

屏東縣第65屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：建構「DNA 魔咒牌列」的數學模型

關 鍵 詞：魔咒數、巴斯卡三角形、等差級數

編號：B1012

目錄

摘要.....	P_2
壹、前言（含研究動機、目的、文獻回顧）.....	P_2
貳、研究設備及器材.....	P_3
參、研究過程或方法.....	P_3
一、探索 Martin Gardner 所提示的兩則撲克牌魔術（如研究動機）的設計原理。	P_3
二、基於研究程序一之探索成果，實驗與推演設計「首項為任意正整數 A 之魔法牌列 （從左右兩端任意合取 3 張牌）」的數學模型.....	P_4
三、基於二之探索成果，再進一步推演設計「從左右兩端任意合取 N 張牌（N 為 3 以上的任意正整數）且首項 A 為任意正整數）」之魔咒牌列的通用數學模型。	P_6
四、探索從一個魔咒牌列左右兩端任意合取 N 張牌 N 之所有可能的取牌路線總數 （取牌先後順序也列入考慮）。.....	P_{13}
肆、研究結果.....	P_{17}
伍、討論.....	P_{17}
陸、結論.....	P_{18}
柒、參考資料及其他.....	P_{18}
（附件一）.....	P_{19}
（附件二）.....	P_{20}

建構「DNA 魔咒牌列」的數學模型

摘要

初次翻閱打開魔術箱（胡守仁譯）一書，便被內容中以撲克牌為主題的遊戲所吸引。看似簡單的取牌遊戲，卻能夠在一些步驟後，找到看似命定的牌卡。這樣簡單、純粹的美吸引著我們想要一窺其中奧秘。在一次的課堂討論中，開啟了與我們接下來想要研究的主題：建構「DNA 魔咒牌列」的數學模型的一段緣分，進而從 A~9、2~K 的牌列中找尋線索與接續探索其他牌列的關鍵因素。

最終，根據一步一步的推論，順利的完成「從左右兩端任意合取 N 張牌（ N 為3以上的任意正整數）且首項 A 為任意正整數」之魔咒牌列的通用數學模型。

壹、前言

Martin Gardner 在打開魔術箱（胡守仁譯）一書之第5章「以撲克牌建構數學模型」曾寫道：

魔術師發現了下面這件奇妙的事情。把 A 到9依序排成一列，A 在最左。從任何一端移走一張牌，再從任何一端移走一張牌，接著再從任何一端移走第三張牌。將此三張牌的點數相加除以6，得到的商數姑且稱為 n ，則由左至右數過來第 n 張牌，一定是4。我留給讀者自行思考箇中原因，或許還可以推廣到更長的數列上。例如用12張牌（2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K）排成一列，在任何一端移走一張牌共計三次，把點數相加除以9，得數 n 。由左至右數第 n 張，一定是5（摘自該書第38頁第二段，如附件1）。

當我們試玩上列遊戲後，大家都充滿了好奇，也發想出若干進一步探索的想法。經與老師共同討論後，期望本研究能順利達成下列目的。

- 一、探索 Martin Gardner 所提示的兩則撲克牌魔術（如上列）的設計原理。
- 二、基於一之探索成果，推演設計「首項為任意正整數 A 之魔咒牌列（從左右兩端任意合取3張牌）」的數學模型。
- 三、基於二之探索成果，再進一步推演設計「從左右兩端任意合取 N 張牌（ N 為3以上的任意正整數）且首項 A 為任意正整數」之魔咒牌列的通用數學模型。
- 四、探索從一個魔咒牌列左右兩端任意合取 N 張牌之所有可能的路線總數（取牌先後順序也列入考慮）。

貳、研究設備及器材

紙、筆、Excel、撲克牌。

參、研究過程或方法

運用簡化問題、窮舉證法、系統性表列有關案例之各項結果、尋求各變項之間的規律關係-形成猜測，並以相關案例檢測此一猜測的可行性，成功後再進一步運用國中數學所學代數運算方法，對有關猜測進行推演論證，以期「代數化」成為完備通用的數學模型。

根據研究目的，依序進行以下的探究活動。

一、探索 Martin Gardner 所提示的兩則撲克牌魔術（如研究動機）的設計原理。

經參照 Martin Gardner 之提示，分別操作牌列 A~9 與 2~K，所得各項重要數據分別如表一、表二與表三。

表一：從牌列 A~9 左右兩端任意合取 3 張牌（設定除數 $D = 6$ ）

起始牌列 (連續數列)	取牌路線	取得牌點 順序	取得牌點和 S	$S \div D = Q$	剩餘牌列	剩餘牌列第 Q 張的牌點
A~9	左, 左, 左	1, 2, 3	$1+2+3=6$	1	4~9	4
	左, 左, 右	1, 2, 9				
	左, 右, 左	1, 9, 2	$1+2+9=12$	2	3~8	
	右, 左, 左	9, 1, 2				
	左, 右, 右	1, 9, 8				
	右, 左, 右	9, 1, 8	$1+8+9=18$	3	2~7	
	右, 右, 左	9, 8, 1				
	右, 右, 右	9, 8, 7	$7+8+9=24$	4	1~6	

由表一取牌路線之第 2 欄位可知，取得牌點和與取牌先後順序或取牌路線無關，只與左右兩端合取幾張有關，因此，探索牌列 A~9 與 2~K 之設計原理，在操作與記錄上可簡化為如下之表二與表三。

表二：A~9 任意合取 3 張（牌卡代號 A=1）

起始牌列 (連續數列)	取牌方式 (左右兩端 各取張數)	剩餘牌列	取得牌點和 S	設定除數 D	$S \div D = Q$	剩餘牌列第 Q 張的牌點
A~9	左 3 右 0	4~9	$1+2+3=6$	6	1	4
	左 2 右 1	3~8	$1+2+9=12$		2	
	左 1 右 2	2~7	$1+8+9=18$		3	
	左 0 右 3	1~6	$7+8+9=24$		4	

表三：2~K 任意合取3張（牌卡代號 J=11, Q=12, K=13）

起始牌列 (連續數列)	取牌方式 (左右兩端 合取張數)	剩餘牌列	取得牌點和 S	設定除數 D	$S \div D = Q$	剩餘牌列第 Q 張的牌點
2~K	左 3 右 0	5~K	9	9	1	5
	左 2 右 1	4~Q	18		2	
	左 1 右 2	3~J	27		3	
	左 0 右 3	2~10	36		4	

將表二與表三之起始牌列、合取張數、設定除數、剩餘牌列第 Q 張的牌點（因各種不同的取牌方式，其最終都會出現同一牌點，所以簡稱為「魔咒數」）等數據，統整如表四，並探索其間的相互關係。

表四：表二與表三之各項數據的規律關係

起始牌列 *末項與有關項目之關係	合取 張數	設定除數 (牌卡中前 3 張牌點和)	魔咒數
$\boxed{1}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \boxed{9}$ $\boxed{9} = \boxed{1} + \boxed{6} + 2$	$\boxed{3}$	$\boxed{6} = \boxed{1} + 2 + 3$	$4 = \boxed{1} + \boxed{3}$
$\boxed{2}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \boxed{13}$ $\boxed{13} = \boxed{2} + \boxed{9} + 2$	$\boxed{3}$	$\boxed{9} = \boxed{2} + 3 + 4$	$5 = \boxed{2} + \boxed{3}$

由表四可知，Martin Gardner 所提示的兩則撲克牌魔術的設計原理如下，當牌列左右兩端合取張數限定為3且起始牌列之首項為給定時，有如下觀察之規律：

1. 設定除數=起始牌列左端 3 張（前 3 項）之牌點數和
2. 起始牌列最右端（末項）之牌點=起始牌列左端（首項）之牌點+設定除數+ 2
3. 魔咒數（剩餘牌列第 Q 張的牌點）= 起始牌列左端（首項）之牌點+合取張數

然而，上述發現可用來設計起始牌列之首項為 3 以上（任意從牌列左右兩端合取 3 張）之魔咒牌列嗎？

二、基於研究程序一之探索成果，實驗與推演設計「首項為任意正整數 A 之魔法牌列（從左右兩端任意合取 3 張牌）」的數學模型

（一）測試首項為 3, 4, 5 等起始牌列，結果如表五。

依據表四之探索結果所發現的「起始牌列之末項=首項+設定除數+2」之設計要訣，設計出 3~17、4~21 與 5~25 等牌列，經從各牌列左右兩端任意合取3張牌之測試結果如表五。

表五：首項為3, 4, 5 等起始牌列之測試結果

起始牌列 (連續數列)	取牌方式 (左右兩端合取 3張數)	剩餘牌列	取得牌點和 S	設定除數 D	$S \div D = Q$	魔咒數 (剩餘牌列第 Q張的牌點)
3~17	左3右0	6~17	12	12	1	$6=3+3$
	左2右1	5~16	24		2	
	左1右2	4~15	36		3	
	左0右3	3-14	48		4	
4~21	左3右0	7~21	15	15	1	$7=4+3$
	左2右1	6~20	30		2	
	左1右2	5~19	45		3	
	左0右3	4~18	60		4	
5~25	左3右0	8~25	18	18	1	$8=5+3$
	左2右1	7~24	36		2	
	左1右2	6~23	54		3	
	左0右3	5-22	72		4	

顯示依表四之探索結果所設計之 3~17、4~21 與 5~25 等牌列，在任意合取3張後，也都會出現「首項+合取張數3」的魔咒數。

既然基於「末項=首項+設定除數+2」之設計要訣，所設計出 3~17、4~21 與 5~25（也包括 Martin Gardner 所提示之 A~9與2~K）等牌列，經測試結果，也都會出現「首項+合取張數3」的魔咒數。因此，讓我們聯想到該設計末項的要訣，是否也可一體適用於首項為任意正整數 A 的牌列設計？

上述猜想之代數化論證過程如後所述，若限定從牌列兩端任意合取3張，則依表四之探索結果設計的牌列，當其首項 A 為任意正整數時，很可能必為一套具有魔咒 A+3的牌列。此牌列搭配之要件如下：

1. 合取牌數 3 張。
2. 設定除數—前 3 項之和 $A + (A+1) + (A+2) = 3(A+1)$ 。
3. 起始牌列—A (首項) ~ L (末項=設定為除數 + 首項+2)，即 $L = 3(A+1) + A + 2 = 4A + 5$ 。
4. 魔咒數字 $M = \text{首項 } A + \text{合取牌數 } 3 = A + 3$

由於依據上述要件所設定之起始牌列為 A, A+1, A+2, ..., 4A+3, 4A+4, 4A+5 (*即 A~4A+5，其中 A 代表任意正整數)；除數 D 為 A, A+1, A+2 之和 3A+3 (合取牌數設定 3 張，取前 3 項之和做為除數 D)，而整理出如下的結果。

表六：首項為 A（任意正整數）之起始牌列的測試結果

起始牌列 (連續數列)	取牌方式 (左右兩端合 取 3 張數)	殘餘牌列	取得牌點和 S	設定除數 D	$S \div D = Q$	魔咒數 (剩餘牌列第 Q 張的牌點)
$A, \dots, 4A+5$	左 3 右 0	$(A+3)$ ~ $(4A+5)$	$A + (A+1)$ + $(A+2)$ $= 3A+3$	$A + (A+1)$ + $(A+2)$ $= 3A+3$	$\frac{3A+3}{3A+3} = 1$	A+3=首項 A+合取牌數 3
	左 2 右 1	$(A+2)$ ~ $(4A+4)$	$A + (A+1)$ + $(4A+5)$ $= 6A+6$		$\frac{6A+6}{3A+3} = 2$	
	左 1 右 2	$(A+1)$ ~ $(4A+3)$	$A + (4A+4)$ + $(4A+5)$ $= 9A+9$		$\frac{9A+9}{3A+3} = 3$	
	左 0 右 3	A ~ $(4A+2)$	$(4A+3)$ + $(4A+4)$ + $(4A+5)$ $= 12A+12$		$\frac{12A+12}{3A+3} = 4$	

(1)當取牌方式為「左 3 右 0」時，取得 3 張牌點 (A, A+1, A+2) 之和 $S=3A+3$ ，則

$\frac{S}{D} = \frac{3A+3}{3A+3} = 1$ 。又剩餘牌列為 $A+3, \dots, 4A+3, 4A+4, 4A+5$ ，故其第 1 張牌為 A+3。

(2)當取牌方式為「左 2 右 1」時，取得 3 張牌點 (A, A+1, 4A+5) 之和 $S=6A+6$ ，則

$\frac{S}{D} = \frac{6A+6}{3A+3} = 2$ 。又剩餘牌列為 A+2, A+3, $\dots, 4A+3, 4A+4$ ，故其第 2 張牌為 A+3。

(3)當取牌方式為「左 1 右 2」時，取得 3 張牌點 (A, 4A+4, 4A+5) 之和 $S=9A+9$ ，則

$\frac{S}{D} = \frac{9A+9}{3A+3} = 3$ 。又剩餘牌列為 A+1, A+2, A+3, $\dots, 4A+3$ ，故其第 3 張牌為 A+3。

(4)當取牌方式為左 0 右 3 時，取得 3 張牌 (4A+3, 4A+4, 4A+5) 之和 $S=12A+12$ ，則

$\frac{S}{D} = \frac{12A+12}{3A+3} = 4$ 。又剩餘牌列為 A, A+1, A+2, A+3, $\dots, 4A+2$ ，故其第 4 張牌為 A+3。

綜合 (1) ~ (4) 之論證，可確定：「當起始牌列之牌點設定為 A~4A+5 之連續正整數的數列（其中 A 適用於任意正整數），除數 D 設定為 3A+3，且令從該牌列左右兩端任意合取 3 張牌之牌點和為 S 與 $\frac{S}{D}=Q$ ，則其剩餘牌列由左而右第 Q 張之牌點必為 A+3。」

雖然由牌列左右兩端任意選取 3 張有 8 種不同的路線（考慮取牌先後順序），但其後果恆為 A+3（被下魔咒命運恆定），所以我們稱此類魔術為「A+3 的魔咒」。

由以上可知：「A~4A+5」或「A~D+A+2」，的確可作為設計「合取 3 張且首項 A 為任意正整數」之魔咒牌列的通用數學模型。

三、基於二之探索成果，再進一步推演設計「從左右兩端任意合取 N 張牌（N 為 3 以上的任意正整數）且首項 A 為任意正整數」之魔咒牌列的通用數學模型。

延續二的探索結果，進一步藉由以下的推演設計，逐漸完備任意合取 N 張牌（N 為 3 以

上的任意正整數) 且首項 A 為任意正整數) 之魔咒牌列的通用數學模型。

當首項設定為 A 時，牌列前 N 張牌依序為 $A, A+1, A+2, \dots, A+(N-1)$ ，如此除數 D 即可設定為這 N 張牌之和 (既然合取 3 張時，設定除數是由前 3 張 $A, A+1, A+2$ 之和所組成，所以合取 N 張時，當然也可將該牌列前 N 張之和，作為設定除數)，故除數 D 可設定為

$\frac{1}{2}N(2A+N-1) = NA + \frac{N(N-1)}{2}$ 。因此，當 $N=3, 4, 5, 6, 7$ 時所對應的設定除數 D，依序為 $3A+3, 4A+6, 5A+10, 6A+15, 7A+21$ 。

接著要如何來設定後 N 張牌呢？由於後 N 張也是連續整數所組成的數列，只要末項 L 選定正確，該後 N 張必為 $L-(N-1), L-(N-2), \dots, L-1, L$ 。

又如何來設定末項呢？在研究程序二中我們已證實：在合取 3 張時，是以「設定除數 D+起始牌列左端 (首項) A 之牌點+2」之要訣來設定。但在合取張數由 3 變為 N (其中 N 為任意 3 以上的整數) 時，未知此要訣為是否也可適用？目前我們先以此要訣來推估合取牌數 N 為 4、5、6、7 時的末項 (結果依序為 $N=4$ 時， $(4A+6) + A + 2 = 5A+8$ ； $N=5$ 時， $(5A+10) + A + 2 = 6A+12$ ； $N=6$ 時， $(6A+15) + A + 2 = 7A+17$ ； $N=7$ 時， $(7A+21) + A + 2 = 8A+23$)，再進行測試。

涉及末項之取牌方式，最單純的是左端取起始牌列之前 (N-1) 張，再配上 1 張最右端之牌 (末項)，即「左 N-1 右 1」之取牌方式。因此，以上述推估所得末項 (合取 4 張時 $5A+8$ 、合取 5 張時 $6A+12$ 、合取 6 張時 $7A+17$ 、合取 7 張時 $8A+23$)，分別對有關牌列進行「左 N-1 右 1」與「左 N 右 0」之兩種取牌方式。若其最終結果 (指餘牌列之第 $\frac{S}{D}$ 張牌的牌點) 一致，即表示上述所推估之末項正確，否則應再設法修訂。

由於「左 N 右 0」之取牌方式，所取出的牌為該牌列之前 N 張，其牌點總和 S，當然也恰好與其設定除數 D 相等。因此，無論 N 為 3 以上的任何正整數，該牌列之 $\frac{S}{D}$ 必定恆等於 1。又其餘牌列之第 1 張牌為 $A+N$ ，所以其後果 (即餘牌列之第 $\frac{S}{D}$ 張牌) 必為 $A+N$ 。如此，可推知：當合取牌數為 $N=3, 4, 5, 6$ 與 7 時，採用「左 N 右 0」之取牌方式，其後果依序為 $A+3, A+4, A+5, A+6, A+7$ 。

另一方面，以上述推估所得之末項與牌列，進行「左 N-1 右 1」之取牌方式的檢測，結果如下：

表七: 合取牌數 $N=3\sim 7$ 之「左 $N-1$ 右 1」的初檢結果一覽表

合取牌數	3	4	5	6	7
推估之末項	$4A+5$	$5A+8$	$6A+12$	$7A+17$	$8A+23$
推估之牌列	$A\sim 4A+5$	$A\sim 5A+8$	$A\sim 6A+12$	$A\sim 7A+17$	$A\sim 8A+23$
設定除數 D	$3A+3$	$4A+6$	$5A+10$	$6A+15$	$7A+21$
取出之牌點總和 S	$A+(A+1)+ (4A+5)$ $=6A+6$	$A+(A+1)+(A+2)+(5A+8)$ $=8A+11$	$A+(A+1)+(A+2)+(A+3)+(6A+12)$ $=10A+18$	$A+(A+1)+(A+2)+(A+3)+(A+4)+(7A+17)$ $=12A+27$	$A+(A+1)+(A+2)+(A+3)+(A+4)+(A+5)+(8A+23)$ $=14A+38$
原本推估結果 $\frac{S}{D}$	$\frac{6A+6}{3A+3}=2$	$\frac{8A+11}{4A+6} \neq 2$	$\frac{10A+18}{5A+10} \neq 2$	$\frac{12A+27}{6A+15} \neq 2$	$\frac{14A+38}{7A+21} \neq 2$
修訂後推估結果 $\frac{S'}{D}$	無需修訂	但 $\frac{8A+11+1}{4A+6}=2$!	但 $\frac{10A+18+2}{5A+10}=2$!	但 $\frac{12A+27+3}{6A+15}=2$!	但 $\frac{14A+38+4}{7A+21}=2$!
餘牌列	$A+2, \boxed{A+3}, \dots, 4A+4$	$A+3, \boxed{A+4}, \dots, 5A+7$	$A+4, \boxed{A+5}, \dots, 6A+11$	$A+5, \boxed{A+6}, \dots, 7A+16$	$A+6, \boxed{A+7}, \dots, 8A+22$
後果 (餘牌列之第 $\frac{S}{D}$ 張牌)	$A+3$	?	?	?	?

由於當 $N=4、5、6$ 與 7 時，左端所取之 $N-1$ 張牌之牌點必為 $A, A+1, A+2, \dots, A+N-2$ 無誤，所以造成上述 $\frac{S}{D} \neq 2$ ，以致後果無法確定的現象，正是從該起始牌列最右端所取得之唯一的一張牌之牌點（即末項），並非如上述推估所得。但是在上表之 $\frac{S}{D}$ 欄中，我們也發現：當 $N=4,5,6$ 與 7 時，其 S 只要依序比其原有的增加 $1、2、3$ 與 4 ，便都可使得各項 $\frac{S}{D} = 2$ 。又由於在「左 $N-1$ 右 1 」的取牌方式之下，會影響取得之 N 張牌的牌點總和 S 的唯一牌點，就是末項。因此，只要將原先推估的末項，依序添加 $1,2,3$ 與 4 ，便可使得各項 $\frac{S}{D} = 2$ ，所以當 $N=4,5,6$ 與 7 時，其修訂後之起始牌列之末項、 $\frac{S}{D}$ 、餘牌列及後果，可統整如表八。

表八: 合取牌數 $N=4\sim 7$ 之「左 $N-1$ 右 1」的複檢結果一覽表

合取牌數	4	5	6	7
修訂末項	$5A+8 \xrightarrow{+1} 5A+9$	$6A+12 \xrightarrow{+2} 5A+14$	$7A+17 \xrightarrow{+3} 5A+20$	$8A+23 \xrightarrow{+4} 8A+27$
修訂後之牌列	$A \sim 5A+9$	$A \sim 6A+14$	$A \sim 7A+20$	$A \sim 8A+27$
設定除數 D	$4A+6$	$5A+10$	$6A+15$	$7A+21$
取出之牌點總和 S	$8A+12$	$10A+20$	$12A+30$	$14A+42$
$\frac{S}{D}$	2	2	2	2
餘牌列	$A+3, \boxed{A+4}, \dots, 5A+8$	$A+4, \boxed{A+5}, \dots, 6A+13$	$A+5, \boxed{A+6}, \dots, 7A+19$	$A+6, \boxed{A+7}, \dots, 8A+26$
後果	$A+4$	$A+5$	$A+6$	$A+7$

進一步比較「左 N 右 0」與「左 $N-1$ 右 1」兩種取牌方式之後果（如表九），顯示完全吻合，這就表示在表八中新修訂的末項是正確的。

表九: 「左 N 右 0」與「左 $N-1$ 右 1」兩種取牌方式之後果比較

牌列	$A \sim 4A+5$	$A \sim 5A+9$	$A \sim 6A+14$	$A \sim 7A+20$	$A \sim 8A+27$
合取牌數	3	4	5	6	7
左 N 右 0	$A+3$	$A+4$	$A+5$	$A+6$	$A+7$
左 $N-1$ 右 1	$A+3$	$A+4$	$A+5$	$A+6$	$A+7$

由於表九中，合取牌數 $N=3\sim 7$ 的起始牌列的各末項，依序為 $4A+5$ 、 $5A+9$ 、 $6A+14$ 、 $7A+20$ 及 $8A+27$ 。這些末項的前半部（ $4A$ 、 $5A$ 、 $6A$ 、 $7A$ 、 $8A$ ）與後半部（ 5 、 9 、 14 、 20 、 27 ）之各組數據之間，都分別存在有如下面的表十所列的規律關係。因此，我們擬探索這些規律關係，進而建構出可適用於製造「首項 A 為任意正整數，且合取牌數 N 為任意 3 以上的整數之魔咒牌列」的末項要訣（通用算則）。

表十: 起始牌列之末項數據的規律性

合取牌數 N	3	4	5	6	7	$N \geq 3$
末項	$4A+5$	$5A+9$	$6A+14$	$7A+20$	$8A+27$	?
前半	$4A = (3+1)A$	$5A = (4+1)A$	$6A = (5+1)A$	$7A = (6+1)A$	$8A = (7+1)A$	$(N+1)A$
後半	5	$9=5+4$	$14=5+4+5$	$20=5+4+5+6$	$27=5+4+5+6+7$	$5+4+5+6+7+\dots+N = \frac{(N+2)(N-1)}{2}$ * 請參閱說明。
末項通式：前半+後半 $= (N+1)A + \frac{(N+2)(N-1)}{2}$						

顯然當 $N \geq 3$ 時，其末項之前半部可用 $(N+1)A$ 來表示；而末項之後半部，則可用

$5+4+5+6+7+\cdots+N$ 來表示。又 $5+4+5+6+7+\cdots+N=5+\frac{(4+N)(N-3)}{2}=\frac{10+N^2+N-1}{2}=\frac{N^2+N-2}{2}=\frac{(N+2)(N-1)}{2}$ ，故 $N\geq 3$ 時之末項的後半部可簡記為 $\frac{(N+2)(N-1)}{2}$ 。

組合上述前後兩半所得，可得當合取張數 $N\geq 3$ 時，其起始牌列的末項可設定為 $\boxed{(N+1)A}$
 $+\frac{(N+2)(N-1)}{2}$ 。

再進一步比較「起始牌列的末項 L ， $L=(N+1)A+\frac{(N+2)(N-1)}{2}$ 」與「設定除數（指牌列左端前 N 項 $A\sim A+(N-1)$ 之和） $D=NA+\frac{N(N-1)}{2}$ 」之關係， $L=(N+1)A+\frac{(N+2)(N-1)}{2}=NA+A+\frac{N(N-1)}{2}+\frac{2(N-1)}{2}$
 $=NA+A+\frac{N(N-1)}{2}+N-1=(NA+\frac{N(N-1)}{2})+A+N-1=\text{設定除數 } D+\text{首項 } A+\text{合取牌數 } N-1=D+N+A-1$

（*可記誦為 $D, N, A, -1$ ），顯見直接透過易於取得之首項 A 、合取牌數 N 及設定除數 D 等三者之加總，再減去1的差數，就可製造出起始牌列之末項。

參照上述以 D, N, A 設定的牌列 $A\sim D+N+A-1$ ，經任意從牌列左右兩端任意合取 N 張（其中 $N\geq 3$ ），若令這 N 張牌點總和為 S ，且 $Q=\frac{S}{D}$ ，則該對應之剩餘牌列由左而右之第 Q 張的牌點（即後果），是否也都是命定（如從1~9與2~K 兩組牌列左右兩端合取3張之後果，依序為4=1+3與5=2+3，均出現有「首項 A +合取牌數 N 」之魔咒現象）呢？如何證明呢？

1.比較起始牌列之前 N 張牌與後 N 張牌之對應關係

從起始牌列 $A\sim D+N+A-1$ 之左右兩端合取 N 張牌，若逐一考慮取牌之操作先後順序，其取牌方式將有相當多種，但本牌戲僅聚焦在所取出這 N 張牌之牌點總和 S 。因此，只要區分左 n 右0，左 $n-1$ 右1， $\cdots$ ，左1右 $n-1$ ，左0右 n 等 $n+1$ 種方式來檢證即可。

因取牌範圍，僅涉及起始牌列 $A\sim D+N+A-1$ （即 $\boxed{A, A+1, \cdots, A+(N-2), A+(N-1)}$ ，
 $A+N, \cdots, D+A-1, \boxed{D+A, D+A+1, \cdots, D+N+A-2, D+N+A-1}$ ）之前 N 張（ $A, A+1, \cdots, A+(N-2), A+(N-1)$ ）與後 N 張（ $D+A, \cdots, D+N+A-2, D+N+A-1$ ），與介於其間的 $A+N, \cdots, D+A-1$ 等牌無關。進一步將這兩組牌由左而右逐項對比，顯然每一相對位置之牌對的差數均等於 D （如表十一）。

表十一:起始牌列前 n 項與後 n 項之每一組相對位置的牌對之公差關係

後 n 項	$D+A$	$D+A+1$		$D+N+A-2$	$D+N+A-1$
前 n 項	A	$A+1$		$A+(N-2)$	$A+(N-1)$
差數	D	D	D	D	D

2.探索各類取牌方式所出現的有關數據

表十二: 合取 N 張所得點數和 S 及 $\frac{S}{D}=Q$ 之一覽表

取牌方式	牌點總和 S	$\frac{S}{D}=Q$ 之值
「左 N 右 0」 取得之牌: A~A+N-1	D (前 N 張之和)	1
「左 N-1 右 1」 取得之牌: A~ A+N-2 與 (D+N+A-1)	D-(A+N-1) + (D+N+A-1) =2D *對比「左 N 右 0」只差以 (D+N+A-1) 取代 (A+N-1), 顯然其牌點總和, 會比「左 N 右 0」多出一個 D。	2
.....		
「左 x 右 y」(其中 x+y=N) 取得之牌: A~ A+X-1 及 (D+N+A-y)~ (D+N+A-1)	D+yD = (y+1) D *對比「左 N 右 0」只差以 (D+N+A-y)~ (D+N+A-1) 取代 A+X(即 A+N-y)~ A+N-1。而這兩組部分牌列之相對位置的每一牌對, 顯然前者都比後者多出一個 D, 所以「左 x 右 y」取得之牌點和會比「左 N 右 0」, 多出 y 個 D, 也就是 D+yD =(y+1)D	y+1
.....		
左 1 右 N-1 取得之牌: (D+A+1)~ (D+N+A-1) 及 A	D+ (N-1)D=ND *對比「左 N 右 0」只差以 (D+A+1)~ (D+N+A-1) 取代 A+1~A+N-1。而這兩組部分牌列之相對位置的每一牌對, 顯然前者都比後者多出一個 D, 所以「左 1 右 N-1」取得之牌點和會比「左 N 右 0」, 多出(N-1)個 D, 也就是 D+(N-1)D =ND	N
左 0 右 N 取得之牌: (D+A)~ (D+N+A-1)	D+ ND= (N+1) D *對比「左 N 右 0」只差以 (D+A)~ (D+N+A-1) 取代 A~A+N-1。而這兩組部分牌列之相對位置的每一牌對, 顯然前者都比後者多出一個 D, 所以「左 0 右 N」取得之牌點和會比「左 N 右 0」, 多出 N 個 D, 也就是 D+ND =(N+1)D	N+1

3.最終結果

參照表十二之檢測數據, 並列出其對應的餘牌列, 以利考證各類取牌方式之最終結果, 是否都會一致出現魔咒數「A+N」。結果如下:

表十三：各種取牌方式之最終結果一覽表

取牌方式	餘牌列	Q 值(如表十二)	餘牌列第 Q 張牌
左 N 右 0	$A+N \sim D+N+A-1$	1	$A+N$
左 N-1 右 1	$A+N-1 \sim D+N+A-2$	2	$A+N$
.....			
左 x 右 y (其中 $x+y=N$)	$A+x \sim D+N+A-(y+1)$	y+1	從餘牌列之 $A+x$ 數起的第 y+1 張牌為 $A+x+y=A+N$
.....			
左 1 右 N-1	$A+1 \sim D+A$	N	從餘牌列之 $A+1$ 數起的第 N 張牌為 $A+1+N-1=A+N$
左 0 右 N	$A \sim D+A-1$	N+1	從餘牌列之 A 數起的第 N+1 張牌為 $A+(N+1)-1=A+N$

由以上論述及表十三，可證實依據本研究所建構之起始牌列的數學模型---「 $A \sim (D+N+A-1)$ 」之連續正整數數列，D 為該數列前 N 項之和數 $NA + \frac{N(N-1)}{2}$ 。」，對於任意選定之正整數 A（首項）與 3 以上的正整數 N（合取牌數），所設計出的起始牌列 $A \sim (D+N+A-1)$ （*設計牌列流程如圖 1）。歷經操作下列流程（圖 2），其最終所顯現之牌點，必定都是 $A+N$ ，無論起始所選定之 A 及 N 為何。

圖 1:具有魔咒 DNA 的起始牌列之設計流程

- 任意選定一組正整數 A 及 N（但 $N \geq 3$ ）
- 以 $A, A+1, \dots, A+N-1$ 作為起始牌列之前 N 項
- 加總前 N 項之和 $NA + \frac{N(N-1)}{2}$ 稱為 D，作為設定除數
- 計算 $D+N+A-1$ 之值作為末項 L
- 造出一個 $A \sim L$ 之連續正整數的數字卡牌列

當 $N=3$ 時，牌列末項 $L=D+3+A-1=D+A+2$ ，顯然此一建構 DNA 魔術牌列末項之數學模型，也能適用於 $N=3$ （合取 3 張）的情形；但是，在研究程序二（ $N=3$ 且 A 為任意正整數）中所導出的求算牌列末項之算則 $L=D+A+2$ ，並無法推廣至 $N>3$ （合取 4 張以上）的情形。

圖 2:魔咒牌戲之玩法流程

- 依圖 1 流程造出 $A \sim L$ 的數字卡牌列
- 讓玩者任意從牌列左右兩端合取 N 張牌
- 讓玩者加總所取出 N 張牌之點數和稱為 S
- 讓玩者將其 S 除以 D，稱商數為 Q
- 讓玩者指出其剩餘牌列第 Q 張的牌

讓玩者思考「為何同一牌列，取牌方式或取牌先後順序不同，最終在剩餘牌列所指出之牌都是同一牌點？」

以下為針對上述討論所提出的應用與測試

1.以 $A=4, N=6$ 為例,依圖 1 流程所造出之起始排列如下:

選定 $A=4, N=6 \rightarrow$ 前6項: $4 \sim 9 \rightarrow D=4 \sim 9$ 之和 $=39 \rightarrow L=D+N+A-1=39+6+4-1=48 \rightarrow$
 起始牌列: $4 \sim 48$ 的連續正整數數列

2.表列牌列 $4 \sim 48$ ，經圖 2 操作流程，所有可能出現的各項數據（如表十四），以檢驗其最終結果，是否已被魔咒 $A+N=4+6=10$ 所命定。

表十四：牌列 $4 \sim 48$ 經圖 2 操作流程所有可能出現的數據

取牌方式	S	$Q=\frac{S}{D}$	剩餘牌列	最終結果
左 6 右 0	39	1	10~48	10
左 5 右 1	78	2	9~47	
左 4 右 2	117	3	8~46	
左 3 右 3	156	4	7~45	
左 2 右 4	195	5	6~44	
左 1 右 5	234	6	5~43	
左 0 右 6	273	7	4~42	

說明:

1.表中代號 S 表示所選取之 6 張牌的和，除數 D 則是起始牌列前 6 張牌之和 39，最終結果表示剩餘牌列之第 Q 張牌的牌點。

2.由表十四之最右欄，可證實其最終結果，果然被魔咒 $A+N=4+6=10$ （即該魔法牌列之第 $N+1$ 張牌之牌點）所命定。

經過以上一系列討論之後可知，因取牌先後順序與計算所取牌點總和無關，所以合取 N 張牌加總其牌點和 S 時，僅分成「左 x 右 y」之 $N+1$ 種取牌方式來討論，但在不明事理之玩者心目中，可能也會把取牌先後順序納入考慮，以致增進了此一魔咒牌戲之神秘性。至於從 $A \sim D+A+N-1$ 的牌列左右兩端合取 N 張牌時，究竟會有多少種取牌路徑（考慮取牌順序）？以下將進行有關探討。

四、探索從一個魔咒牌列左右兩端任意合取 N 張牌之所有可能的取牌路線總數（取牌先後順序也列入考慮）。

(一)合取 3 或 4, 5 張牌之取牌路線總數

表十五~十七中取牌路線類型欄中之 L_x 表示從牌列左端數起第 x 張牌， R_y 表示從牌列右端數起第 y 張牌。

表十五：合取 3 張牌之取牌路線

合取方式	取牌路線類型	路線數
左 3 右 0	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3$	1
左 2 右 1	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_1$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow L_2$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2$	3
左 1 右 2	$L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_1$	3
左 0 右 3	$R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3$	1
合計		8

表十六：合取 4 張牌之取牌路線

合取方式	取牌路線類型	路線數
左 4 右 0	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow L_4$	1
左 3 右 1	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow R_1$ $L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_1 \rightarrow L_3$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3$	4
左 2 右 2	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_2$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_2$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_2$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_2$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2$	6
左 1 右 3	$L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_1 \rightarrow R_3$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow L_1$	4
左 0 右 4	$R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4$	1
合計		16

表十七：合取 5 張牌之取牌路線

合取方式	取牌路線類型		路線數
左 5 右 0	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow L_4 \rightarrow L_5$		1
左 4 右 1	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow L_4 \rightarrow R_1$ $L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_1 \rightarrow L_3 \rightarrow L_4$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow L_4$	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow R_1 \rightarrow L_4$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow L_4$	5
左 3 右 2	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$ $L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_3$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_2 \rightarrow L_3$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3$	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_1 \rightarrow L_3 \rightarrow R_2$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow R_2$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow R_2$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_2 \rightarrow L_3$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3$	10
左 2 右 3	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_2 \rightarrow R_3$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_2 \rightarrow R_3$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_3$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_1 \rightarrow R_3 \rightarrow L_2$	$L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3$ $L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow L_2$ $R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow L_2$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2$	10
左 1 右 4	$L_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_1 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow L_1$	$R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4$ $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow L_1 \rightarrow R_4$	5
左 0 右 5	$R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow R_5$		1
合計			32

(二) 探討合取牌數與其路線數之規律關係

統整表十五, 表十六, 表十七之數據, 如下表十八。

表十八：合取牌數 N 與對應路線數 P 之規律關係一覽表

合取牌數 N	取牌路線數 P
3	$8=2^3$
4	$16=2^4$
5	$32=2^5$
⋮	⋮
N	$P=2^N$

由表十八不難發現, 合取牌數 N 與其取牌路線總數 P 之間, 似乎存在著 $P=2^N$ 之規律關係。但是如何給出數學上的論證呢?

在探索合取牌數 N 為 3, 4, 5 之各類取牌方式「左 x 右 y」的路線數 $P_{x,y}$ 時, 隱約也感覺到這些數據與「從巴斯卡三角形看數學之美」一文(康軒版國中數學第3冊第52-53頁, 如附件2)中之 $(a+b)^N$ 之各類 $a^x b^y$ 項的係數(或巴斯卡三角形第 N+1 列之第 y+1 項)之間, 好像都存在著一對一的對應關係, 這真是一個值得進一步比對的解題線索。

以下表十九, 表二十, 表二十一依序為 N=3, 4, 5 的對應情形。

表十九：合取牌數 3 之對應情形

取牌方式左 x 右 y (路線數 $P_{x,y}$)	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 之 $a^x b^y$ 的對應項係數	巴斯卡三角形之第 4 列 (1, 3, 3, 1) 之對應數
左 3 右 0 ($P_{3,0} = 1$)	a^3 項的係數 1	1
左 2 右 1 ($P_{2,1} = 3$)	a^2b 項的係數 3	3
左 1 右 2 ($P_{1,2} = 3$)	ab^2 項的係數 3	3
左 0 右 3 ($P_{0,3} = 1$)	b^3 項的係數 1	1

表二十：合取牌數 4 之對應情形

取牌方式左 x 右 y (路線數 $P_{x,y}$)	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ 之 $a^x b^y$ 的對應項係數	巴斯卡三角形第 5 數列 (1, 4, 6, 4, 1) 之對應數
左 4 右 0 ($P_{4,0} = 1$)	a^4 項的係數 1	1
左 3 右 1 ($P_{3,1} = 4$)	a^3b 項的係數 4	4
左 2 右 2 ($P_{2,2} = 6$)	a^2b^2 項的係數 6	6
左 1 右 3 ($P_{1,3} = 4$)	ab^3 項的係數 4	4
左 0 右 4 ($P_{0,4} = 1$)	b^4 項的係數 1	1

表二十一：合取牌數 5 之對應情形

取牌方式左 x 右 y (路線數 $P_{x,y}$)	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ 的對應項係數	巴斯卡三角形第 6 數列 (1,5,10,10,5,1) 之對應數
左 5 右 0 ($P_{5,0} = 1$)	a^5 項的係數 1	1
左 4 右 1 ($P_{4,1} = 5$)	a^4b 項的係數 5	5
左 3 右 2 ($P_{3,2} = 10$)	a^3b^2 項的係數 10	10
左 2 右 3 ($P_{2,3} = 10$)	a^2b^3 項的係數 10	10
左 1 右 4 ($P_{1,4} = 5$)	ab^4 項的係數 5	5
左 0 右 5 ($P_{0,5} = 1$)	b^5 項的係數 1	1

由表十九, 表二十, 表二十一可推知, 從一 DNA 魔法牌列左右兩端任意合取 N 張牌之各類取牌方式「左 x 右 y」的取牌路線數 $P_{x,y}$, 確實依序對應到 $(a+b)^N$ 的展開式之 $a^x b^y$ 項的係數(或巴斯卡三角形第 N+1 列之第 y+1 項)。

基於上述對應關係, 我們可將 $(a+b)^N$ 的展開式記為

$$(a+b)^N = P_{N,0}a^N b^0 + P_{N-1,1}a^{N-1}b^1 + \cdots + P_{1,N-1}a^1b^{N-1} + P_{0,N}a^0b^N。$$

此時我們若令 $a=1, b=1$, 並代入展開式中, 則其所有 $a^x b^y$ 部分都會等於 1, 進而出現 $(1+1)^N = P_{N,0} + P_{N-1,1} + \cdots + P_{1,N-1} + P_{0,N} = P$ (從一 DNA 魔法牌列左右兩端任意合取 N 張牌之路線總數), 也就是 $P=2^N$ 為真。

事實上, 上述論證不僅證明在表十八中所作猜測「 $P=2^N$ 」為真, 也同時證明

「 $(a+b)^N$ 的展開式中各項係數之總和」或「巴斯卡三角形第 N+1 列中之各項數的總和」都會等於 2^N , 例如 $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ 與巴斯卡三角形第 7 列為 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, 其各項係數之總和總和都是 $64=2^6$ 。

肆、研究結果

綜觀上述四個探索活動之主要研究結果，可統整如下：

- 一、經由實作、列表、統整及尋找規律性，發現 Martin Gardner 所提示的 A~9 與 2~K 兩則撲克牌魔咒牌列之魔法設計原理。（請參閱表四及有關說明）
- 二、基於一之研究成果，歷經實作檢測及數學論證，成功建立出設計「首項為任意正整數 A，從牌列左右兩端合取 3 張牌之魔咒牌列」的數學模型：「 $A \sim D+A+2$ （其中 D 為該牌列前 3 項 A、A+1、A+2 之和）」或「 $A \sim 4A+5$ 」。（請參閱表六及有關說明）
- 三、基於二之研究成果，歷經實作初檢、修訂、複檢、尋找規律性及數學推演與論證，進一步成功建立出設計「首項為任意正整數 A，從牌列左右兩端合取 N 張牌（N 為 3 以上之任意整數）之魔咒牌列」的通用數學模型：「 $A \sim D+N+A-1$ （其中 D 為該牌列前 N 項 $A \sim A+N-1$ 之和）」，而且也證實該魔法遊戲之最終結果必會出現 A+N 之魔咒數。（請參閱表六~十三及有關說明）
- 四、先歷經實作、列表統整，探索出在上述 $A \sim D+N+A-1$ 的魔咒牌列中，從左右兩端合取 N 張牌之所有可能的取牌路線總數有 $P=2^N$ 之規律（請參閱表十五~十八及有關說明），進而透過各類取牌方式「左 x 右 y，即左端取 x 張且右端取 y 張，其中 $x+y=N$ 」的取牌路線數 $P_{x,y}$ ，與 $(a+b)^N$ 之展開式中的 $a^x b^y$ 項的係數之「一對一的對等關係」，成功的論證了「在 $A \sim D+N+A-1$ 的魔咒牌列中，從左右兩端合取 N 張牌之所有可能出現的取牌路線總數，的確有 $P=2^N$ 種無誤」（請參閱表十九~二十及其有關推理）。
- 五、由四、五可知：雖然該魔法遊戲在合取 N 張牌時，所有可能的取牌路線總數高達 2^N 種，但其最終結果都會一致出現魔咒數 A+N，所以我們將此類魔法遊戲，命名為「A+N 的魔咒」。

伍、討論

回顧本研究過程中所使用的研究方法，我們可說不斷地在使用簡化問題、窮舉證法、系統性列表統整有關實作結果、尋求有關變項之間的規律性-形成猜測等國小六年級所學的解題策略。而在進一步運用代數化推演與論證的過程中，則經常運用了國中數學所學的代數式四則運算、因式分解、求等差級數之總和的方法；此外，我們也將要在下列之結論中，運用最近所學的函數概念來表達本研究之主要成果。顯然在參與科展的過程中，不僅可體驗探究活動的甘苦與成功樂趣，也會從不同的面向，更豐富我們在國中小所學的數學內涵。

陸、結論

以函數觀點表示本研究之主要成果

為了彰顯本研究標題「建構『DNA 魔咒牌列』的數學模型」之具體意涵，以下將以我們這學期所學的「函數」觀點，來表示本研究之主要成果：

令 A 為任意正整數(可作為牌列之首項)， N 為任意3以上的正整數(可作為從牌列兩端任意合取之牌數)， A 與 N 就是設計本魔咒牌列 ($A \sim D+N+A-1$) 及玩法的主要元素。

選定了 A 及 N 輸入後，便可透過下列三部函數模型機，依序來製造對應的「設定除數 D 」、「牌列的末項 L 」及「魔咒數 M 」。

$$D = f(A, N) = AN + \frac{N(N-1)}{2} \quad (\text{即牌列前 } N \text{ 項之和})$$

$$L = g(A, N) = D + N + A - 1$$

$$M = h(A, N) = A + N$$

此外，我們也可用另一部函數模型機 $P(N) = 2^N$ 來表示「在魔咒牌列 ($A \sim D+N+A-1$) 兩端合取 N 張牌之所有可能出現的路線總數 P 」或「 $(a+b)^N$ 之展開式的各項係數的總和 S 」或「巴斯卡三角形之第 $N+1$ 列之各項數的總和 S 」。

柒、參考資料及其他

1.胡守仁譯 (2004)：打開魔術箱。台北市：遠流。Martin Gardner (2001) .A Gardner's

Workout：Training the Mind and Entertaining the Spirit.

2.康軒 (2024)：國中數學課本第3冊 (頁52-53 「從巴斯卡三角形看數學之美」一文)。台北：康軒。

反顏色的牌。隨便你做多久，當你決定停下時，手中的牌是紅黑交織。請問你手中紅色和黑色牌的個數是否可能相同？除非你想到奇偶性校驗，否則還真不容易證明答案是「不可能」。因為每一步驟結束後，你手中的牌數都是奇數，兩種顏色當然不可能相等。

魔術師發現了下面這件奇妙的事情。把A到9依序排成一列，A在最左。從任何一端移走一張牌，再從任何一端拿走一張牌，接著從任何一端移走第三張牌。將此三張牌的點數相加除以6，得到的商數姑且稱為 n ，則由左至右數過來第 n 張牌，一定是4。

我留給讀者自行思考箇中原因，或許還可以推廣到更長的數列上。例如用十二張牌（2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K）排成一列，在任何一端移走一張牌共計三次，把點數相加除以9，得數 n 。由左至右數第 n 張牌必為5。

還有一個紙牌遊戲差不多有二百年的歷史，即把所有十六張A、K、Q、J排成正方形陣列，且點數相同或花色相同的牌不會同時出現在同一行、同一列或同一對角線上。

要算出到底有幾種不同的排列方式並非易如反掌。波爾在他的經典著作《數學遊戲及小品》中提及，不計旋轉及鏡射的結果將有七十二個基本解，其實波爾錯了，然而這個錯誤持續了十一版之久，直到柯克斯特修訂後才改正過來。曾任曼徹斯特市長的英國著名數學家歐勒倫蕭女士發現基本答案應該是144個，若包含旋轉及鏡射的結果共計 $8 \times 144 = 1152$ 。

最近她在為視障人士所寫的一篇文章中提出了一個簡單的方法可以產生所有的結果（歐勒倫蕭女士由於年事已高，視力漸衰，因此正積極學習點字），她的方法如下：把正方陣中的方格由左至右、由下而上依序從1標示到16，並在位置1上任意放置一張牌，比方說黑桃A。而第二個A（例如紅心A）放在第二列，不能和黑桃A在同行或

