

屏東縣第66屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：埃及分數大解謎

關 鍵 詞：埃及分數、單位分數、因數（最多3個）

編號：A1017

埃及分數大解謎

目錄

	頁
摘要.....	2
壹、前言.....	3
一、研究動機.....	3
二、研究目的.....	3
三、文獻回顧.....	3
貳、研究設備與器材.....	4
參、研究過程或方法.....	5
一、第一階段：計算.....	5
二、第二階段：分析並找出分解規律.....	5
三、第三階段：推導規律與計算驗證並行.....	5
肆、研究結果.....	6
伍、討論.....	13
陸、結論.....	22
柒、參考資料及其他.....	23

埃及分數大解謎

摘要

本研究以古埃及數學中的「埃及分數」為主題，參考《萊因數學紙草書》與《莫斯科數學紙草書》所記載的單位分數表示法，探討單位分數 $\frac{1}{n}$ 是否皆可分解為兩個單位分數之和。我們以 $n=2\sim 20$ 為研究範圍，透過計算、列舉、因數分解與公式推導，找出所有整數解(甲, 乙)，並歸納其規律。研究發現：每個 $\frac{1}{n}$ 皆可分解；甲的最小值為 $n+1$ ，乙的最大值為 $n(n+1)$ ；且甲、乙皆為 $n(n+1)$ 的因數。同時建立 $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ 之快解公式(快速解題公式)，並可透過可驗證公式 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙} = \frac{乙}{甲 \times 乙} + \frac{甲}{甲 \times 乙} = \frac{甲+乙}{甲 \times 乙}$ 加以驗證並確認。研究結果顯示埃及分數蘊含明確且優美的數學規律。

關鍵詞：埃及分數、單位分數、因數。

壹、前言

一、研究動機

我們熱愛探索數學，尤其是升上中年級後，開始接觸並學習到一門新的數學魔法——「分數的加減」。特別是老師在上課時撥放了一段介紹「埃及分數」的教學影片，影片介紹古埃及人有趣的分解方式，他們不使用像現代的分數表示法，而是將分數表示為多個單位分數（分子為1的分數）的加總，例如： $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ 。這種表示方式稱為「埃及分數」。看完影片使我們產生好奇和疑問：

1. 是否每一個單位分數（ $\frac{1}{n}$ ）都可以分解成兩個單位分數？
2. 是否存在規律的解法？

因此，本研究希望透過列舉與數學推導，找出其中的規律。

二、研究目的

- (一) 找出 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ($n=2\sim 20$) 的所有解答。
- (二) 分析不同 n 的分解情形及規律。
- (三) 歸納建立快速解答的方法。

三、文獻回顧

古埃及的數學文獻，如《萊因數學紙草書》（Rhind Mathematical Papyrus）和《馬圖赫紙草書》（Moscow Mathematical Papyrus），均詳細記錄了埃及分數，可將任意分數表示為一系列單位分數之和的表示法。

而現代數學中，埃及分數常被用來研究數論與分數分解問題，其中單位分數分解具有許多有趣的數學性質。

貳、 研究設備及器材

一、紙與筆（計算與整理數據）

二、計算機

三、電腦文書軟體（整理表格與資料）

四、網路影片資料（埃及分數介紹影片）

參、研究過程或方法

一、第一階段：計算

初步計算並列出 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ($n=2\sim 10$) 的所有解答。

二、第二階段：分析並找出分解規律。

三、第三階段：推導規律與計算驗證並行。

(一) 依據規律列出 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ($n=11\sim 20$) 的所有解答。

(二) 計算驗證 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ($n=11\sim 20$) 的所有解答。

肆、 研究結果

第一階段計算並列出 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ($n=2\sim 10$) 的所有解答。

一、 $\frac{1}{2} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ (甲=3、乙=6)

(二) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (甲=4、乙=4)

二、 $\frac{1}{3} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ (甲=4、乙=12)

(二) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ (甲=6、乙=6)

三、 $\frac{1}{4} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ (甲=5、乙=20)

(二) $\frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ (甲=6、乙=12)

(三) $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ (甲=8、乙=8)

四、 $\frac{1}{5} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{6} + \frac{1}{30}$ (甲=6、乙=30)

(二) $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$ (甲=10、乙=10)

五、 $\frac{1}{6} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ (甲=7、乙=42)

(二) $\frac{1}{8} + \frac{1}{24}$ (甲=8、乙=24)

(三) $\frac{1}{9} + \frac{1}{18}$ (甲=9、乙=18)

(四) $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ (甲=10、乙=15)

(五) $\frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ (甲=12、乙=12)

六、 $\frac{1}{7} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{8} + \frac{1}{56}$ (甲=8、乙=56)

(二) $\frac{1}{14} + \frac{1}{14}$ (甲=14、乙=14)

七、 $\frac{1}{8} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{9} + \frac{1}{72}$ (甲=9、乙=72)

(二) $\frac{1}{10} + \frac{1}{40}$ (甲=10、乙=40)

(三) $\frac{1}{12} + \frac{1}{24}$ (甲=12、乙=24)

(四) $\frac{1}{16} + \frac{1}{16}$ (甲=16、乙=16)

八、 $\frac{1}{9} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{10} + \frac{1}{90}$ (甲=10、乙=90)

(二) $\frac{1}{12} + \frac{1}{36}$ (甲=12、乙=36)

(三) $\frac{1}{18} + \frac{1}{18}$ (甲=18、乙=18)

九、 $\frac{1}{10} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{11} + \frac{1}{110}$ (甲=11、乙=110)

(二) $\frac{1}{12} + \frac{1}{60}$ (甲=12、乙=60)

(三) $\frac{1}{14} + \frac{1}{35}$ (甲=14、乙=35)

(四) $\frac{1}{15} + \frac{1}{30}$ (甲=15、乙=30)

(五) $\frac{1}{20} + \frac{1}{20}$ (甲=20、乙=20)

第二階段，針對第一階段計算的結果，探討後發現甲、乙兩數的值必為 $n(n+1)$ 的因數，再依據此重要發現進行第三階段的推導並驗證 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ($n=11\sim 20$) 的解答。

十、 $\frac{1}{11} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{12} + \frac{1}{132}$ (甲=12、乙=132)

(二) $\frac{1}{22} + \frac{1}{22}$ (甲=22、乙=22)

十一、 $\frac{1}{12} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{13} + \frac{1}{156}$ (甲=13、乙=156)

(二) $\frac{1}{14} + \frac{1}{84}$ (甲=14、乙=84)

(三) $\frac{1}{15} + \frac{1}{60}$ (甲=15、乙=60)

(四) $\frac{1}{16} + \frac{1}{48}$ (甲=16、乙=48)

(五) $\frac{1}{18} + \frac{1}{36}$ (甲=18、乙=36)

(六) $\frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ (甲=20、乙=30)

(七) $\frac{1}{21} + \frac{1}{28}$ (甲=21、乙=28)

(八) $\frac{1}{24} + \frac{1}{246}$ (甲=24、乙=24)

十二、 $\frac{1}{13} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{14} + \frac{1}{182}$ (甲=14、乙=182)

(二) $\frac{1}{26} + \frac{1}{26}$ (甲=26、乙=26)

十三、 $\frac{1}{14} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

(一) $\frac{1}{15} + \frac{1}{210}$ (甲=15、乙=210)

$$(二) \frac{1}{16} + \frac{1}{112} \text{ (甲=16、乙=112)}$$

$$(三) \frac{1}{18} + \frac{1}{63} \text{ (甲=18、乙=63)}$$

$$(四) \frac{1}{21} + \frac{1}{42} \text{ (甲=21、乙=42)}$$

$$(五) \frac{1}{28} + \frac{1}{28} \text{ (甲=28、乙=28)}$$

十四、 $\frac{1}{15} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

$$(一) \frac{1}{16} + \frac{1}{240} \text{ (甲=16、乙=240)}$$

$$(二) \frac{1}{18} + \frac{1}{90} \text{ (甲=18、乙=90)}$$

$$(三) \frac{1}{20} + \frac{1}{60} \text{ (甲=20、乙=60)}$$

$$(四) \frac{1}{24} + \frac{1}{40} \text{ (甲=24、乙=40)}$$

$$(五) \frac{1}{30} + \frac{1}{30} \text{ (甲=30、乙=30)}$$

十五、 $\frac{1}{16} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

$$(一) \frac{1}{17} + \frac{1}{272} \text{ (甲=17、乙=272)}$$

$$(二) \frac{1}{18} + \frac{1}{144} \text{ (甲=18、乙=144)}$$

$$(三) \frac{1}{20} + \frac{1}{80} \text{ (甲=20、乙=80)}$$

$$(四) \frac{1}{24} + \frac{1}{48} \text{ (甲=24、乙=48)}$$

$$(五) \frac{1}{32} + \frac{1}{32} \text{ (甲=32、乙=32)}$$

十六、 $\frac{1}{17} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答

$$(一) \frac{1}{18} + \frac{1}{306} \text{ (甲=18、乙=306)}$$

$$(二) \frac{1}{34} + \frac{1}{34} \text{ (甲=34、乙=34)}$$

十七、 $\frac{1}{18} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$ 的解答

(一) $\frac{1}{19} + \frac{1}{342}$ (甲=19、乙=342)

(二) $\frac{1}{20} + \frac{1}{180}$ (甲=20、乙=180)

(三) $\frac{1}{21} + \frac{1}{126}$ (甲=21、乙=126)

(四) $\frac{1}{22} + \frac{1}{99}$ (甲=22、乙=99)

(五) $\frac{1}{24} + \frac{1}{72}$ (甲=24、乙=72)

(六) $\frac{1}{27} + \frac{1}{54}$ (甲=27、乙=54)

(七) $\frac{1}{30} + \frac{1}{45}$ (甲=30、乙=45)

(八) $\frac{1}{36} + \frac{1}{36}$ (甲=36、乙=36)

十八、 $\frac{1}{19} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$ 的解答

(一) $\frac{1}{20} + \frac{1}{380}$ (甲=20、乙=380)

(二) $\frac{1}{38} + \frac{1}{38}$ (甲=38、乙=38)

十九、 $\frac{1}{20} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$ 的解答

(一) $\frac{1}{21} + \frac{1}{420}$ (甲=21、乙=420)

(二) $\frac{1}{22} + \frac{1}{220}$ (甲=22、乙=220)

(三) $\frac{1}{24} + \frac{1}{120}$ (甲=24、乙=120)

(四) $\frac{1}{25} + \frac{1}{100}$ (甲=25、乙=100)

(五) $\frac{1}{28} + \frac{1}{70}$ (甲=28、乙=70)

(六) $\frac{1}{30} + \frac{1}{60}$ (甲=30、乙=60)

(七) $\frac{1}{36} + \frac{1}{45}$ (甲=36、乙=45)

(八) $\frac{1}{40} + \frac{1}{40}$ (甲=40、乙=40)

針對 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ (n=2~20)的解答整理成表一。

表一、 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ (n=2~20)的所有解答

n		2	3	4	5
(甲,乙)		(3,6)	(4,12)	(5,20)	(6,30)
		(4,4)	(6,6)	(6,12)	(10,10)
				(8,8)	
n	6	7	8	9	10
(甲,乙)	(7,42)	(8,56)	(9,72)	(10,90)	(11,110)
	(8,24)	(14,14)	(10,40)	(12,36)	(12,60)
	(9,18)		(12,24)	(18,18)	(14,35)
	(10,15)		(16,16)		(15,30)
	(12,12)				(20,20)
n	11	12	13	14	15
(甲,乙)	(12,132)	(13,156)	(14,182)	(15,210)	(16,240)
	(22,22)	(14,84)	(26,26)	(16,112)	(18,90)
		(15,60)		(18,63)	(20,60)
		(16,48)		(21,42)	(24,40)
		(18,36)		(28,28)	(30,30)
		(20,30)			
		(21,28)			
		(24,24)			
n	16	17	18	19	20
(甲,乙)	(17,272)	(18,306)	(19,342)	(20,380)	(21,420)
	(18,144)	(34,34)	(20,180)	(38,38)	(22,220)

(20,80)	(21,126)	(24,120)
(24,48)	(22,99)	(25,100)
(32,32)	(24,72)	(28,70)
	(27,54)	(30,60)
	(30,45)	(36,45)
	(36,36)	(40,40)

伍、 討論

針對研究結果，我們在師長的指導下，充分的分析與討論，並提出六項重大的發現，分別敘述於下。

一、甲的最小值為 $n+1$

從 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ($n=2\sim 20$)所有解答中，發現甲的最小值均為 $n+1$ ，我們進一步計算 $\frac{1}{n}$

($n=21\sim 30$)並整理成表二，經逐一比對後確認所有甲的最小值皆為「 $n+1$ 」。

表二、甲的最小值(標示之數值)

n	2	3	4	5	
(甲,乙)	(3,6)	(4,12)	(5,20)	(6,30)	
	(4,4)	(6,6)	(6,12)	(10,10)	
			(8,8)		
n	6	7	8	9	10
(甲,乙)	(7,42)	(8,56)	(9,72)	(10,90)	(11,110)
	(8,24)	(14,14)	(10,40)	(12,36)	(12,60)
	(9,18)		(12,24)	(18,18)	(14,35)
	(10,15)		(16,16)		(15,30)
	(12,12)				(20,20)
n	11	12	13	14	15
(甲,乙)	(12,132)	(13,156)	(14,182)	(15,210)	(16,240)
	(22,22)	(14,84)	(26,26)	(16,112)	(18,90)
		(15,60)		(18,63)	(20,60)
		(16,48)		(21,42)	(24,40)
		(18,36)		(28,28)	(30,30)
		(20,30)			
		(21,28)			
		(24,24)			

n	16	17	18	19	20
(甲,乙)	(17,272)	(18,306)	(19,342)	(20,380)	(21,420)
	(18,144)	(34,34)	(20,180)	(38,38)	(22,220)
	(20,80)		(21,126)		(24,120)
	(24,48)		(22,99)		(25,100)
	(32,32)		(24,72)		(28,70)
			(27,54)		(30,60)
			(30,45)		(36,45)
			(36,36)		(40,40)
n	21	22	23	24	25
(甲,乙)	(22,462)	(23,506)	(24,552)	(25,600)	(26,650)
	(24,168)	(24,264)	(46,46)	(26,312)	(30,150)
	(28,84)	(26,143)		(27,216)	(50,50)
	(30,70)	(33,66)		(28,168)	
	(35,49)	(44,44)		(30,120)	
	(42,42)			(32,96)	
				(33,88)	
				(36,72)	
				(40,60)	
				(48,48)	
n	26	27	28	29	30
(甲,乙)	(27,702)	(28,756)	(29,812)	(30,870)	(31,930)
	(28,364)	(30,270)	(30,420)	(58,58)	(32,480)
	(30,195)	(36,108)	(32,224)		(33,330)
	(39,78)	(54,54)	(35,140)		(35,210)
	(52,52)		(36,126)		(36,180)
			(42,84)		(40,120)
			(56,56)		(45,90)
					(50,75)
					(60,60)

二、乙的最大值為 $n(n+1)$

從 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ($n=2\sim 20$)所有解答中，發現乙的最大值均為 $n(n+1)$ ，我們進一步計

算 $\frac{1}{n}$ ($n=21\sim 30$)並整理成表三，經逐一比對後確認所有乙的最大值皆為「 $n(n+1)$ 」。

表三、乙的最大值(以■標示)

n	2	3	4	5	
(甲,乙)	(3,6)	(4,12)	(5,20)	(6,30)	
	(4,4)	(6,6)	(6,12)	(10,10)	
			(8,8)		
n	6	7	8	9	10
(甲,乙)	(7,42)	(8,56)	(9,72)	(10,90)	(11,110)
	(8,24)	(14,14)	(10,40)	(12,36)	(12,60)
	(9,18)		(12,24)	(18,18)	(14,35)
	(10,15)		(16,16)		(15,30)
	(12,12)				(20,20)
n	11	12	13	14	15
(甲,乙)	(12,132)	(13,156)	(14,182)	(15,210)	(16,240)
	(22,22)	(14,84)	(26,26)	(16,112)	(18,90)
		(15,60)		(18,63)	(20,60)
		(16,48)		(21,42)	(24,40)
		(18,36)		(28,28)	(30,30)
		(20,30)			
		(21,28)			
		(24,24)			
n	16	17	18	19	20
(甲,乙)	(17,272)	(18,306)	(19,342)	(20,380)	(21,420)
	(18,144)	(34,34)	(20,180)	(38,38)	(22,220)
	(20,80)		(21,126)		(24,120)

	(24,48)		(22,99)		(25,100)
	(32,32)		(24,72)		(28,70)
			(27,54)		(30,60)
			(30,45)		(36,45)
			(36,36)		(40,40)
n	21	22	23	24	25
	(22,462)	(23,506)	(24,552)	(25,600)	(26,650)
	(24,168)	(24,264)	(46,46)	(26,312)	(30,150)
	(28,84)	(26,143)		(27,216)	(50,50)
	(30,70)	(33,66)		(28,168)	
	(35,49)	(44,44)		(30,120)	
(甲,乙)	(42,42)			(32,96)	
				(33,88)	
				(36,72)	
				(40,60)	
				(48,48)	
n	26	27	28	29	30
	(27,702)	(28,756)	(29,812)	(30,870)	(31,930)
	(28,364)	(30,270)	(30,420)	(58,58)	(32,480)
	(30,195)	(36,108)	(32,224)		(33,330)
	(39,78)	(54,54)	(35,140)		(35,210)
(甲,乙)	(52,52)		(36,126)		(36,180)
			(42,84)		(40,120)
			(56,56)		(45,90)
					(50,75)
					(60,60)

三、其解中必含一組 $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$

從 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ (n=2~20)所有解答中，發現 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的所有解答中必有一組 $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$ ，我們進一步逐一比對 $\frac{1}{n}$ (n=21~30)後確認每個 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ 的解答中必有一組 $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$ 。茲整理成表四。

表四、 $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$ 的值(以 標示)

n		2	3	4	5
(甲,乙)		(3,6)	(4,12)	(5,20)	(6,30)
		(4,4)	(6,6)	(6,12)	(10,10)
				(8,8)	
n	6	7	8	9	10
(甲,乙)	(7,42)	(8,56)	(9,72)	(10,90)	(11,110)
	(8,24)	(14,14)	(10,40)	(12,36)	(12,60)
	(9,18)		(12,24)	(18,18)	(14,35)
	(10,15)		(16,16)		(15,30)
	(12,12)				(20,20)
n	11	12	13	14	15
(甲,乙)	(12,132)	(13,156)	(14,182)	(15,210)	(16,240)
	(22,22)	(14,84)	(26,26)	(16,112)	(18,90)
		(15,60)		(18,63)	(20,60)
		(16,48)		(21,42)	(24,40)
		(18,36)		(28,28)	(30,30)
		(20,30)			
		(21,28)			
		(24,24)			

n	16	17	18	19	20
(甲,乙)	(17,272)	(18,306)	(19,342)	(20,380)	(21,420)
	(18,144)	(34,34)	(20,180)	(38,38)	(22,220)
	(20,80)		(21,126)		(24,120)
	(24,48)		(22,99)		(25,100)
	(32,32)		(24,72)		(28,70)
			(27,54)		(30,60)
			(30,45)		(36,45)
			(36,36)		(40,40)
n	21	22	23	24	25
(甲,乙)	(22,462)	(23,506)	(24,552)	(25,600)	(26,650)
	(24,168)	(24,264)	(46,46)	(26,312)	(30,150)
	(28,84)	(26,143)		(27,216)	(50,50)
	(30,70)	(33,66)		(28,168)	
	(35,49)	(44,44)		(30,120)	
	(42,42)			(32,96)	
				(33,88)	
				(36,72)	
				(40,60)	
				(48,48)	
n	26	27	28	29	30
(甲,乙)	(27,702)	(28,756)	(29,812)	(30,870)	(31,930)
	(28,364)	(30,270)	(30,420)	(58,58)	(32,480)
	(30,195)	(36,108)	(32,224)		(33,330)
	(39,78)	(54,54)	(35,140)		(35,210)
	(52,52)		(36,126)		(36,180)
			(42,84)		(40,120)
			(56,56)		(45,90)
					(50,75)
					(60,60)

四、n 為質數時，甲、乙的數值僅有三種整數。

從 $\frac{1}{n} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$ (n=2~20)所有解答中，發現 n 為質數時，解的組數較少，其甲、乙的數值僅三種整數，我們進一步逐一比對 $\frac{1}{n}$ (n=21~30)後，亦確認 n 為質數時，甲、乙的數值僅三種整數。茲整理成表五。

表五、n 為質數之所有解答(以■標示)

n	2	3	4	5	
(甲,乙)	(3,6)	(4,12)	(5,20)	(6,30)	
	(4,4)	(6,6)	(6,12)	(10,10)	
			(8,8)		
n	6	7	8	9	10
(甲,乙)	(7,42)	(8,56)	(9,72)	(10,90)	(11,110)
	(8,24)	(14,14)	(10,40)	(12,36)	(12,60)
	(9,18)		(12,24)	(18,18)	(14,35)
	(10,15)		(16,16)		(15,30)
	(12,12)				(20,20)
n	11	12	13	14	15
(甲,乙)	(12,132)	(13,156)	(14,182)	(15,210)	(16,240)
	(22,22)	(14,84)	(26,26)	(16,112)	(18,90)
		(15,60)		(18,63)	(20,60)
		(16,48)		(21,42)	(24,40)
		(18,36)		(28,28)	(30,30)
		(20,30)			
		(21,28)			
		(24,24)			

n	16	17	18	19	20
(甲,乙)	(17,272)	(18,306)	(19,342)	(20,380)	(21,420)
	(18,144)	(34,34)	(20,180)	(38,38)	(22,220)
	(20,80)		(21,126)		(24,120)
	(24,48)		(22,99)		(25,100)
	(32,32)		(24,72)		(28,70)
			(27,54)		(30,60)
			(30,45)		(36,45)
			(36,36)		(40,40)
n	21	22	23	24	25
(甲,乙)	(22,462)	(23,506)	(24,552)	(25,600)	(26,650)
	(24,168)	(24,264)	(46,46)	(26,312)	(30,150)
	(28,84)	(26,143)		(27,216)	(50,50)
	(30,70)	(33,66)		(28,168)	
	(35,49)	(44,44)		(30,120)	
	(42,42)			(32,96)	
				(33,88)	
				(36,72)	
				(40,60)	
				(48,48)	
n	26	27	28	29	30
(甲,乙)	(27,702)	(28,756)	(29,812)	(30,870)	(31,930)
	(28,364)	(30,270)	(30,420)	(58,58)	(32,480)
	(30,195)	(36,108)	(32,224)		(33,330)
	(39,78)	(54,54)	(35,140)		(35,210)
	(52,52)		(36,126)		(36,180)
			(42,84)		(40,120)
			(56,56)		(45,90)
					(50,75)
					(60,60)

五、甲、乙的值均為 $n(n+1)$ 的因數。

在指導老師的指導下，我們提早學習「因數分解」，並實際進行各 $n(n+1)$ 的因數分解，進一步比對 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ($n=2\sim30$) 的所有解答後，確認甲、乙的值均為 $n(n+1)$ 的因數。

六、快解公式(快速解題公式)： $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ 。

結合以上一至五之發現，經分析與探討後，進一步建立快速解題公式：

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}。$$

七、驗證公式 $\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙} = \frac{乙}{甲 \times 乙} + \frac{甲}{甲 \times 乙} = \frac{甲+乙}{甲 \times 乙}$

在指導老師的引導下，我們發現並逐步經過驗證後，推導出可驗證公式：

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙} = \frac{乙}{甲 \times 乙} + \frac{甲}{甲 \times 乙} = \frac{甲+乙}{甲 \times 乙}$$

陸、 結論

本研究以埃及分數為主題，探討單位分數 $\frac{1}{n} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$ ($n=2\sim 20$) 之所有整數解，並歸納其規律。經過三階段的計算、分析與驗證，我們獲得以下重要結果：

一、 每一個單位分數皆可分解為兩個單位分數。

二、 甲的最小值恆為 $n+1$ 。

三、 乙的最大值恆為 $n(n+1)$ 。

四、 其解中必包含一組 $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$ 。

五、 當 n 為質時，其解的組數最少，僅有二組。

六、 甲與乙皆為 $n(n+1)$ 的因數。

七、 快解公式： $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ 。

八、 驗證公式： $\frac{1}{n} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}} = \frac{\text{乙}}{\text{甲} \times \text{乙}} + \frac{\text{甲}}{\text{甲} \times \text{乙}} = \frac{\text{甲} + \text{乙}}{\text{甲} \times \text{乙}}$

透過以上的第六項、第七項及第八項結果，即可快速的推導並列舉所有單位分數 $\frac{1}{n} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$ 的所有整數解。這是我們本次研究最大的發現與收穫。因此，透過本研究不僅驗證了古埃及數學中單位分數分解的可行性，也發現其中蘊含清楚而優美的數學規律。從大量計算列舉到歸納推導，我們體會到數學並非僅是單純死板的計算，而是尋找規律與建立公式的工程。

透過本次研究，我們不僅更深入理解埃及分數的特殊性質，也提早學習到因數分解與代數推理的應用，培養了解決問題與歸納整理的能力。未來更能進一步探討分解成三個以上單位分數的情形，或研究更大範圍的 n 值，相信將更能探索和發現更多深刻且有趣的數學規律。

柒、 參考資料及其他

康軒版國小數學第七冊(四上)。康軒文教。

林暉恩(2023),康軒-埃及分數【影片】,康軒文教事業 YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=cUcDOB0t2ic>

AI&課堂的距離(2025),【數學】古埃及分數的千年謎題【影片】, YouTube.

https://youtu.be/6gVeol_40d4?si=dtd4-RQHag-K3-TJ