

屏東縣第 66 屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：四柱河內塔「這樣分」才最好

關 鍵 詞：河內塔、指數、數列（最多三個）

編號：B1008

四柱河內塔「這樣分」才最好

摘要

河內塔是一個經典的數學問題，三根柱子時其最少步數呈現指數成長。當柱子增加為四根時，理論上可以減少搬移步數，但如何分配圓盤才能達到最少步數，並沒有簡單公式可直接計算。本研究透過實際操作、表格整理與數學計算，分析不同圓盤數下的搬移策略，並利用分段思考建立步數模型，比較各種暫存方式的總步數。研究結果發現，四柱河內塔的最省策略為先暫存部分小圓盤，再以三柱方式搬移大圓盤，最後合併回目標柱，而最佳暫存數會隨圓盤數增加而緩慢成長。本研究說明了數學中的指數成長、規律觀察與最佳化思想，顯示數學不僅是計算工具，也能幫助我們做出更有效率的決策。

壹、前言

在國中數學課程中，我們學習了許多重要概念，例如：指數與次方（如 2^n 的成長）、數列規律與模式觀察、分段計算與策略選擇、邏輯推理與問題拆解，河內塔正是一個結合上述概念的經典問題。傳統三柱河內塔的最少步數為 $2^n - 1$ ，隨著圓盤數增加，步數呈指數成長。當柱子增加為四根時，直覺上應該能「更快完成」，但問題隨之產生：圓盤應該先搬幾個？為什麼不是平均分？為什麼這樣分才是最省？本研究即探討：四柱河內塔中，「最佳暫存圓盤數」的數學理由。

研究問題為：一、四柱河內塔是否存在「最少步數」的搬法？二、若存在，暫存圓盤數 k 與總圓盤數 n 有何關係？三、為什麼選擇某個 k 能使總步數最小？

貳、研究設備及器材

為了進行四柱河內塔最少步數的研究，本研究使用以下設備與器材：一、四柱河內塔模型一組，圓盤數量 4 個，用於實際測試搬移策略與驗證步數。二、記錄表工具，記錄每次搬移順序與步數，比較不同分堆方式的結果。

參、研究過程

根據維基百科資料，河內塔（Tower of Hanoi）是一個根據傳說形成的數學問題：有三根杆子 A、B、C，A 杆上有 N 個（ $N > 1$ ）穿孔圓盤，盤的尺寸由下到上依次變小，需依下列規則將所有圓盤移至 C 杆：規則一，每次只能移動一個圓盤。規則二，大盤不能疊在小盤上面。可將圓盤臨時置於 B 杆，也可將從 A 杆移出的圓盤重新移回 A 杆，但都必須遵循上述兩條規則。

四柱河內塔（Reve's Puzzle），規則不變：一次只能移動一個圓盤，大圓盤不能放在小圓盤上。四根柱子時，1~3 個圓盤時，移動沒什麼大問題，4 個圓盤開始，得分堆移動，當 n 個圓盤（ $n > 3$ ）時，最少移動步數，發現不能一個一個圓盤移動，需要分堆移動，先移動一部分圓盤（ k 個）到輔助柱，再移動剩餘圓盤（ $n - k$ 個）到目標柱，再將在輔助柱的一部分圓盤（ k 個）移動到目標柱。第一階段：移動 $1 \sim k$ 圓盤到輔助柱 B1（四柱河內塔問題）。第二階段：移動

$k+1 \sim n$ 圓盤到目標柱 C，輔助柱 B1 被占用，所以只剩三根柱子（三柱河內塔問題），需要 $2^{n-k} - 1$ 步。第三階段：移動 $1 \sim k$ 圓盤到目標 D（四柱河內塔問題）。

為方便陳敘，將四根柱子分別命名為起始柱 A、輔助柱 B1 及 B2、目標柱 C，將 n 個圓盤分別命名為 $1、2、3 \cdots n$ ，數字愈大代表圓盤大小越大。 $1 \sim 30$ 個圓盤之最少移動步數探討如下：

一、一到三個圓盤之最少移動步數

(一) 一個圓盤，直接移動，最少移動步數 1

開始				步數 1			
A	B1	B2	C	A	B1	B2	C
1							1

(二) 二個圓盤，最少移動步數 3

步數 1，圓盤 1：從起始柱 A 移動到輔助柱 B1

步數 2，圓盤 2：從起始柱 A 移動到目標柱 C

步數 3，圓盤 1：從輔助柱 B1 移動到目標柱 C

開始				步數 1				步數 2				步數 3			
A	B1	B2	C	A	B1	B2	C	A	B1	B2	C	A	B1	B2	C
1					1				1						1
2				2							2				2

(三) 三個圓盤，最少移動步數 5

步數 1，圓盤 1：從起始柱 A 移動到輔助柱 B1

步數 2，圓盤 2：從起始柱 A 移動到輔助柱 B2

步數 3，圓盤 3：從起始柱 A 移動到目標柱 C

步數 4，圓盤 2：從輔助柱 B2 移動到目標柱 C

步數 5，圓盤 1：從輔助柱 B1 移動到目標柱 C

開始				步數 1				步數 2				步數 3			
A	B1	B2	C	A	B1	B2	C	A	B1	B2	C	A	B1	B2	C
1					1				1				1		
2				2						2				2	
3				3				3							3

步數 4				步數 5			
A	B1	B2	C	A	B1	B2	C
	1						1
			2				2
			3				3

二、四個圓盤之最少移動步數

四個圓盤，可以分成三種狀況探討：

(一) 狀況一，1 個圓盤移動到輔助柱，剩餘 3 個圓盤移動到目標柱，再將輔助柱 1 個圓盤移動到目標柱，最少移動步數 9

第一階段，移動 1 步

步數 1，圓盤 1：從起始柱 A 移動到輔助柱 B1

第二階段，移動 2^3-1 步

步數 2，圓盤 2：從起始柱 A 移動到目標柱 C

步數 3，圓盤 3：從起始柱 A 移動到輔助柱 B2

步數 4，圓盤 2：從目標柱 C 移動到輔助柱 B2

步數 5，圓盤 4：從起始柱 A 移動到目標柱 C

步數 6，圓盤 2：從輔助柱 B2 移動到起始柱 A

步數 7，圓盤 3：從輔助柱 B2 移動到目標柱 C

步數 8，圓盤 2：從起始柱 A 移動到目標柱 C

第三階段，移動 1 步

步數 9，圓盤 1：從輔助柱 B1 移動到目標柱 C

開始				步數 1				步數 2				步數 3			
A	B1	B2	C	A	B1	B2	C	A	B1	B2	C	A	B1	B2	C
1					1				1				1		
2				2							2				2
3				3				3						3	
4				4				4				4			

步數 4				步數 5				步數 6				步數 7			
A	B1	B2	C	A	B1	B2	C	A	B1	B2	C	A	B1	B2	C
	1				1				1				1		
		2				2		2				2			
		3				3				3					3
4							4				4				4

步數 8				步數 9			
A	B1	B2	C	A	B1	B2	C
	1						1
			2				2
			3				3
			4				4

(二) 狀況二，2 個圓盤移動到輔助柱，剩餘 2 個圓盤移到目標柱，再將輔助柱 2 個圓盤移動到目標柱，最少移動步數 9

第一階段，移動 3 步

步數 1，圓盤 1：從起始柱 A 移動到輔助柱 B1

步數 2，圓盤 2：從起始柱 A 移動到輔助柱 B2

步數 3，圓盤 1：從輔助柱 B1 移動到輔助柱 B2

第二階段，移動 2^2-1 步

步數 4，圓盤 3：從起始柱 A 移動到輔助柱 B1

步數 5，圓盤 4：從起始柱 A 移動到目標柱 C

步數 6，圓盤 3：從輔助柱 B1 移動到目標柱 C

第三階段，移動 3 步

步數 7，圓盤 1：從輔助柱 B2 移動到輔助柱 B1

步數 8，圓盤 2：從輔助柱 B2 移動到目標柱 C

步數 9，圓盤 1：從輔助柱 B1 移動到目標柱 C

開始			
A	B1	B2	C
1			
2			
3			
4			

步數 1			
A	B1	B2	C
	1		
2			
3			
4			

步數 2			
A	B1	B2	C
	1		
		2	
3			
4			

步數 3			
A	B1	B2	C
		1	
		2	
3			
4			

步數 4			
A	B1	B2	C
		1	
		2	
	3		
4			

步數 5			
A	B1	B2	C
		1	
		2	
	3		
			4

步數 6			
A	B1	B2	C
		1	
		2	
			3
			4

步數 7			
A	B1	B2	C
	1		
		2	
			3
			4

步數 8			
A	B1	B2	C
	1		
			2
			3
			4

步數 9			
A	B1	B2	C
			1
			2
			3
			4

(三) 狀況三，3 個圓盤移動到輔助柱，剩餘 1 個圓盤移到目標柱，再將輔助柱 3 個圓盤移動到目標柱，最少移動步數 11

第一階段，移動 5 步

步數 1，圓盤 1：從起始柱 A 移動到目標柱 C

步數 2，圓盤 2：從起始柱 A 移動到輔助柱 B2

步數 3，圓盤 3：從起始柱 A 移動到輔助柱 B1

步數 4，圓盤 2：從輔助柱 B2 移動到輔助柱 B1

步數 5，圓盤 1：從目標柱 C 移動到目標柱 B1

第二階段，移動 2^1-1 步

步數 6，圓盤 4：從起始柱 A 移動到目標柱 C

第三階段，移動 5 步

步數 7，圓盤 1：從輔助柱 B1 移動到起始柱 A

步數 8，圓盤 2：從輔助柱 B1 移動到輔助柱 B2

步數 9，圓盤 3：從輔助柱 B1 移動到目標柱 C

步數 10，圓盤 2：從輔助柱 B2 移動到目標柱 C

步數 11，圓盤 1：從起始柱 A 移動到目標柱 C

開始			
A	B1	B2	C
1			
2			
3			
4			

步數 1			
A	B1	B2	C
			1
2			
3			
4			

步數 2			
A	B1	B2	C
			1
		2	
3			
4			

步數 3			
A	B1	B2	C
			1
		2	
	3		
4			

步數 4			
A	B1	B2	C
			1
	2		
	3		
4			

步數 5			
A	B1	B2	C
	1		
	2		
	3		
4			

步數 6			
A	B1	B2	C
	1		
	2		
	3		
			4

步數 7			
A	B1	B2	C
1			
	2		
	3		
			4

步數 8			
A	B1	B2	C
1			
		2	
	3		
			4

步數 9			
A	B1	B2	C
1			
		2	
			3
			4

步數 10			
A	B1	B2	C
1			
			2
			3
			4

步數 11			
A	B1	B2	C
			1
			2
			3
			4

四個盤子，三種分法，第一種，四柱移動 1 個圓盤到暫存柱，需要 1 步，再三柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 $2^3-1=7$ 步，最後再四柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 1 步，總共需要 9 步。第二種，四柱移動 2 個圓盤到暫存柱，需要 3 步，再三柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 $2^2-1=3$ 步，最後再四柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 3 步，總共需要 9 步。第三種，四柱移動 3 個圓盤到暫存柱，需要 5 步，再三柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 $2^1-1=1$ 步，最後再四柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 5 步，總共需要 11 步。其中 1+3、2+2 兩種分法，最少移動步數都是 9 步。

三、五個圓盤之最少移動步數

五個圓盤，可以分成四種狀況探討：

- (一) 狀況一，四柱移動 1 個圓盤到暫存柱，需要 1 步，再三柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 $2^4-1=15$ 步，最後再四柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 1 步，總共需要 17 步。
- (二) 狀況二，四柱移動 2 個圓盤到暫存柱，需要 3 步，再三柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 $2^3-1=7$ 步，最後再四柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 3 步，總共需要 13 步。

(三) 狀況三，四柱移動 3 個圓盤到暫存柱，需要 5 步，再三柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 $2^2-1=3$ 步，最後再四柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 5 步，總共需要 13 步。

(四) 狀況四，四柱移動 4 個圓盤到暫存柱，需要 9 步，再三柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 $2^1-1=1$ 步，最後再四柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 9 步，總共需要 19 步。

五個圓盤，四種分法，其中 2+3、3+2 兩種，最少移動步數都是 13

四、六個圓盤之最少移動步數

六個圓盤，可以分成五種狀況探討：

(一) 狀況一，四柱移動 1 個圓盤到暫存柱，需要 1 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 1 步，總共需要 33 步。

(二) 狀況二，四柱移動 2 個圓盤到暫存柱，需要 3 步，再三柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 $2^4-1=15$ 步，最後再四柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 3 步，總共需要 21 步。

(三) 狀況三，四柱移動 3 個圓盤到暫存柱，需要 5 步，再三柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 $2^3-1=7$ 步，最後再四柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 5 步，總共需要 17 步。

(四) 狀況四，四柱移動 4 個圓盤到暫存柱，需要 9 步，再三柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 $2^2-1=3$ 步，最後再四柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 9 步，總共需要 21 步。

(五) 狀況五，四柱移動 5 個圓盤到暫存柱，需要 13 步，再三柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 $2^1-1=1$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 13 步，總共需要 27 步。

六個圓盤，五種分法，其中 3+3，最少移動步數是 17。

五、七個圓盤之最少移動步數

七個圓盤，可以分成六種狀況探討：

(一) 狀況一，四柱移動 1 個圓盤到暫存柱，需要 1 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 1 步，總共需要 65 步。

- (二) 狀況二，四柱移動 2 個圓盤到暫存柱，需要 3 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 3 步，總共需要 37 步。
- (三) 狀況三，四柱移動 3 個圓盤到暫存柱，需要 5 步，再三柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 $2^4-1=15$ 步，最後再四柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 5 步，總共需要 25 步。
- (四) 狀況四，四柱移動 4 個圓盤到暫存柱，需要 9 步，再三柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 $2^3-1=7$ 步，最後再四柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 9 步，總共需要 25 步。
- (五) 狀況五，四柱移動 5 個圓盤到暫存柱，需要 13 步，再三柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 $2^2-1=3$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 13 步，總共需要 29 步。
- (六) 狀況六，四柱移動 6 個圓盤到暫存柱，需要 17 步，再三柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 $2^1-1=1$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 17 步，總共需要 35 步。

七個圓盤，六種分法，其中 3+4、4+3 兩種，最少移動步數都是 25。

六、八個圓盤之最少移動步數

八個圓盤，可以分成七種狀況探討：

- (一) 狀況一，四柱移動 1 個圓盤到暫存柱，需要 1 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 1 步，總共需要 129 步。
- (二) 狀況二，四柱移動 2 個圓盤到暫存柱，需要 3 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 3 步，總共需要 69 步。
- (三) 狀況三，四柱移動 3 個圓盤到暫存柱，需要 5 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 5 步，總共需要 41 步。
- (四) 狀況四，四柱移動 4 個圓盤到暫存柱，需要 9 步，再三柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 $2^4-1=15$ 步，最後再四柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 9 步，總共需要 33 步。
- (五) 狀況五，四柱移動 5 個圓盤到暫存柱，需要 13 步，再三柱移動 3 個圓盤到目

標柱，需要 $2^3-1=7$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 13 步，總共需要 33 步。

(六) 狀況六，四柱移動 6 個圓盤到暫存柱，需要 17 步，再三柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 $2^2-1=3$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 17 步，總共需要 37 步。

(七) 狀況七，四柱移動 7 個圓盤到暫存柱，需要 25 步，再三柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 $2^1-1=1$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 25 步，總共需要 51 步。

八個圓盤，七種分法，其中 4+4、5+3 兩種，最少移動步數都是 33。

七、九個圓盤之最少移動步數

九個圓盤，可以分成八種狀況探討：

(一) 狀況一，四柱移動 1 個圓盤到暫存柱，需要 1 步，再三柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 $2^8-1=255$ 步，最後再四柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 1 步，總共需要 257 步。

(二) 狀況二，四柱移動 2 個圓盤到暫存柱，需要 3 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 3 步，總共需要 133 步。

(三) 狀況三，四柱移動 3 個圓盤到暫存柱，需要 5 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 5 步，總共需要 73 步。

(四) 狀況四，四柱移動 4 個圓盤到暫存柱，需要 9 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 9 步，總共需要 49 步。

(五) 狀況五，四柱移動 5 個圓盤到暫存柱，需要 13 步，再三柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 $2^4-1=15$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 13 步，總共需要 41 步。

(六) 狀況六，四柱移動 6 個圓盤到暫存柱，需要 17 步，再三柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 $2^3-1=7$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 17 步，總共需要 41 步。

(七) 狀況七，四柱移動 7 個圓盤到暫存柱，需要 25 步，再三柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 $2^2-1=3$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 25 步，總共

需要 53 步。

- (八) 狀況八，四柱移動 8 個圓盤到暫存柱，需要 33 步，再三柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 $2^1-1=1$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 33 步，總共需要 67 步。

九個圓盤，八種分法，其中 5+4、6+3 兩種，最少移動步數都是 41。

八、十個圓盤之最少移動步數

十個圓盤，可以分成九種狀況探討：

- (一) 狀況一，四柱移動 1 個圓盤到暫存柱，需要 1 步，再三柱移動 9 個圓盤到目標柱，需要 $2^9-1=511$ 步，最後再四柱移動 1 個圓盤到目標柱，需要 1 步，總共需要 513 步。
- (二) 狀況二，四柱移動 2 個圓盤到暫存柱，需要 3 步，再三柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 $2^8-1=255$ 步，最後再四柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 3 步，總共需要 261 步。
- (三) 狀況三，四柱移動 3 個圓盤到暫存柱，需要 5 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 5 步，總共需要 137 步。
- (四) 狀況四，四柱移動 4 個圓盤到暫存柱，需要 9 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 9 步，總共需要 81 步。
- (五) 狀況五，四柱移動 5 個圓盤到暫存柱，需要 13 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 13 步，總共需要 57 步。
- (六) 狀況六，四柱移動 6 個圓盤到暫存柱，需要 17 步，再三柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 $2^4-1=15$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 17 步，總共需要 49 步。
- (七) 狀況七，四柱移動 7 個圓盤到暫存柱，需要 25 步，再三柱移動 3 個圓盤到目標柱，需要 $2^3-1=7$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 25 步，總共需要 57 步。
- (八) 狀況八，四柱移動 8 個圓盤到暫存柱，需要 33 步，再三柱移動 2 個圓盤到目標柱，需要 $2^2-1=3$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 33 步，總共需要 69 步。

十個圓盤，九種分法，其中 6+4，最少移動步數是 49。

發現二，最少移動步數下，四個盤子，可分成(1) 四柱移動 1 個到暫存柱，三柱移動 3 個到目標柱，(2) 四柱移動 2 個到暫存柱，三柱移動 2 個到目標柱，五個盤子，可分成(1) 四柱移動 2 個到暫存柱，三柱移動 3 個到目標柱，(2) 四柱移動 3 個到暫存柱，三柱移動 2 個到目標柱，六個盤子，可分成四柱移動 3 個到暫存柱，三柱移動 3 個到目標柱，七個盤子，可分成(1) 四柱移動 3 個到暫存柱，三柱移動 4 個到目標柱，(2) 四柱移動 4 個到暫存柱，三柱移動 3 個到目標柱，八個盤子，可分成(1) 四柱移動 4 個到暫存柱，三柱移動 4 個到目標柱，(2) 四柱移動 5 個到暫存柱，三柱移動 3 個到目標柱，九個盤子，可分成(1) 四柱移動 5 個到暫存柱，三柱移動 4 個到目標柱，(2) 四柱移動 6 個到暫存柱，三柱移動 3 個到目標柱，十個盤子，可分成四柱移動 6 個到暫存柱，三柱移動 4 個到目標柱，我們發現，最少移動步數下，分堆方式並不是分成一半，但似乎集中在一半附近，接下來，十一至十五個圓盤，分堆方式我們就以最中間四~五組方式來探討最少移動步數。

圓盤數 n	四柱移動 k 個到暫存柱 三柱移動 n-k 個到目標柱		最少步數
1	0	1	1
2	1	1	3
3	1	2	5
4	1	3	9
	2	2	
5	2	3	13
	3	2	
6	3	3	17
7	3	4	25
	4	3	
8	4	4	33
	5	3	
9	5	4	41
	6	3	
10	6	4	49

九、十一至二十個圓盤之最少移動步數

(一) 十一個圓盤之最少移動步數

十一個圓盤，分堆方式中間四種狀況探討，發現其中 6+5、7+4，最少移動步數是 65。

1. 狀況一，四柱移動 4 個圓盤到暫存柱，需要 9 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 9 步，總共需要 145 步。
2. 狀況二，四柱移動 5 個圓盤到暫存柱，需要 13 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 13 步，總共需要 89 步。
3. 狀況三，四柱移動 6 個圓盤到暫存柱，需要 17 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 17 步，總共需要 65 步。
4. 狀況四，四柱移動 7 個圓盤到暫存柱，需要 25 步，再三柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 $2^4-1=15$ 步，最後再四柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 25 步，總共需要 65 步。

(二) 十二個圓盤之最少移動步數

十二個圓盤，分堆方式中間五種狀況探討，發現其中 7+5、8+4，最少移動步數是 81。

1. 狀況一，四柱移動 4 個圓盤到暫存柱，需要 9 步，再三柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 $2^8-1=255$ 步，最後再四柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 9 步，總共需要 243 步。
2. 狀況二，四柱移動 5 個圓盤到暫存柱，需要 13 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 13 步，總共需要 153 步。
3. 狀況三，四柱移動 6 個圓盤到暫存柱，需要 17 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 17 步，總共需要 97 步。
4. 狀況四，四柱移動 7 個圓盤到暫存柱，需要 25 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 25 步，總共需要 81 步。

5. 狀況五，四柱移動 8 個圓盤到暫存柱，需要 33 步，再三柱移動 4 個圓盤到目標柱，需要 $2^4-1=15$ 步，最後再四柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 33 步，總共需要 81 步。

(三) 十三個圓盤之最少移動步數

十三個圓盤，分堆方式中間四種狀況探討，發現其中 8+5，最少移動步數是 97。

1. 狀況一，四柱移動 5 個圓盤到暫存柱，需要 13 步，再三柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 $2^8-1=255$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 13 步，總共需要 281 步。
2. 狀況二，四柱移動 6 個圓盤到暫存柱，需要 17 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 17 步，總共需要 161 步。
3. 狀況三，四柱移動 7 個圓盤到暫存柱，需要 25 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 25 步，總共需要 113 步。
4. 狀況四，四柱移動 8 個圓盤到暫存柱，需要 33 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 33 步，總共需要 97 步。

(四) 十四個圓盤之最少移動步數

十四個圓盤，分堆方式中間五種狀況探討，發現其中 9+5，最少移動步數是 113。

1. 狀況一，四柱移動 5 個圓盤到暫存柱，需要 13 步，再三柱移動 9 個圓盤到目標柱，需要 $2^9-1=511$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 13 步，總共需要 537 步。
2. 狀況二，四柱移動 6 個圓盤到暫存柱，需要 17 步，再三柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 $2^8-1=255$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 17 步，總共需要 289 步。
3. 狀況三，四柱移動 7 個圓盤到暫存柱，需要 25 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 25 步，總共需要 177 步。
4. 狀況四，四柱移動 8 個圓盤到暫存柱，需要 33 步，再三柱移動 6 個圓盤到

目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 33 步，總共需要 129 步。

5. 狀況五，四柱移動 9 個圓盤到暫存柱，需要 41 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 9 個圓盤到目標柱，需要 41 步，總共需要 113 步。

(五) 十五個圓盤之最少移動步數

十五個圓盤，分堆方式中間四種狀況探討：

1. 狀況一，四柱移動 6 個圓盤到暫存柱，需要 17 步，再三柱移動 9 個圓盤到目標柱，需要 $2^9-1=511$ 步，最後再四柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 17 步，總共需要 545 步。
2. 狀況二，四柱移動 7 個圓盤到暫存柱，需要 25 步，再三柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 $2^8-1=255$ 步，最後再四柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 25 步，總共需要 305 步。
3. 狀況三，四柱移動 8 個圓盤到暫存柱，需要 33 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 33 步，總共需要 193 步。
4. 狀況四，四柱移動 9 個圓盤到暫存柱，需要 41 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 41 步，總共需要 145 步。

十五個圓盤，最少移動步數的分堆方式不是出現在中間四~五組，卻是出現在 10+5，四柱移動 10 個圓盤到暫存柱，需要 49 步，再三柱移動 5 個圓盤到目標柱，需要 $2^5-1=31$ 步，最後再四柱移動 10 個圓盤到目標柱，需要 49 步，總共需要 129 步。我們發現，四柱河內塔除了最少移動步數，從 4 個圓盤開始，分堆方式也是遞迴數列， $4=1+3$ 、 $5=2+3$ 、 $6=3+3$ 、 $7=3+4$ 、 $8=4+4$ 、 $9=5+4$ 、 $10=6+4$ 、 $11=6+5$ 、 $12=7+5$ 、 $13=8+5$ 、 $14=9+5$ 、 $15=10+5$ ，假設 n 個圓盤時，先移動 k 個圓盤到暫存柱，再移動 $n-k$ 個圓盤到目標柱， $n=k+(n-k)$ ，其中， $n-k$ 會是一個規律數列 3,3,3,4,4,4,4,,5,5,5,5,5。

十、十六至三十個圓盤之最少移動步數

(一) 十六個圓盤之最少移動步數

四柱移動 10 個圓盤到暫存柱，需要 49 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 10 個圓盤到目標柱，需要 49 步，總共需要 161 步。

(二) 十七個圓盤之最少移動步數

四柱移動 11 個圓盤到暫存柱，需要 65 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 11 個圓盤到目標柱，需要 65 步，總共需要 193 步。

(三) 十八個圓盤之最少移動步數

四柱移動 12 個圓盤到暫存柱，需要 81 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 12 個圓盤到目標柱，需要 81 步，總共需要 225 步。

(四) 十九個圓盤之最少移動步數

四柱移動 13 個圓盤到暫存柱，需要 97 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 13 個圓盤到目標柱，需要 97 步，總共需要 257 步。

(五) 二十個圓盤之最少移動步數

四柱移動 14 個圓盤到暫存柱，需要 113 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 14 個圓盤到目標柱，需要 113 步，總共需要 289 步。

(六) 二十一個圓盤之最少移動步數

四柱移動 15 個圓盤到暫存柱，需要 129 步，再三柱移動 6 個圓盤到目標柱，需要 $2^6-1=63$ 步，最後再四柱移動 15 個圓盤到目標柱，需要 129 步，總共需要 321 步。

(七) 二十二個圓盤之最少移動步數

四柱移動 15 個圓盤到暫存柱，需要 129 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 15 個圓盤到目標柱，需要 129 步，總共需要 385 步。

(八) 二十三個圓盤之最少移動步數

四柱移動 16 個圓盤到暫存柱，需要 161 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 16 個圓盤到目標柱，需要 161 步，總共需要 449 步。

(九) 二十四個圓盤之最少移動步數

四柱移動 17 個圓盤到暫存柱，需要 193 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 17 個圓盤到目標柱，需要 193 步，總共需要 513 步。

(十) 二十五個圓盤之最少移動步數

四柱移動 18 個圓盤到暫存柱，需要 225 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 18 個圓盤到目標柱，需要 225 步，總共需要 577 步。

(十一) 二十六個圓盤之最少移動步數

四柱移動 19 個圓盤到暫存柱，需要 257 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 18 個圓盤到目標柱，需要 257 步，總共需要 641 步。

(十二) 二十七個圓盤之最少移動步數

四柱移動 20 個圓盤到暫存柱，需要 289 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 20 個圓盤到目標柱，需要 289 步，總共需要 705 步。

(十三) 二十八個圓盤之最少移動步數

四柱移動 21 個圓盤到暫存柱，需要 321 步，再三柱移動 7 個圓盤到目標柱，需要 $2^7-1=127$ 步，最後再四柱移動 21 個圓盤到目標柱，需要 321 步，總共需要 769 步。

(十四) 二十九個圓盤之最少移動步數

四柱移動 21 個圓盤到暫存柱，需要 321 步，再三柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 $2^8-1=255$ 步，最後再四柱移動 21 個圓盤到目標柱，需要 321 步，總共需要 897 步。

(十五) 三十個圓盤之最少移動步數

四柱移動 22 個圓盤到暫存柱，需要 385 步，再三柱移動 8 個圓盤到目標柱，需要 $2^8-1=255$ 步，最後再四柱移動 22 個圓盤到目標柱，需要 385 步，總共需要 1025 步。

綜合上述，驗證四柱河內塔最少移動步數是一個遞迴數列，一個圓盤，最少移動步數為 1，二個圓盤，最少移動步數為 3，三個圓盤，最少移動步數為 5，四個圓盤，最少移動步數為 9，五個圓盤，最少移動步數為 13，六個圓盤，最少移動步數為 17，七個圓盤，最少移動步數為 25，八個圓盤，最少移動步數為 33，九個圓盤，最少移動步數為 41，十個圓盤，最少移動步數為 49，十一個圓盤，最少移動步數為 65，十二個圓盤，最少移動步數為 81，十三個圓盤，最少移動步數為 97，十四個圓盤，最少移動步數為 113，十五個圓盤，最少移動步數為 129，十六個圓盤，最少移動步數為 161，十七個圓盤，最少移動步數為 193，十八個圓盤，最少移動步數為 225，十九個圓盤，最少移動步數為 257，二十個圓盤，最少移動步數為 289，二十一個圓盤，最少移動步數為 321，二十二個圓盤，最少移動步數為 385，二十三個圓盤，最少移動步數為 449，二十四個圓盤，最少移動步數為 513，二十五個圓盤，最少移動步數為 577，二十六個圓盤，最少移動步數為 641，二十七個圓盤，最少移動步數為 705，二十八個圓盤，最少移動步數為 769，二十九個圓盤，最少移動步數為 897，三十個圓盤，最少移動步數為 1025，最少移動步數這個數列，每個後項減前項是一個有規則數列，2,2,4,4,,4,8,8,8,8,16,16,16,16,16,32,32,32,32,32,32,64,64,64,64,64,64,128,128,128。

同時也驗證四柱河內塔除了最少移動步數，從 4 個圓盤開始，分堆方式也是遞迴數列， $4=1+3$ 、 $5=2+3$ 、 $6=3+3$ 、 $7=3+4$ 、 $8=4+4$ 、 $9=5+4$ 、 $10=6+4$ 、 $11=6+5$ 、 $12=7+5$ 、 $13=8+5$ 、 $14=9+5$ 、 $15=10+5$ 、 $16=10+6$ 、 $17=11+6$ 、 $18=12+6$ 、 $19=13+6$ 、 $20=14+6$ 、 $21=15+6$ 、 $22=15+7$ 、 $23=16+7$ 、 $24=17+7$ 、 $25=18+5$ 、 $26=19+7$ 、 $27=20+7$ 、 $28=21+7$ 、 $29=21+8$ 、 $30=22+8$ ，假設 n 個圓盤時，先移動 k 個圓盤到暫存柱，再移動 $n-k$ 個圓盤到目標柱， $n=k+(n-k)$ ，其中， $n-k$ 會是一個規律數列 3,3,3,4,4,4,4,,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,7,7,7,7,7,7,8,8。

總盤數 (n)	分堆方式 k 與 $(n-k)$	最少 步數	與前一項 差	總盤數 (n)	分堆方式 k 與 $(n-k)$	最少 步數	與前一項 差
1		1		16	$10+6$	161	32
2		3	2	17	$11+6$	193	32
3		5	2	18	$12+6$	225	32
4	$1+3$	9	4	19	$13+6$	257	32
5	$2+3$	13	4	20	$14+6$	289	32
6	$3+3$	17	4	21	$15+6$	321	32
7	$3+4$	25	8	22	$15+7$	385	64
8	$4+4$	33	8	23	$16+7$	449	64
9	$5+4$	41	8	24	$17+7$	513	64
10	$6+4$	49	8	25	$18+7$	577	64
11	$6+5$	65	16	26	$19+7$	641	64
12	$7+5$	81	16	27	$20+7$	705	64
13	$8+5$	97	16	28	$21+7$	769	64
14	$9+5$	113	16	29	$21+8$	897	128
15	$10+5$	129	16	30	$22+8$	1025	128

肆、研究結果

四柱河內塔最佳解法，來自「四柱搬小盤」與「三柱搬大盤」的取捨，暫存圓盤數 k 並非固定比例，而是隨 n 增加逐步成長。四柱河內塔的「最省步數」並非偶然，而是：在兩種成長速度不同的成本函數中，找到最佳平衡點。在四柱河內塔中，我們可以將問題分成三個部分：(一)先將上面 k 個圓盤搬到暫存柱（四柱問題），(二)將下面 $n-k$ 個大圓盤搬到目標柱（三柱問題），(三)再將 k 個圓盤合併回目標柱（四柱問題）。

設 $T_4(n)$ ：四柱河內塔， n 個圓盤的最少步數，則可得到： $T_4(n)=2 \times T_4(k)+(2^{n-k}-1)$ ，其中： $2T_4(k)$ ：前後各一次四柱河內塔搬移， $2^{n-k}-1$ ：中間的三柱河內塔搬移。

伍、討論

在研究四柱河內塔最少步數的過程中，我們透過實際操作、表格整理與計算比較，得到以下幾點討論結果：

一、四柱河內塔確實能大幅減少步數

與三柱河內塔相比，四柱河內塔的步數成長速度明顯較慢。例如：6 個圓盤時，三柱最少移動步數 63 步，四柱最少移動步數 17 步，顯示增加資源後，適當策略能顯著提高效率。

二、最少步數取決於「如何分堆」

研究發現，若先暫存的圓盤數太少：中間的大圓盤需用三柱搬移，步數呈指數增加。若暫存太多：小圓盤需重複搬移兩次，反而增加總步數。

三、最佳分堆並非固定比例

實驗與計算結果顯示：最佳暫存數不是圓盤的一半，而是隨圓盤數增加而緩慢增加，呈現規律但非線性關係。

陸、結論

根據本研究的操作、整理與分析，我們得到以下結論：1.四柱河內塔確實存在最少步數的搬移策略。2.最少步數策略可透過「先暫存小圓盤、再搬大圓盤、最後合併」的三階段方法完成。3.暫存圓盤數的選擇會影響總步數，最佳分法為使暫存成本與三柱搬移成本達到平衡。4.本研究顯示，數學問題的解決不僅依賴公式，也依賴策略比較與邏輯推理。5.四柱河內塔問題可作為理解指數成長、遞迴思考與最佳化問題的良好教材。

未來可進一步研究：1.五柱河內塔是否存在類似規律，2.是否能建立更簡單的近似公式，3.是否能利用程式模擬找出更大的圓盤數規律。

柒、參考資料

三柱河內塔遊戲。<https://www.novelgames.com/zh-HK/tower/>。

河內塔-維基百科。<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B1%89%E8%AF%BA%E5%A1%94>。