

屏東縣第66屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：妙用無窮的母子相似定理

關 鍵 詞：尺規作圖、母子相似定理、無理數長度（最多3個）

編號：B1009

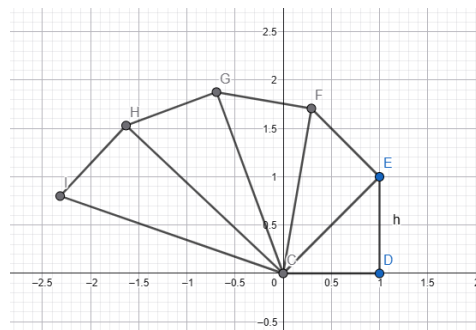
摘要

在尺規作圖表示無理數長度上，在國中數學教材上都以直角三角型畢氏定理方式畫出，此法雖簡單明瞭，容易理解，但有其不便性，本研究另尋簡化方式來畫出無理數長度，並可運用在更複雜無理數型式的長度畫法上，有助於理解無理數的存在性。

壹、前言

在國中八上數學課第二章「平方根與畢氏定理」，第一次接觸無理數，感覺既神秘又虛無，甚至懷疑有這種數嗎？到了八下數學課第三章，「基本尺規作圖」，數學老師為了說服我們有這種數的存在，於是用等腰三角型加畢氏定理教導畫出了 $\sqrt{2}$ 的長度，才「迫」使我們接受了無理數的存在。

如右圖，取 $\overline{CD} = \overline{DE} = 1$ ， $\overline{CD} \perp \overline{DE}$ ，則 $\overline{CE} = \sqrt{2}$ ，接著 $\overline{FE} = 1$ ， $\overline{FE} \perp \overline{CE}$ ，則 $\overline{CF} = \sqrt{3}$ ，再接著 $\overline{GF} = 1$ ， $\overline{GF} \perp \overline{CF}$ ，則 $\overline{CG} = \sqrt{4} = 2$ ，如此重覆動作下去，就可畫出像螺旋狀圖形，得到一連串的 $\overline{CH} = \sqrt{5}$ ， $\overline{CI} = \sqrt{6} \dots \dots$ ，每種根號的數皆可一一畫出。



可是此種畫法有其不便利的地方，比如要畫 $\sqrt{14}$ 的長度，必須經過中間冗長過程才能得到要求的結果，在實用性上大打折扣。

在網路上的「翰林雲端學院」中，有介紹關於「直角三角型母子相似定理」，以下附圖為截取自網站：<https://www.ehanlin.com.tw/app/keyword/國中/數學/直角三角形母子相似性質.html>，

●國中數學 - 直角三角形母子相似性質

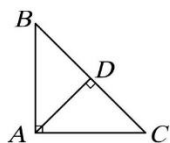
●如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，則：

$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ ，

$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ ，

$\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}$ 。

●下圖為：直角三角形母子相似性質示意圖。



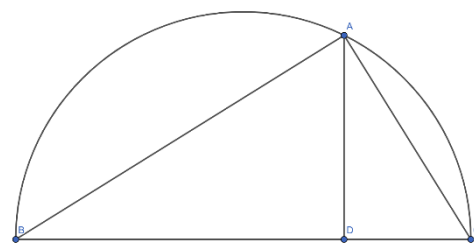
靈動一動，發覺這是很不錯的公式，可運用於繪畫出各種根號的長度，而且有很高的便利性和機動性，於是開始動手研究。

貳、研究設備及器材

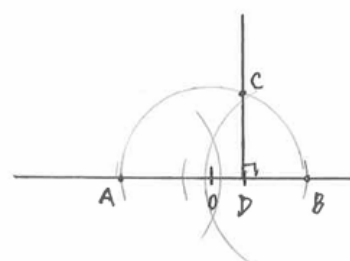
紙、筆、尺規作圖工具。

參、研究過程或方法

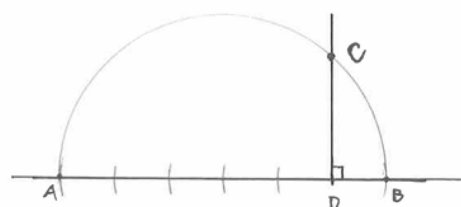
將「翰林雲端學院」的「直角三角型母子相似定理」的圖旋轉，如此可以配合繪圖的直角坐標軸。在右圖中，弧 BAC 為一半圓 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，則 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}$ ， $\overline{AD} = \sqrt{\overline{DB} \times \overline{DC}}$ 。如此一來，要畫各種根號的長度，只要把根號裡頭的數字分解成兩數(猶如 $\overline{DB}$ 與 $\overline{DC}$)相乘，則 $\overline{AD}$ 的長度就是所要求的根號長度。



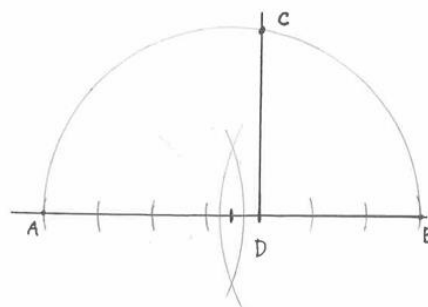
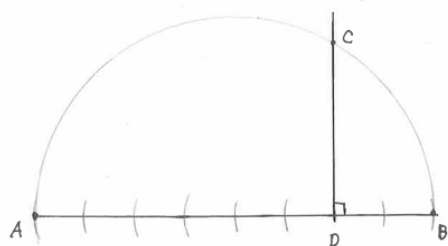
舉例，先畫最簡單的 $\sqrt{2}$ ， $2 = 2 \times 1$ ，如右圖，以 D 點出發，向左取 $\overline{AD} = 2$ ，向右取 $\overline{BD} = 1$ ，以 $\overline{AB}$ 為直徑，畫一半圓 $\widehat{ACB}$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 則 $\overline{CD} = \sqrt{2 \times 1} = \sqrt{2}$ 。如此一來，要畫出根號的長度變得如此簡單方便。



如果要畫的根號長度數字為質數，如前例 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{5}$ ，因為質數只能分解成 2×1 ， 3×1 ， 5×1 ，所以只有一種畫法，比如 $\sqrt{5}$ 的畫法為，如右圖 $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{BD} = 1$ ，則 $\overline{CD} = \sqrt{5}$ ，其餘以此類推。

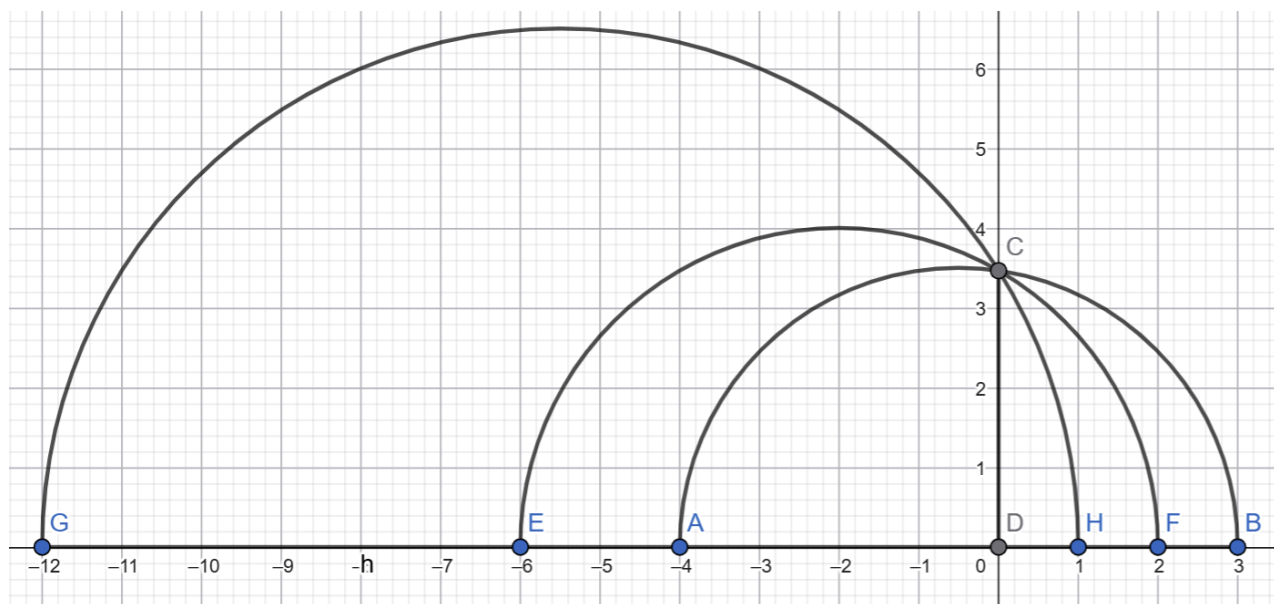


要畫的根號長度數字若為合數，如 $\sqrt{12}$ ，則畫法將不只一種，會有多種畫法。 $12 = 12 \times 1$ ， $12 = 6 \times 2$ ， $12 = 4 \times 3$ ，如下左右兩圖， $\overline{CD}$ 的長度皆為 $\sqrt{12}$ 。



如果將三種畫法重疊在一起，更可清楚的明瞭這種畫法的正確性。為求更精確的結果，我

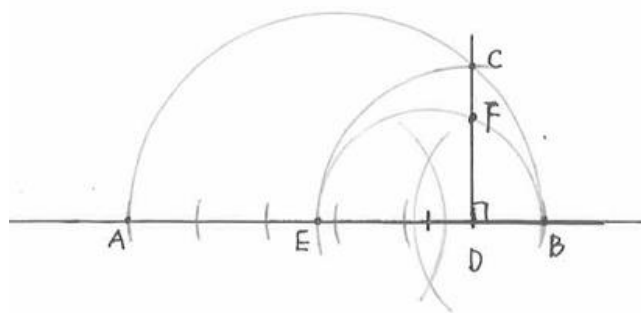
們以 GeoGebra 畫出如下圖：



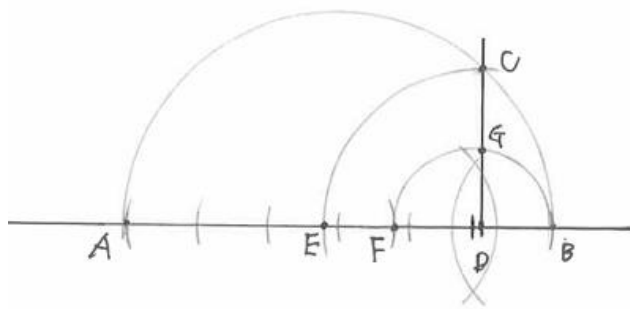
肆、研究結果

此種畫法若只是畫這樣的根號長度，不足以彰顯其妙用之處，最讓人嘆為觀止之處，是其可以畫一些特殊複雜的根號情形。如 $\sqrt{\sqrt{5}}$ ，或是 $\sqrt{\sqrt{5}-1}$ 這類看人看了目瞪口呆的無理數長度。其畫法如下：

如右圖，由 D 點向左取 $\overline{AD} = 5$ ，向右取 $\overline{DB} = 1$ ，以 $\overline{AB}$ 為直徑畫半圓， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，則 $\overline{CD} = \sqrt{5}$ ，再以 D 為圓心， $\overline{CD}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{AB}$ 於 E 點，則 $\overline{ED} = \sqrt{5}$ 。再以 $\overline{EB}$ 為直徑畫半圓，交 $\overline{CD}$ 於 F 點，則 $\overline{FD} = \sqrt{\sqrt{5}}$ ，其所利用的原理即 $\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5} \times 1}$ 。



接著，挑戰更高難度的 $\sqrt{\sqrt{5}-1}$ 。如右圖，延續前段理論， $\sqrt{\sqrt{5}-1} = \sqrt{(\sqrt{5}-1) \times 1}$ ，所以作圖過程和前段落的前半段一直到 $\overline{ED} = \sqrt{5}$ 前動作皆相同，接著取 $\overline{EF} = 1$ ，則 $\overline{FD} = (\sqrt{5}-1)$ ，再以 $\overline{FB}$ 為直徑畫半圓，交 $\overline{CD}$ 於G點，則 $\overline{GD} = \sqrt{\sqrt{5}-1}$ 。



伍、討論

目前研究的內容為 $\sqrt{\quad}$ 及 $\sqrt{\sqrt{\quad}}$ 的長度畫法，若是可以的話，會繼續朝 $\sqrt[3]{\quad}$ 這種高難度的長度畫法去研究，希望能在這方面能有更深入的進展和成功。

陸、結論

關於無理數這個項目，從八年級開始課程接觸，剛開始對它產生懷疑，甚至討厭它，總覺得它是那麼的神秘與虛幻。但從學習如何利用最原始的尺規作圖畫出其長度之後，方才知道它就像整數、分數一樣，是真實存在的，這也是在數學學習過程中一個心裡轉度與眼界擴大的轉捩點。也深深感覺，學習如何將無理數的長度畫出來在數學的認知上是多麼的重要。

柒、參考資料及其他

- 一、翰林雲端學院，網址：<https://www.ehanlin.com.tw/app/index.html>
- 二、翰林雲端學院，網址：<https://www.ehanlin.com.tw/app/keyword/國中/數學/直角三角形母子相似性質.html>
- 三、維基百科：<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/射影定理>