

屏東縣第 66 屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：斜「槓」下的「砝」則

關 鍵 詞：天平、砝碼、規律（最多三個）

編號：A1001

斜「槓」下的「砝」則

摘要

在自然和數學的學習當中，都曾提到槓桿原理和天平的使用。不過以數學來說，會將焦點集中於等臂天平的概念處理，對於不等臂天平的使用與介紹，則較為缺乏。此次研究主要是以砝碼為主題，討論如何利用有限的砝碼數，配合數學學過的規律問題，組合出最大且連續的正整數。接著透過找出的砝碼可能組合，討論在不等臂天平時，如何驗證物體的正确質量。希望透過這樣的討論，學生可以更加活用槓桿原理來解決問題，並對多變的砝碼組合有更多的認識。

壹、前言

一、研究動機



(圖片來源: <https://blog.udn.com/Automing/150890532>)

數學家阿基米德曾經說過：「給我一個支點及一個夠長的棍子，便可以把地球舉起來。」，這看似荒謬的發言，卻帶動了槓桿原理的發展。直到現在，除了自然課有提到相關概念外，我們發現生活所見的天平，亦是槓桿原理的應用。但令我們好奇的是，生活中常見的是等臂天平，一旦改成長度不同的不等臂天平時，能否用不一樣的砝碼連續組合，找出物體的真实質量？於是在老師的指導下，我們試著找出砝碼連續組合的可能性及隱藏的規律性，並

探討在不等臂天平上的呈現，希望可以發現更多不同以往的觀點。

二、研究目的

(一)在不同質量砝碼只能用一枚的情況下，用最少的砝碼數找出連續正整數的組合規律。

(二)針對具特殊規律的砝碼組合，在砝碼可重覆使用的情況下，用最少的砝碼數找出連續正整數的組合情況。

(三)針對特殊規律的砝碼組合，放置到不等臂天平時，思索能否驗證物體的真實質量。

貳、研究設備及器材

紙、筆、計算機

參、研究過程或方法

一、研究方法

自然與數學對於天平的說明，只用「平衡」代表「左右兩邊的重量相同」的觀念帶過，但鮮少提及不等臂天平的概念。我們希望透過這次的分析，找出用最少的砝碼數，組合出連續正整數的可能性，並尋找其規律。為讓學生在操作上更加方便，我們設定以下限制，避免學生計算上出現吃力的情況。

(一)無論砝碼是否可重覆使用，連續正整數的驗證範圍為 $1\sim 40$ ，以此推算應用到的砝碼的最大組合數值。

(二)不等臂天平的力臂長度最小從 $1:2$ 開始，扣掉相等的比、左右交換視為同組的情況，最大情況討論到 $9:10$ ，質量的驗證範圍也是 $1\sim 40$ 。

二、研究過程

在決定好上述限制後，我們將以此為基礎，分別找出

(一)用最少的砝碼數找出連續正整數的組合情況及規律。

(二)在不等臂天平上，驗證物體的真實質量，並找出應用範圍內的可能砝碼組合。

希望如同阿基米德找出假皇冠的結果，我們也能找出不等臂天平下，所存在的砝碼法則，進而能更加活用槓桿原理解決問題。

肆、研究結果

一、不同質量砝碼只用一枚，以有限的砝碼數找出連續正整數的組合規律及最大值情況

首先在這個區塊中，我們將針對可能的砝碼組合進行討論。由於限定不同質量砝碼只能使用一枚，在驗證範圍為 1~40 之間，可能的砝碼組合如下：

砝碼組合	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.....,35,36,37,38,39,40
砝碼數	40
組合最大	820

這類組合的最大優勢，是不需擔心會有數字對應不到，砝碼可以放在同一盤即可，組合最大值也最大，但需準備的砝碼數過多，這和我們追求有限的砝碼數找出連續正整數的組合，還有一段差距。

砝碼組合	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.....,17,18,19,20,21									
組合型式	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		1+21	2+21	3+21	4+21	5+21	6+21	7+21	8+21	9+21
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	10+21	11+21	12+21	13+21	14+21	15+21	16+21	17+21	18+21	19+21
砝碼數	21									
組合最大	231									

這類組合的優勢，若最大目標為偶數，只需「最大目標數的一半+1」枚的砝碼，若最大目標為奇數，只需「最大目標數的一半，採無條件進入到個位」的砝碼數，且砝碼可以放在同一盤，但需準備的砝碼數仍然過多，距離追求的目標仍有改善空間。

砝碼組合	1,2,4,8,16,32 (2^k 型式， k 為 ≥ 0 的整數)						
組合型式	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	1+2	4	1+4	2+4	1+2+4
	8	9	10	11	12	13	14
	8	1+8	2+8	1+2+8	4+8	1+4+8	2+4+8

	15	16	17	18	19	20	21
	1+2+4+8	16	1+16	2+16	1+2+16	4+16	1+4+16
	22	23	24	25	26	27	28
	2+4+16	1+2+4+16	8+16	1+8+16	2+8+16	1+2+8+16	4+8+16
	29	30	31	32	33	34	35
	1+4+8+16	2+4+8+16	1+2+4+8+16	32	1+32	2+32	1+2+32
	36	37	38	39	40		
	4+32	1+4+32	2+4+32	1+2+4+32	8+32		
砒碼數	6						
組合最大	63						

我們可以發現，這一項的組合方式，後一枚砵碼的重量是前一枚的 2 倍，砵碼可以放在同一盤。雖然組合的最大值沒有前幾項來得高，但使用的砵碼數卻是接近設定的目標。

砵碼組合	1,3,9,27 (3 ^k 型式，k 為 ≥0 的整數)						
組合型式	1	2	3	4	5	6	7
	1	3-1	3	1+3	9-3-1	9-3	1+9-3
	8	9	10	11	12	13	14
	9-1	9	1+9	3+9-1	3+9	1+3+9	27-1-3-9
	15	16	17	18	19	20	21
	27-9-3	1+27-3-9	27-1-9	27-9	1+27-9	3+27-9-1	3+27-9
	22	23	24	25	26	27	28
	1+3+27-9	27-1-3	27-3	1+27-3	27-1	27	1+27
	29	30	31	32	33	34	35
	3+27-1	3+27	1+3+27	9+27-3-1	9+27-3	1+9+27-3	9+27-1
	36	37	38	39	40		
	9+27	1+9+27	3+9-1+27	3+9+27	1+3+9+27		
砵碼數	4						

組合最大	40
------	----

這一組的組合中，後一枚砝碼的重量是前一枚的 3 倍，但砝碼必須視情況分兩盤放。組合的最大值是現階段找出中最低的狀況，但使用的砝碼數卻也是最接近設定的目標。

砵碼組合	1,2,3,5,8,13,21(費式數列形式)						
組合型式	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	1+3	5	1+5	2+5
	8	9	10	11	12	13	14
	8	1+8	2+8	3+8	1+3+8	13	1+13
	15	16	17	18	19	20	21
	2+13	3+13	1+3+13	5+13	1+5+13	2+5+13	21
	22	23	24	25	26	27	28
	1+21	2+21	3+21	1+3+21	5+21	1+5+21	2+5+21
	29	30	31	32	33	34	35
	8+21	1+8+21	2+8+21	3+8+21	1+3+8+21	13+21	1+13+21
	36	37	38	39	40		
	2+13+21	3+13+21	1+3+13+21	5+13+21	1+5+13+21		
砵碼數	7						
組合最大	53						

這一項的組合裡，後一枚砝碼是前兩枚砝碼的總和，砝碼可以放在同一盤，亦可不同盤，但砝碼數並沒有比 2^k 型式或 3^k 型式來得少，是可惜之處。

砝碼組合	2,3,6,12,24(後項 = 2 倍前項，不含首項 2)						
組合型式	1	2	3	4	5	6	7
	3-2	2	3	6-2	2+3	6	3+6-2
	8	9	10	11	12	13	14
	2+6	3+6	12-2	2+12-3	12	3-2+12	2+12
	15	16	17	18	19	20	21

	3+12	6-2+12	2+3+12	6+12	3+6-2+12	2+6+12	3+6+12
	22	23	24	25	26	27	28
	24-2	2+3+6+12	24	3-2+24	2+24	3+24	6-2+24
	29	30	31	32	33	34	35
	2+3+24	6+24	3+6-2+24	2+6+24	3+6+24	12+24-2	12+2-3+24
	36	37	38	39	40		
	12+24	3-2+12+24	2+12+24	3+12+24	6-2+12+24		
砵碼數	5						
組合最大	47						

這一項的組合裡，扣掉首項 2 的狀況，後一項相當於 2 倍的前項，但砵碼必須視情況分兩盤放，雖然組合出的最大值比 3^k 型式來得大，但砵碼數並沒有比較少。

上述 6 種狀況是屬於存在規律的砵碼組合，若不考慮規律狀況，根據網路查到的資料，還可以有以下的組合表現：(因沒有規律可呈現，只列出參考，不討論其組合數和最大值)

砵碼組合表現 (無明顯規律)	1,2,6,8,10.....	2,3,5,7,11,13.....	3,4,6,11,28,75.....
-------------------	-----------------	--------------------	---------------------

透過上面分析，我們可以發現以下狀況：

(一)組合方式非常多種，而且 1,2 並非砵碼連續組合務必存在的條件

(二)只思考達到目標數字的情況下，若只能放同一盤， 2^k 型式的砵碼為使用最少的組合。若必須分兩盤放， 3^k 型式的砵碼為使用最少的組合。

(三)對 2^k 型式的砵碼和 3^k 型式的砵碼來說，若由小到大、取用的砵碼數相同時， 3^k 型式的砵碼能組合出的最大值比 2^k 型式的砵碼組合最大值來得更大。

以上為此階段的討論狀況。

二、每種砵碼可重覆使用，以有限的砵碼數找出連續正整數的組合規律及最大值情況

接著在這個區塊裡，我們會討論到砵碼可重覆使用的情況，再針對特殊規律的砵碼組合，討論類似且可重覆使用的砵碼組合情形，並找出隱藏的規律。

在前面討論過的特殊規律砵碼中，有兩組最為特別，分別是 2^k 型式和 3^k 型式的砵碼。我

們不禁思考，當次方數的底數大於 3 時，是否也可組合出連續正整數？若可以的話，又需具備什麼樣的條件？於是我們分別以 $4^k \sim 7^k$ 型式的砝碼進行 1~40 之間的組合討論，再推導到類似情況。

砵碼組合	1 x 2，4 x 2，16 x 2 (4 ^k 型式，k 為≥0 的整數，後方數字為該重量所需枚數)						
組合型式	1	2	3	4	5	6	7
	1	1 x 2	4-1	4	1+4	1 x 2+ 4	4 x2 -1
	8	9	10	11	12	13	14
	4 x 2	4 x 2 +1	4x2 +1x2	16-4-1	16-4	16+1-4	16-1 x 2
	15	16	17	18	19	20	21
	16-1	16	16+1	16+1 x 2	16+4-1	16+4	16+4+1
	22	23	24	25	26	27	28
	16+4+1x2	16+4x2-1	16+4x2	16+4x2 +1	16+4x2 +1x2	16x2-4-1	16x2-4
	29	30	31	32	33	34	35
	16x2-4+1	16x2-1x2	16x2-1	16x2	16x2+1	16x2+1x2	16x2+4-1
	36	37	38	39	40		
	16x2+4	16x2+4+1	16x2+4 +1x2	16x2 +4x2-1	16x1+4x2		
砵碼數	6						
組合最大	42						

對 4^k 型式砝碼來說，因為沒有 2、3 的數字成份，所以砝碼必須重覆使用，且必須視情況分兩盤放。為湊成連續正整數，其各種砝碼所需數量 = 底數 4 的一半。

砝碼組合	$1 \times 2, 5 \times 2, 25 \times 2$ (5^k 型式, k 為 ≥ 0 的整數, 後方數字為該重量所需枚數)						
組合型式	1	2	3	4	5	6	7
	1	1×2	$5-1 \times 2$	$5-1$	5	$5+1$	$5+1 \times 2$
	8	9	10	11	12	13	14
	$5 \times 2-1 \times 2$	$5 \times 2-1$	5×2	$5 \times 2+1$	$5 \times 2+1 \times 2$	$25-5 \times 2-1 \times 2$	$25-5 \times 2-1$

	15	16	17	18	19	20	21
	25-5x2	25-5x2+1	25-5x2+1x2	25-5-1x2	25-5-1	25-5	25-5+1
	22	23	24	25	26	27	28
	25-5+1x2	25-1x2	25-1	25	25+1	25+1x2	25+5-1x2
	29	30	31	32	33	34	35
	25+5-1	25+5	25+5+1	25+5+1x2	25+5x2-1x2	25+5x2-1	25+5x2
	36	37	38	39	40		
	25+5x2+1	25+5x2+1x2	25x2-5x2-1x2	25x2-5x2-1	25x2-5x2		
砵碼數	6						
組合最大	62						

對 5^k 型式砵碼來說，因為沒有 2、3、4 的數字成份，所以砵碼必須重覆使用，且必須視情況分兩盤放。為湊成連續正整數，其各種砵碼所需數量 = 「底數 5 的一半」再無條件捨去到個位。和 4^k 型式比較，取用砵碼數相同時，組合的最大值也更大。

砵碼組合	1 x 3, 6x 3, 36x 3 (6^k 型式, k 為 ≥ 0 的整數, 後方數字為該重量所需枚數)						
組合型式	1	2	3	4	5	6	7
	1	1x2	1x3	6-1x2	6-1	6	6+1
	8	9	10	11	12	13	14
	6+1x2	6+1x3	6x2-1x2	6x2-1	6x2	6x2+1	6x2+1x2
	15	16	17	18	19	20	21
	6x2+1x3	6x3-1x2	6x3-1	6x3	6x3+1	6x3+1x2	6x3+1x3
	22	23	24	25	26	27	28
	36-6x2-1x2	36-6x2-1	36-6x2	36-6x2+1	36-6x2+1x2	36-6-1x3	36-6-1x2
	29	30	31	32	33	34	35
	36-6-1	36-6	36-6+1	36-6+1x2	36-6+1x3	36-1x2	36-1
	36	37	38	39	40		

	36	36+1	36+1x2	36+1x3	36+6-1x2		
砵碼數	7(1~40 間只需一枚 36 的砵碼)				9		
組合最大	57				129		

對 6^k 型式砵碼來說，因為沒有 2、3、4、5 的數字成份，所以砵碼必須重覆使用，且必須視情況分兩盤放。為湊成連續正整數，其各種砵碼所需數量 = 底數 6 的一半。在 1~40 之間，組合最大值介於 4^k 型式和 5^k 型式的組合最大值之間。

砵碼組合	1 x 3，7x 3，49x 3 (7 ^k 型式，k 為≥0 的整數，後方數字為該重量所需枚數)						
組合型式	1	2	3	4	5	6	7
	1	1x2	1x3	7-1x3	7-1x2	7-1	7
	8	9	10	11	12	13	14
	7+1	7+1x2	7+1x3	7x2-1x3	7x2-1x2	7x2-1	7x2
	15	16	17	18	19	20	21
	7x2+1	7x2+1x2	7x2+1x3	7x3-1x3	7x3-1x2	7x3-1	7x3
	22	23	24	25	26	27	28
	7x3+1	7x3+1x2	7x3+1x3	49-7x3-1x3	49-7x3-1x2	49-7x3-1	49-7x3
	29	30	31	32	33	34	35
	49-7x3+1	49-7x3+1x2	49-7x3+1x3	49-7x2-1x3	49-7x2-1x2	49-7x2-1	49-7x2
	36	37	38	39	40		
	49-7x2+1	49-7x2+1x2	49-7x2+1x3	49-7-1x3	49-7-1x2		
砵碼數	7(1~40 間只需一枚 49 的砵碼)			9			
組合最大	73			171			

對 7^k 型式砵碼來說，因為沒有 2~6 的數字成份，所以砵碼必須重覆使用，且必須視情況分兩盤放。為湊成連續正整數，其各種砵碼所需數量 = 「底數 7 的一半」再無條件捨去到個位。其組合最大值，也是 4 組砵碼中最大的。

透過上面分析，我們可以發現以下狀況：

(一) n^k 形式的砝碼($n > 1, k \geq 0, n、k$ 皆整數)，除 $2^k、3^k$ 型式的砝碼不需重覆外，其餘形式的砝碼皆需重覆使用，才能湊出連續正整數組合。

(二) n^k 形式的砝碼($n > 1, k \geq 0, n、k$ 皆整數)，若 n 為偶數，各種砝碼所需數量=「底數 n 的一半」；若 n 為奇數，各種砝碼所需數量=「底數 n 的一半」再無條件捨去到個位。

(三) n^k 形式的砝碼($n > 1, k \geq 0, n、k$ 皆整數)，其砝碼數受限於連續正整數的最大值影響，有時會出現「 n 越大不代表組合最大值就越大」的情況。

以上為此階段的討論狀況。

三、針對特殊規律的砝碼組合，放置到不等臂天平時，能否驗證物體的真實質量

前面的討論中，我們都是針對等臂天平為主，進行砝碼的連續組合。接下來這個區塊，我們將延伸到不等臂天平，觀察特殊規律的砝碼組合，是否可驗證物體的真實質量。為了方便討論，我們設定以下條件：

(一)同一質量的砝碼只能使用一次

(二)不等臂天平的力臂長度最小從 $1:2$ 開始，扣掉相等的比、左右交換視為同組的情況，最大情況討論到 $9:10$ ，質量的驗證範圍也是 $1\sim40$ 。

(三)特殊規律的砝碼組合以 $2^k、3^k$ 型式的砝碼為主(在限定範圍內，是使用砝碼數最少的組合，且符合「同一質量的砝碼只能使用一次」的條件。)

希望透過這樣的討論，可以找出特殊規律的砝碼，對應到各種形式的不等臂天平，進而讓物體的真實質量得到驗證，挖掘出更多的樂趣。

但我們很快可以發現， 3^k 型式的砝碼，放置在臂長比 $1:3$ 的不等臂天平，要測試 $7g$ 重量的物品時，是怎樣都無法找出平衡的式子，代表 3^k 型式的砝碼無法對應到所有形式的天平，或許和 3^k 型式的砝碼必須視情況分兩盤放有關聯。以下討論將集中於 2^k 型式的砝碼為主：

*紅色為待驗證質量之物品,黑色為砝碼(一種質量只列出一種放法，證明砝碼可用)

*網底顏色說明：

白色(使用總砝碼數為 3 枚以下)

黃色(使用總砝碼數為 4 枚)

藍色(使用總砝碼數為 5 枚以上)

橘色(使用的砝碼有超過三位數以上的重量)

兩種顏色兼具(代表同時具有上述顏色的呈現狀況)

1.左臂長：右臂長 = 1:2

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
2	1	16+2	9	17+1	8+1	32+16+2	25	64+2	33
2	1	10	1+4	18	8+1	26	8+4+1	34	16+1
3+1	2	11+1	2+4	19+1	8+2	27+4+1	16	35+1	16+2
4	2	12	2+4	20	8+2	28	8+4+2	36	16+2
2+8	5	16+8+2	13	32+8+2	21	29+2+1	16	64+8+2	37
6	1+2	14	1+2+4	22	8+2+1	30+2	16	38	16+2+1
7+1	4	15+1	8	23+1	8+4	31+1	16	39+1	16+4
8	4	16	8	24	8+4	32	16	40	16+4

2.左臂長：右臂長 = 1:3

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
2+1	1	9	1+2	17+1	4+2	25+2	8+1	33	8+2+1
4+2	2	10+2	4	18	4+2	26+4	8+2	34+2	8+4
3	1	11+1	4	19+32	16+1	27	8+1	35+1	8+4
8+4	4	12	4	20+4	8	28+32	16+4	36	8+4
5+1	2	13+2	4+1	21	4+2+1	29+1	8+2	37+2	8+4+1
6	2	32+8+2	14	22+2	8	30	8+2	38+64	32+2
16+4+1	7	15	4+1	23+1	8	31+64+1	32	39	8+4+1
16+8	8	32+16	16	24	8	64+32	32	40+8	16

3.左臂長：右臂長 = 1:4

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
4	1	32+4	9	64+8	17+1	64+32+4	25	128+4	33
8	2	32+8	10	18+2	4+1	26+4+2	8	34+2	8+1

8+4	3	32+8+4	11	64+8+4	19	27+4+1	8	128+8+4	35
4	1	12	2+1	20	4+1	28	4+2+1	36	8+1
16+4	5	13+2+1	4	64+16+4	21	29+2+1	8	128+16+4	37
16+8	6	14+2	4	64+16+8	22	30+2	8	128+16+8	38
16+8+4	7	15+1	4	23+1	4+2	31+1	8	39+1	8+2
8	2	16	4	24	4+2	32	8	40	8+2

4.左臂長：右臂長 = 1:5

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
4+1	1	9+1	2	17+2+1	4	25	4+1	33+16+1	8+2
8+2	2	10	2	18+2	4	26+64	16+2	34+16	8+2
3+2	1	11+4	2+1	19+1	4	27+8	4+2+1	35	4+2+1
16+4	4	12+8	4	20	4	28+32	8+4	36+4	8
5	1	64+1	13	21+64	16+1	29+1	4+2	37+2+1	8
6+4	2	64+4+2	14	22+8	4+2	30	4+2	38+2	8
7+8	2+1	15	2+1	23+2	4+1	128+32	31+1	39+1	8
32+8	8	64+16	16	24+16	8	128+32	32	40	8

5.左臂長：右臂長 = 1:6

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
4+2	1	11+1	2	21+2+1	4	31+64+1	16
8+4	2	12	2	22+2	4	32+64	16
16+2	3	64+8+4+2	13	23+1	4	128+64+4+2	33
4+2	1	14+4	2+1	24	4	34+8	4+2+1
32+4	5+1	15+8+1	4	128+16+4+2	25	35+1	4+2
6	1	16+8	4	26+16	4+2+1	36	4+2
7+4+1	2	64+32+4+2	17	27+8+1	4+2	37+32+2+1	8+4
8+4	2	18	2+1	28+8	4+2	38+16	8+1

32+16+4+2	9	19+16+1	4+2	29+16+2+1	8	39+32+1	8+4
10+8	2+1	20+16	4+2	30	4+1	40+32	8+4

6.左臂長：右臂長 = 1:7

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
4+2+1	1	11+16+1	4	21	2+1	31+32	8+1
8+4+2	2	12+16	4	22+32+2	8	128+64+32	32
3+4	1	13+1	2	23+32+1	8	33+16	4+2+1
16+8+4	4	14	2	24+32	8	34+8	4+2
5+2	1	64+32+8+1	15	25+8+2	4+1	35	4+1
6+8	2	64+32+16	16	26+16	4+2	36+16+4	8
7	1	17+4	2+1	27+1	4	37+16+2+1	8
32+16+8	8	18+8+2	4	28	4	38+16+2	8
9+4+1	2	19+16	4+1	29+32+2	8+1	39+16+1	8
10+4	2	20+8	4	128+64+16+2	30	40+16	8

7.左臂長：右臂長 = 1:8

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
8	1	11+4+1	2	128+32+8	21	31+1	4
16	2	12+4	2	128+32+16	22	32	4
16+8	3	64+32+8	13	128+32+16+8	23	256+8	33
32	4	64+32+16	14	24	2+1	256+16	34
32+8	5	15+1	2	128+64+8	25	256+16+8	35
32+16	6	16	2	128+64+16	26	256+32	36
32+16+8	7	128+8	17	128+64+16+8	27	256+32+8	37
8	1	128+16	18	128+64+32	28	38+2	1+4
64+8	9	128+16+8	19	29+2+1	4	39+1+8	2+4
64+16	10	20+4	2+1	30+2	4	40	4+1

8.左臂長：右臂長 = 1:9

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
8+1	1	11+16	2+1	21+32+1	4+2	31+32	4+2+1
16+2	2	12+16+8	4	22+32	4+2	256+32	32
3+4+2	1	13+4+1	2	23+4	2+1	33+2+1	4
4+32	4	14+4	2	128+64+16+8	24	34+2	4
5+4	1	15+8+4	2+1	25+8+2+1	4	35+1	4
6+8+4	2	128+16	16	26+8+2	4	36	4
7+2	1	17+1	2	27	2+1	37+16+1	4+2
8+64	8	18	2	28+8	4	38+16	4+2
9	1	19+8	2+1	29+16	4+1	39+32+1	8
10+8	2	20+16	4	256+8+4+2	30	40+32	8

9.左臂長：右臂長 = 1:10

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
8+2	1	11+8+1	2	128+64+16+2	21	31+8+1	4
16+4	2	12+8	2	22+8	2+1	32+8	4
3+1+16	2	128+2	13	23+16+1	4	256+64+8+2	33
4+16	2	14+16	2+1	24+16	4	34+16	4+1
32+16+2	5	15+4+1	2	256+4	25+1	35+64+1	8+2
6+4	1	16+4	2	26+4	2+1	36+64	8+2
64+4+2	7	128+32+8+2	17	27+32+1	4+2	37+2+1	4
8+2	1	18+32	4+1	28+32	4+2	38+2	4
64+16+8+2	9	19+1	2	256+32+2	29	39+1	4
10	1	20	2	30	2+1	40	4

10.左臂長：右臂長 = 2:3

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
----	----	----	----	----	----	----	----

1+8	2+4	11+1	8	21	8+4+2	32+16	31+1
2+1	2	12	8	32+1	22	32+16	32
3	2	16+8	13+2+1	23+1	16	33	16+4+2
8+1	4+2	16+8	14+2	24	16	34+2	16+8
5+1	4	16+8	15+1	25+8	16+4+2	35+1	16+8
6	4	16+8	16	26+1	16+2	36	16+8
8+4	7+1	17+1	8+4	27	16+2	37+16+1	32+4
8+4	8	18	8+4	32+8+2	28	38+16	32+4
9	4+2	19+8	16+2	29+1	16+4	39	16+8+2
10+2	8	32+1	20+2	30	16+4	40+8	32

11.左臂長：右臂長 = 2:5

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+4	2	32+8	11+4+1	21+4	8+2	64+16	31+1
1+4	2	32+8	12+4	64+1	22+4	64+16	32
8+2	3+1	13+32	16+2	64+16	23+8+1	33+4+2+1	16
8+2	4	32+2+1	14	64+16	24+8	34+4+2	16
5	2	15	4+2	25	8+2	35	8+4+2
16+4	6+2	32+8	16	64+1	26	36+4	16
16+4	7+1	17+2+1	8	64+16	27+4+1	37+2+1	16
16+4	8	18+2	8	64+16	28+4	38+2	16
9+1	4	19+1	8	29+1	8+4	39+1	16
10	4	20	8	30	8+4	40	16

12.左臂長：右臂長 = 2:7

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+32+16	8+4+2	11+16+1	8	21	4+2	31+4	8+2
4+2+1	2	12+16	8	22+4+2	8	64+32+16	32

3+4	2	13+1	4	23+4+1	8	33+16	8+4+2
8+4+2	4	14	4	24+4	8	34+1	8+2
5+8+1	4	32+16+8	15+1	25+2+1	8	35	8+2
6+1	2	32+16+8	16	26+2	8	128+4+1	36+2
7	2	17+32	8+4+2	27+1	8	128+8+4	37+2+1
8+16+4	8	18+16+1	8+2	28	8	128+4+1	38
9+16+2+1	8	19+16	8+2	64+32+16	29+2+1	39+2+1	8+4
10+16+2	8	20+1	4+2	30+4+1	8+2	40+2	8+4

13.左臂長：右臂長 = 2:9

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+16+1	4	11+16	4+2	21+32+1	8+4	31+4+1	8
8+1	2	64+8	12+4	22+32	8+4	32+4	8
16+2	3+1	64+8	13+2+1	128+16	23+8+1	33+2+1	8
16+2	4	64+8	14+2	128+16	24+8	34+2	8
5+4	2	15+2+1	4	25+16+4	8+2	35+1	8
32+4	6+2	16+2	4	26+1	4+2	36	8
32+4	7+1	17+1	4	27	4+2	37+16+1	8+4
32+4	8	18	4	128+16	28+4	38+16	8+4
9	2	19+8	4+2	29+4+2+1	8	39+32+1	16
10+8	4	20+16	8	30+4+2	8	40+32	16

14.左臂長：右臂長 = 3:4

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
4	1+2	16	11+1	16+8+4	21	31+1	16+8
4	2+1	12	8+1	32	22+2	32	16+8
4	3	16+4	13+2	32	23+1	32+8+4	33
4	2+1	16+4	14+1	32	24	32+16	34+2

8	5+1	16+4	15	32+4	25+2	32+16	35+1
8	6	16	8+4	32+4	26+1	32+16	36
7+1	4+2	16+8	17+1	32+4	27	64+8	37+16+1
8	4+2	16+8	18	28	16+4+1	64+8	38+16
8+4	9	16+8+4	19+2	32+8	29+1	32+16+4	39
10+2	8+1	20	8+4+2+1	32+8	30	40+4	32+1

15.左臂長：右臂長 = 3:5

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
4+1	1+2	16+4	11+1	32+2+1	21	64+1	31+8
8+2	2+4	16+4	12	22+8	16+2	128+32	32+64
4+1	3	13+2	8+1	32+8	23+1	33+2	16+4+1
4+16	8+4	14+64+2	32+16	32+8	24	34+4+2	16+8
5	2+1	15	8+1	25+4+1	16+2	35	16+4+1
8+2	6	16+64	32+16	26+4	16+2	36+4	16+8
7+32+1	16+8	32+2+1	17+4	32+8+4+1	27	64+1	37+2
8+32	16+8	18+2	8+4	128+32	28+64+4	38+2	16+8
9+1	4+2	19+1	8+4	29+1	16+2	39+1	16+8
10	4+2	20	8+4	30	16+2	40	16+8

16.左臂長：右臂長 = 3:7

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+16+4	8+1	16+8+4	11+1	21	8+1	64+8+4+1	31+2
32+8+2	2+16	16+8+4	12	32+16+8	22+2	512+128+32	32+256
4+2+1	3	13+1	4+2	32+16+8	23+1	64+16+4	33+2+1
64+16+4	4+32	14	4+2	32+16+8	24	64+16+4	34+2
5+16	8+1	15+4+2	8+1	25+2+1	8+4	64+16+4	35+1
8+4+2	6	256+64+16	16+128	26+2	8+4	64+16+4	36

7	2+1	17+4	8+1	27+1	8+4	37+4+1	16+2
128+32+8	8+64	32+8+2	18	28	8+4	38+4	16+2
16+4+1	9	19+2	8+1	64+4+2	29+1	64+16+8+2+1	39
10+16+2	8+4	32+16+8	20+4	64+4+2	30	64+32+16	40+8

17.左臂長：右臂長 = 3:8

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
8	1+2	32	11+1	32+16+8	21	31+1	8+4
8	2+1	32	12	22+2	8+1	32	8+4
8	3	32+8	13+2	64	23+1	64+16+8	33
4+4	2+1	32+8	14+1	64	24	64+32	34+2
16	5+1	32+8	15	64+8	25+2	64+32	35+1
16	6	16	4+2	64+8	26+1	64+32	36
16+8	7+2	32+16	17+1	64+8	27	64+32+8	37+2
8	2+1	32+16	18	64+16	28+2	64+32+8	38+1
16+8	9	32+16+8	19+2	64+16	29+1	64+32+8	39
32	10+2	20+4	8+1	64+16	30	40+8	16+2

18.左臂長：右臂長 = 3:10

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
256+8+4+2	1+64+16	32+8	11+1	64+4+2	21	128+2	31+8
2+128	32+4+2+1	32+8	12	64+16	22+2	32+128	32+16
8+2	3	64+4+2	13+8	64+16	23+1	64+32+8+4+2	33
4+16	4+2	32+16+2	14+1	64+16	24	64+32+16+8	34+2
16+4	5+1	32+16+2	15	128+8+4	25+16+1	64+32+16+8	35+1
16+4	6	16+64	16+8	26+4	8+1	64+32+16+8	36
32+16+2	7+8	32+16+8+4	17+1	64+16+8+2	27	37+2+1	8+4
32+8	8+4	32+16+8+4	18	28+2	8+1	38+2	8+4

16+8+4+2	9	19+1	4+2	64+32+4	29+1	39+1	8+4
10	2+1	20	4+2	64+32+4	30	40	8+4

19.左臂長：右臂長 = 4:5

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+64	32+16+4	11+8+1	16	21+16+2+1	32	32+8	31+1
4+1	2+2	12+8	16	22+16+2	32	32+8	32
3+2	4	13+2	8+4	23+16+1	32	33+16+1	32+8
4+1	4	14+1	8+4	24+16	32	34+16	32+8
5	4	15	8+4	25	16+4	35	16+8+4
6+4	8	16+4	16	26+4	16+8	36+4	32
8+2	7+1	17+8	16+4	27+2+1	16+8	37+2+1	32
8+2	8	18+2	16	28+2	16+8	38+2	32
9+1	8	19+1	16	29+1	16+8	39+1	32
10	8	20	16	30	16+8	40	32

20.左臂長：右臂長 = 4:7

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+32+2	16+4	11+2+1	8	21	8+4	32+16+8	31+1
2+32+1	16+4	16+4+1	12	22+4+2	16	32+16+8	32
3+32	16+4	13+1	8	23+4+1	16	33+2	16+4
4+2+1	4	14	8	24+4	16	34+1	16+4
5+2	4	16+8+4	15+1	25+2+1	16	35	16+4
6+1	4	16+8+4	16	26+2	16	36+4+2	16+8
7	4	17+32	16+8+4	27+1	16	37+4+1	16+8
8+4+2	8	18+8+2	16	28	16	38+4	16+8
9+32+1	16+8	19+8+1	16	32+16+8	29+2+1	64+4+2	39+1
10+4	8	20+8	16	32+16+8	30+2	64+4+2	40

21.左臂長：右臂長 = 4:9

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+8	4	11+16	8+4	21+32+1	16+8	64+8	31+1
1+8	2+2	12+4+2	8	22+32	16+8	64+8	32
3+32+1	16	13+4+1	8	32+16+4+2	23+1	33+2+1	16
1+8	4	14+4	8	24+2+1	8+4	34+2	16
5+32+8	16+4	15+2+1	8	25+2	8+4	35+1	16
6+64+2	32	32+4	16	26+1	8+4	36	16
7+2	4	17+1	8	27	8+4	37+8	16+4
16+2	8	18	8	28+8	16	38+64+4+2	32+16
9	4	19+32+2+1	16+8	29+4+2+1	16	64+16+8+2	39+1
10+16+1	8+4	32+8+4+1	20	64+8	30+2	64+16+8+2	40

22.左臂長：右臂長 = 5:6

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
256+8+4+2	1+128+64+32	11+1	8+2	21+2+1	16+4	32+16	31+8+1
2+16	8+4+2+1	12	8+2	22+2	16+4	32+16	32+8
16+2	3+8+4	32+4	13+16+1	23+1	16+4	64+8+4+2	33+32
4+2	4+1	32+4	14+16	24	16+4	32+8+2	34+1
4+2	5	16+2	15	16+8+4+2	25	32+8+2	35
6	4+1	16+8	16+4	26+4	16+8+1	32+16	36+4
16+2	7+8	16+8	17+2+1	32+4	27+2+1	32+16	37+2+1
8+4	8+2	16+8	18+2	32+4	28+2	32+16	38+2
8+4	9+1	16+8	19+1	32+4	29+1	32+16	39+1
8+4	10	16+8	20	32+4	30	32+16	40

23.左臂長：右臂長 = 5:7

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
----	----	----	----	----	----	----	----

1+32+2	16+8+1	11+128+1	64+32+4	21	8+4+2+1	31+4	16+8+1
64+4+2	2+32+16	12+128	64+32+4	22+256 +2	128+64 +8	1024+64 +32	32+512 +256
3+32	16+8+1	13+1	8+2	23+256+1	128+64+8	33+2	16+8+1
128+8+4	4+64+32	14	8+2	24+256	128+64+8	64+4+2	34+16
4+2+1	5	16+4+1	15	32+2+1	25	35	16+8+1
6+64	32+16+2	512+32+16	16+256+128	26+2	16+4	32+16+8	36+4
7	4+1	32+2+1	17+8	27+1	16+4	32+16+8	37+2+1
256+16+8	8+128+64	16+8+4	18+2	28	16+4	32+16+8	38+2
8+4+2	9+1	16+8+4	19+1	32+8+2	29+1	32+16+8	39+1
8+4+2	10	16+8+4	20	32+8+2	30	32+16+8	40

24.左臂長：右臂長 = 5:8

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
8	1+4	16+8	11+4	32+8	21+4	31+1	16+4
8	2+2+1	16+8	12+2+1	32+16	22+8	32	16+4
8	3+2	16+8	13+2	32+8	23+2	32+16+8	33+2
8	4+1	16+8	14+1	32+8	24+1	32+16+8	34+1
8	5	16+8	15	32+8	25	32+16+8	35
6+2	4+1	16	8+2	32+16	26+4	64	36+4
16	7+2+1	32	17+2+1	32+16	27+2+1	64	37+2+1
8	4+1	32	18+2	32+16	28+2	64	38+2
16	9+1	32	19+1	32+16	29+1	64	39+1
16	10	32	20	32+16	30	64	40

25.左臂長：右臂長 = 5:9

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+8	4+1	11+16	8+4+2+1	32+16+4+2	21+8+1	256+32	31+128+1
2+16	8+2	32+4	12+8	32+16+4+2	22+8	256+32	32+128

8+1	3+2	13+4+1	8+2	32+8+4+1	23+2	33+2+1	16+4
32+4	4+16	14+4	8+2	64+8	24+16	34+2	16+4
8+1	5	16+8+2+1	15	32+8+4+1	25	35+1	16+4
16+2	6+4	128+16	16+64	26+8+2	16+4	36	16+4
7+2	4+1	17+1	8+2	27	8+4+2+1	64+8	37+2+1
64+8	8+32	32+4	18+2	28+8	16+4	64+8	38+2
9	4+1	32+4	19+1	32+16+4+2	29+1	64+8	39+1
16+2	10	32+4	20	32+16+4+2	30	64+8	40

26.左臂長：右臂長 = 6:7

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+128+4	64+32+16+2	11+2+1	8+4	21	16+2	32+8+2	31+4+1
128+4+1	2+64+32+16	12+2	8+4	16+8+4	22+2	32+8+2	32+4
3+32	16+8+4+2	13+1	8+4	16+8+4	23+1	33+8+1	32+4
4+128+1	64+32+16+2	14	8+4	16+8+4	24	34+8	32+4
5+128	64+32+16+2	32+8+2	15+16+4+1	25+2+1	16+8	35	16+8+4+2
4+2+1	6	16+4+1	16+2	26+2	16+8	32+8+2	36
7	4+2	17+4	16+2	27+1	16+8	37+32+8	64+2
8+8+4+1	16+2	16+4+1	18	28	16+8	32+16+1	38+4
9+8+4	16+2	32+8+2	19+16+1	29+16+4	32+8+2	39+2+1	32+4
10+256	128+64+32+4	32+8+2	20+16	32+2+1	30	40+2	32+4

27.左臂長：右臂長 = 7:8

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
8	1+4+2	16	11+2+1	16+8	21	32+8	31+4
8	2+4+1	16	12+2	32	22+4+2	32+8	32+2+1
8	3+4	16	13+1	32	23+4+1	32+8	33+2
8	4+2+1	16	14	32	24+4	32+8	34+1

8	5+2	15+1	8+4+2	32	25+2+1	32+8	35
8	6+1	16	8+4+2	32	26+2	32+16	36+4+2
8	7	16+8	17+4	32	27+1	32+16	37+4+1
8	4+2+1	16+8	18+2+1	32	28	32+16	38+4
16	9+4+1	16+8	19+2	32+8	29+4+2	32+16	39+2+1
16	10+4	16+8	20+1	32+8	30+4+1	32+16	40+2

28.左臂長：右臂長 = 7:9

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+8	4+2+1	32+4	11+16+1	16+8+2+1	21	31+256+1	128+64+32
2+16	8+4+2	32+4	12+16	64+8	22+32+2	32+256	128+64+32
8+1	3+4	16+2	13+1	64+8	23+32+1	32+8+4+1	33+2
4+32	16+8+4	16+2	14	64+8	24+32	34+2	16+8+4
8+1	5+2	15+128+1	64+32+16	25+2	16+4+1	35+1	16+8+4
16+2	6+8	16+128	64+32+16	32+4	26+2	36	16+8+4
8+1	7	17+1	8+4+2	27	16+4+1	37+8	32+2+1
8+64	32+16+8	18	8+4+2	32+4	28	38+16	32+8+2
9	4+2+1	19+8	16+4+1	29+16	32+2+1	128+16	39+64+8+1
16+2	10+4	32+4	20+8	30+256+2	128+64+32	128+16	40+64+8

29.左臂長：右臂長 = 7:10

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
64+4+2	1+32+16	32+8	11+16+1	16+8+4+2	21	32+16+2	31+4
8+2	2+4+1	32+8	12+16	22+8	16+4+1	128+32	32+64+16
8+2	3+4	16+4	13+1	32+8	23+4+1	64+4+2	33+16
16+4	4+8+2	16+4	14	32+8	24+4	32+16+2	34+1
16+4	5+8+1	15+64+1	32+16+8	32+8	25+2+1	32+16+2	35
8+2	6+1	16+64	32+16+8	32+8	26+2	128+32	36+64+8+4

8+2	7	64+4+2	17+32	32+8	27+1	37+2+1	16+8+4
8+32	16+8+4	64+16	18+32+4+2	32+8	28	38+2	16+8+4
32+8	9+16+2+1	64+16	19+32+4+1	128+32	29+64+16+2+1	39+1	16+8+4
10	4+2+1	20	8+4+2	32+16+2	30+4+1	40	16+8+4

30.左臂長：右臂長 = 8:9

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
1+128+4+2	64+32+16+8	11+4+2+1	16	21+4+2	16+8	31+4+1	32
2+4+2+1	8	12+4+2	16	22+4+1	16+8	32+4	32
3+4+2	8	13+4+1	16	23+4	16+8	33+2+1	32
4+4+1	8	14+4	16	16+8+2+1	24	34+2	32
5+4	8	15+2+1	16	25+2	16+8	35+1	32
8+1	6+2	16+2	16	26+1	16+8	36	32
7+2	8	17+1	16	27	16+8	37+32+2+1	64
8+1	8	18	16	28+8	32	38+32+2	64
9	8	19+16+1	32	29+4+2+1	32	39+32+1	64
10+8	16	20+16	32	30+4+2	32	40+32	64

31.左臂長：右臂長 = 9:10

左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤	左盤	右盤
128+2	1+64+32+16+4	11+8+1	16+2	21+16+2+1	32+4	31+8+1	32+4
2+128	64+32+16+4+1	12+8	16+2	22+16+2	32+4	32+8	32+4
3+256+1	128+64+32+8+2	32+8	13+16+4+2+1	23+16+1	32+4	64+16	33+32+4+2+1
8+2	4+4+1	32+8	14+16+4+2	24+16	32+4	64+16	34+32+4+2
8+2	5+4	32+8	15+16+4+1	64+16	25+32+8+4+2+1	64+16	35+32+4+1
6+4	8+1	32+8	16+16+4	64+16	26+32+8+4+2	32+8	36

7+8+4+ 1	16+2	32+8	17+16+2+1	16+8+4+ 2	27	64+16	37+32+2+1
8+2	8+1	32+8	18+16+2	64+16	28+32+8+4	64+16	38+32+2
8+2	9	32+8	19+16+1	64+16	29+32+8+2+1	64+16	39+32+1
10	8+1	32+8	20+16	30+8+2	32+4	64+16	40+32

透過上面分析，我們可以發現以下狀況：

- (一)對 2^k 型式的砝碼組合來說，是可以在不等臂天平找到平衡式，驗證物體質量。
- (二)至少需使用 4 枚以上砝碼數組合，以兩臂長 9 : 10 的不等臂天平為最多(共 29 組)。
- (三)動用到三位數以上的砝碼組合最多的是兩臂長 1 : 8 的不等臂天平(共 15 組)。
- (四)對兩臂長 5 : 7 的不等臂天平來說，是唯一一組需動用 1024 單位的砝碼組合，這和其臂長互為質數應有連帶關係。

針對上述的分析，是否可類推到其他的質量，又或者其他形式的不等臂天平，是否也能用 2^k 型式的砝碼組合找到平衡式，是值得我們以後努力的方向，以上為此階段的討論狀況。

伍、討論

- 一、等臂天平中，砝碼連續組合方式非常多種，且 1,2 並非務必存在的條件
- 二、等臂天平中，只思考達到目標數字的情況，若只能放同一盤， 2^k 型式的砝碼為使用最少的組合。若必須分兩盤放， 3^k 型式的砝碼為使用最少的組合。且由小到大、取用的砝碼數相同時， 3^k 型式的砝碼能組合出的最大值比 2^k 型式的砝碼組合最大值來得更大。
- 三、等臂天平中， n^k 型式的砝碼($n > 1, k \geq 0, n、k$ 皆整數)，除 2^k 、 3^k 型式的砝碼不需重覆外，其餘形式的砝碼皆需重覆使用，才能湊出連續正整數組合。
- 四、 n^k 型式的砝碼($n > 1, k \geq 0, n、k$ 皆整數)，若 n 為偶數，各種砝碼所需數量=「底數 n 的一半」；若 n 為奇數，各種砝碼所需數量=「底數 n 的一半」再無條件捨去到個位，且其枚數受限於連續正整數的最大值影響，有時會出現「 n 越大不代表組合最大值就越大」的情況。
- 五、對 2^k 型式的砝碼組合來說，是可以在不等臂天平找到平衡式，驗證物體質量。
- 六、至少需使用 4 枚以上砝碼數組合，以兩臂長 9 : 10 的不等臂天平為最多(共 29 組)。

七、動用到三位數以上的砝碼組合最多的是兩臂長 $1:8$ 的不等臂天平(共 15 組)。

八、對兩臂長 $5:7$ 的不等臂天平來說，是唯一一組需動用 1024 單位的砝碼組合，這和其臂長互為質數應有連帶關係。

陸、結論

對這份研究主題來說，原本只是要討論在等臂天平時，特殊規律砝碼可作出的連續組合。但看似多元且完美的解答，一旦放上不等臂天平之後，就如同阿基米德找出假皇冠的結果，真相也就呼之欲出了。我們深深地體會到，數學總是在看似平凡處，隱藏著不平凡的道理。期盼我們這次的討論，能讓大家對特殊規律的砝碼在不同形式的天平表現，有更多的了解，相信這對算得焦頭爛額的我們來說，就是我們在這次研究中最大的收穫。或許終有一天，地球真被一根細長的棍子而舉起也說不定！

柒、參考資料及其他

翰林版六上數學第三單元-規律問題

昌爸工作坊(無日期)。砝碼秤重。取自 <http://www.mathland.idv.tw/life/weights.htm>

數學探險趣：高年級排列組合(2018 年 3 月 22 日)。數學佈題討論。取自

https://funmathexploration.blogspot.com/2018/03/blog-post_22.html