	1	1	1	1	1	5	1	5	25
4	2	1	3	1	1	1	6	12	2	1	3	1	1	1	6	18	2	1	1	1	1	5	1	10	50
5	2	1	1	9	1	1	18	36	1	4	3	1	1	1	12	36	1	4	1	1	1	5	1	20	100
6	2	1	1	1	5	1	10	20	1	1	3	1	5	1	15	45	1	1	3	1	5	1	15	75	
7	2	1	1	1	1	25	50	100	1	1	3	1	1	25	75	225	1	1	1	9	5	1	45	225	
8	2	1	3	1	5	1	30	60	2	1	3	1	5	1	30	90	2	1	3	1	5	1	30	150	
9	2	1	3	1	1	25	150	300	2	1	3	1	1	25	150	450	2	1	1	9	5	1	90	450	
10	2	1	1	9	5	1	90	180	1	4	3	1	5	1	60	180	1	4	3	1	5	1	60	300	
11	2	1	1	1	9	1	450	900	1	4	3	1	1	25	300	900	1	4	1	9	5	1	180	900	

乘法設計 第三代 AI 魔法牌 3 張卡牌 可猜測 63 個數 每組數列有 16 個數

AL3 =AK3*5																																									
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL				
第三代AI魔法牌								每張卡牌有3組數列																3 張牌 可猜測 63 個數						每組數列有 16 個數											
2	a	a ²	a ³	b	b ²	b ³	c	c ²	c ³	A 卡牌-1	A 卡牌-2	A 卡牌-3	a	a ²	a ³	b	b ²	b ³	c	c ²	c ³	B 卡牌-1	B 卡牌-2	B 卡牌-3	a	a ²	a ³	b	b ²	b ³	c	c ²	c ³	C 卡牌-1	C 卡牌-2	C 卡牌-3					
3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	4	8	1	1	1	3	1	1	1	1	1	3	9	27	1	1	1	1	1	1	5	1	1	5	25	125					
4	2	1	1	3	1	1	1	1	1	6	12	24	2	1	1	3	1	1	1	1	1	6	18	54	2	1	1	1	1	1	5	1	1	10	50	250					
5	2	1	1	1	9	1	1	1	1	18	36	72	1	4	1	3	1	1	1	1	1	12	36	108	1	4	1	1	1	1	5	1	1	20	100	500					
6	2	1	1	1	1	27	1	1	1	54	108	216	1	1	8	3	1	1	1	1	24	72	216	1	1	8	1	1	1	5	1	1	40	200	1000						
7	2	1	1	1	1	1	5	1	1	10	20	40	1	1	1	3	1	1	5	1	1	15	45	135	1	1	1	3	1	1	5	1	1	15	75	375					
8	2	1	1	1	1	1	1	25	1	50	100	200	1	1	1	3	1	1	1	25	1	75	225	675	1	1	1	1	9	1	1	5	1	1	45	225	1125				
9	2	1	1	1	1	1	1	1	125	250	500	1000	1	1	1	3	1	1	1	1	125	375	1125	3375	1	1	1	1	1	1	27	5	1	1	135	675	3375				
10	2	1	1	3	1	1	5	1	1	30	60	120	2	1	1	3	1	1	5	1	1	30	90	270	2	1	1	3	1	1	5	1	1	30	150	750					
11	2	1	1	3	1	1	1	25	1	150	300	600	2	1	1	3	1	1	1	1	25	150	450	1350	2	1	1	1	9	1	1	5	1	1	90	450	2250				
12	2	1	1	3	1	1	1	1	125	750	1500	3000	2	1	1	3	1	1	1	1	125	750	2250	6750	2	1	1	1	1	1	27	5	1	1	270	1350	6750				
13	2	1	1	1	9	1	5	1	1	90	180	360	1	4	1	3	1	1	5	1	1	60	180	540	1	4	1	3	1	1	5	1	1	60	300	1500					
14	2	1	1	1	9	1	1	25	1	450	900	1800	1	4	1	3	1	1	1	25	1	300	900	2700	1	4	1	1	9	1	1	5	1	1	180	900	4500				
15	2	1	1	1	9	1	1	1	125	2250	4500	9000	1	4	1	3	1	1	1	1	125	1500	4500	13500	1	4	1	1	1	1	27	5	1	1	540	2700	13500				
16	2	1	1	1	1	27	5	1	1	270	540	1080	1	1	8	3	1	1	5	1	1	120	360	1080	1	1	8	3	1	1	5	1	1	120	600	3000					
17	2	1	1	1	1	27	1	25	1	1350	2700	5400	1	1	8	3	1	1	1	25	1	600	1800	5400	1	1	8	1	9	1	1	5	1	1	360	1800	9000				
18	2	1	1	1	1	27	1	1	125	6750	13500	27000	1	1	8	3	1	1	1	1	125	3000	9000	27000	1	1	8	1	1	1	27	5	1	1	1080	5400	27000				

附錄二 創意 AI 魔法牌玩法

一、玩法說明

【玩法一】觀眾先選定一個目標物放在心裡，魔法師可以快速猜出答案。

1. 請觀眾拿出有心中目標物的卡牌或依序詢問對方此張卡牌有沒有目標物。
(二進位、乘法第一代 AI 魔法牌)
2. 依序詢問觀眾目標物出現在第幾張卡牌的第幾列。
(其他進位方式及其他乘法 AI 魔法牌)

【玩法二】觀眾說出一個目標物，魔法師就能推算出目標物出現在何處。

1. 出現在第幾張卡牌(二進位、乘法第一代 AI 魔法牌)
2. 出現在第幾張卡牌的第幾列。(其他進位方式及其他乘法 AI 魔法牌)

二、玩法舉例

(一) 用三進位設計 3 張魔法牌(每張卡牌的第一個數依序為 3^0 、 3^1 、 3^2)

1. 數字魔法牌

A									
1	4	7	10	13	16	19	22	25	
2	5	8	11	14	17	20	23	26	
B									
3	4	5	12	13	14	21	22	23	
6	7	8	15	16	17	24	25	26	
C									
9	10	11	12	13	14	15	16	17	
18	19	20	21	22	23	24	25	26	

【玩法一】把 21 出現所在數列的第一個數相加。 $3+18=21$ 。答案是 21

【玩法二】 $21=9\times 2+3\times 1=3^2\times 2+3^1\times 1$ 21 出現在 C 卡牌的第 2 列、B 卡牌的第 1 列

2. 英文字母魔法牌

☺ ₁									
1	A	D	G	J	M	P	S	V	Y
2	B	E	H	K	N	Q	T	W	Z
☺ ₃									
1	C	D	E	L	M	N	U	V	W
2	F	G	H	O	P	Q	X	Y	Z
☺ ₉									
1	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
2	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

魔法牌祕笈

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Y	Z				

【玩法一】把 H 出現所在數列的代表數字相乘後再加總。 $1\times 2+3\times 2=8$ 。

(也可以把 H 出現所在數列的第一個英文字母換成數字，再把這些數字相加。 $2+6=8$)

從魔法牌祕笈發現第 8 個英文字母是 H。答案是 H

【玩法二】H 是第 8 個英文字母

$$8=3\times 2+1\times 2=3^1\times 2+3^0\times 2 \quad \text{H 出現第 2 張卡牌的第 2 列、第 1 張卡牌的第 2 列}$$

(二) 用乘法設計 3 張魔法牌(每張卡牌的第一個數依序為 2、3、5)

1. 數字魔法牌

A

2	6	10	18	30	50	90	150	450
4	12	20	36	60	100	180	300	900

B

3	6	12	15	30	60	75	150	300
9	18	36	45	90	180	225	450	900

C

5	10	15	20	30	45	60	90	180
25	50	75	100	150	225	300	450	900

目標物—26 個數

2	3	4	5	6	9	10	12	15
18	20	25	30	36	45	50	60	75
90	100	150	180	225	300	450	900	

【玩法一】把 150 出現所在數列的第一個數相乘。 $2\times 3\times 25=150$ 。答案是 150

【玩法二】150 做質因數分解 $150=2\times 3\times 5^2$

150 出現在 A 卡牌的第 1 列、B 卡牌的第 1 列、C 卡牌的第 2 列。

2. 英文字母魔法牌

☺₂

①	A	E	G	J	M	P	S	U	Y
②	C	H	K	N	Q	T	V	X	Z

☺₃

①	B	E	H	I	M	Q	R	U	X
②	F	J	N	O	S	V	W	Y	Z

☺₅

①	D	G	I	K	M	O	Q	S	V
②	L	P	R	T	U	W	X	Y	Z

魔法牌祕笈

A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	3	4	5	6	9	10	12	15
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
18	20	25	30	36	45	50	60	75
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
90	100	150	180	225	300	450	900	

【玩法一】把 P 出現所在數列的代表數字相乘(①②各代表一次方、二次方)。

$$2^1\times 5^2=50。$$

從魔法牌祕笈發現 50 應轉換為英文字母 P。答案是 P

【玩法二】從魔法牌祕笈發現 P 對應的數是 50

把 50 做質因數分解 $50=2^1\times 5^2$

P 出現第 1 張卡牌的第 1 列、第 3 張卡牌的第 2 列