

屏東縣第 66 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：「騙子或老實人」之延伸與研究

關 鍵 詞：排列方法、說出答案、偽裝者

編 號：B1004

摘要

本研究自科學研習雙月刊第 63 卷第 2 期森棚教官的數學專欄「騙子或老實人」中獲得靈感。原始題目設定有五個人圍著圓桌而坐，其中包含老實人與騙子，老實人永遠說實話，騙子永遠說謊話，他們要分別說出右邊的人的身分，並統計說出的 5 個答案。我們一開始先解出原題的答案，然後，研究得到 n 個人圍桌而坐時，所有可能排列方法和說出答案的個數。接著，我們又研究得到當人數為 a 個老實人和 b 個騙子時，所有可能說出答案的種類。最後，我們改變遊戲身分設定，研究得到當加入「偽裝者」後，所產生的改變。

壹、前言

一、研究動機

在上數學課時，老師帶我們玩一個有趣的數學遊戲，遊戲規則如下：

國立臺灣科學教育館 科學研習 第 63 卷第 2 期

森棚教官數學題——騙子或老實人

文／游森棚

五個熟識的朋友在小吃店圍著圓桌而坐，但是每個人可能是騙子（永遠說謊），也可能是老實人（永遠誠實）。老闆問每一個人坐在他的右手邊的人是騙子還是老實人，然後統計答案。

- 1、有沒有可能這五個答案全部都是「老實人」？
- 2、有沒有可能這五個答案中包含「兩個老實人、三個騙子」？
- 3、考慮這五個人的所有可能情形，會有幾個答案中包含「三個老實人，兩個騙子」？

這個遊戲引起我們對探討角色身分與排列組合的興趣，進而開啟了我們的研究之旅。

二、目的

- (一)解出原題答案。
- (二)研究 n 個人圍桌而坐時，所有可能排列方法的個數。
- (三)研究 n 個人圍桌而坐時，所有可能說出答案的個數。
- (四)研究 n 個人圍桌而坐，當人數為 a 個老實人和 b 個騙子時，所有可能說出答案的種類。
- (五)研究 n 個人圍桌而坐，當加入我們設定的「偽裝者」後，所產生的改變。

三、文獻回顧

我們上網搜尋資料做文獻探討時，找到了兩篇和我們研究題目有相關的報告：

- (一)王世勛與李陽明(2006)・不盡相異物的環狀排列公式・科學教育月刊，292。

在這篇報告的 P35-P38，有證明不盡相異物環狀排列的公式解法，和我們以畫圖方式計算的環狀排列數是相同的，使我們可以檢驗研究的數據。

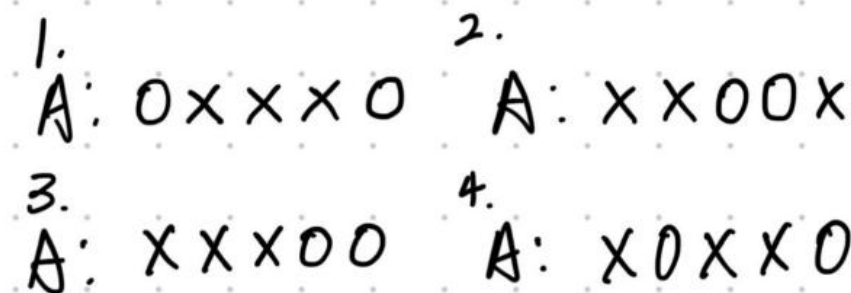
- (二)老實人與騙子：交錯的真相(2025)・金門地區第 65 屆中小學科學展覽會。

這篇國中組數學科展報告也是參考森棚教官的數學專欄「騙子或老實人」，但是，我們的研究內容和他們差異甚多。尤其在解原題 2 和 3 的過程中，他們似乎誤解了題目的意思，舉例說明如下：

- 1.原題 2，我們的答案是沒有可能，但是他們的答案是有 4 種可能。

(二)有沒有可能這五個答案中包含「兩個老實人、三個騙子」？

有 4 種可能，如圖(二)所示：



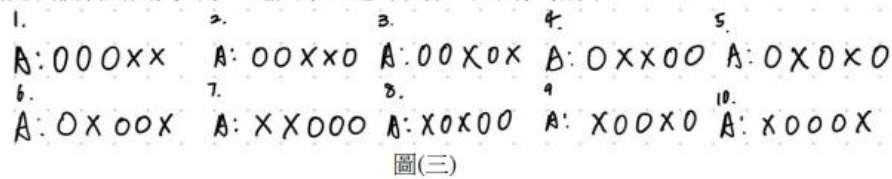
圖(二)

總共有 4 種可能。

2.原題 3，我們的答案是有 4 種可能，但是他們的答案是有 10 種可能。

(三)考慮這五個人的所有可能情形，會有幾個答案中包含「三個老實人、兩個騙子」？

首先我們利用圖找出第一題與第二題的規律，如圖(三)所示：



研究得到，共有 10 種可能

貳、研究設備及器材

電腦、紙、筆。

參、研究過程或方法

【名詞定義】：

(一) H(honest man)代表老實人；L(liar)代表騙子。

(二) aH 代表 a 個老實人；bL 代表 b 個騙子。

一、解出原題答案。

五個熟識的朋友在小吃店圍著圓桌而坐，但是每個人可能是騙子（永遠說謊），也可能是老實人（永遠誠實）。老闆問每一個人坐在他的右手邊的人是騙子還是老實人，然後統計答案。

1、有沒有可能這五個答案全部都是「老實人」？

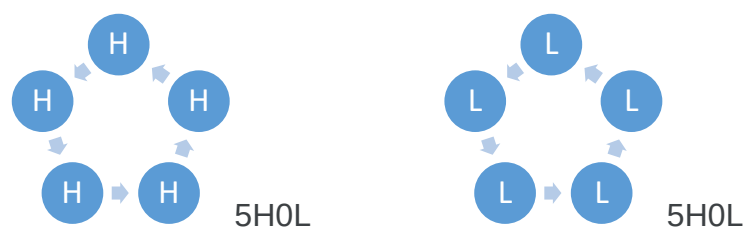
2、有沒有可能這五個答案中包含「兩個老實人、三個騙子」？

3、考慮這五個人的所有可能情形，會有幾個答案中包含「三個老實人，兩個騙子」？

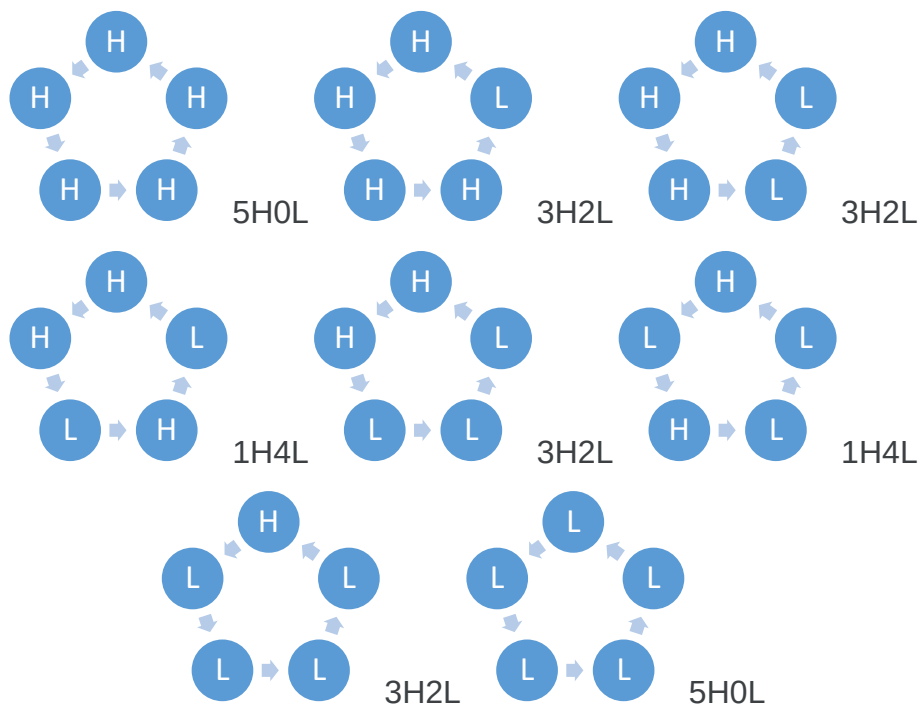
【結果 1】：

(一)有可能。若要說出「老實人」，一定是兩個老實人或兩個騙子相鄰而坐，

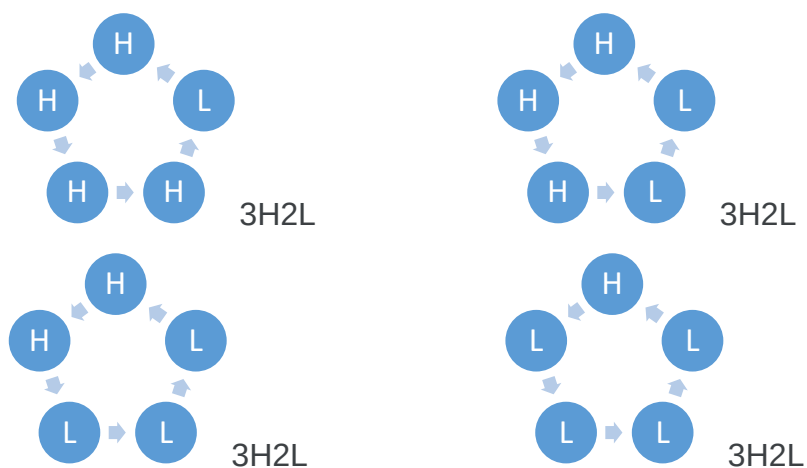
在兩兩相鄰且答案要相同的前提下，所以五個人的身分都是老實人或騙子。



(二)沒有可能。五個人圍桌而坐的所有可能排列方法和說出答案如下：



(三)有 4 種可能。所有可能排列方法和說出答案如下：



二、研究 n 個人圍桌而坐時，所有可能排列方法的個數。

(一)畫圖計算方式

首先，我們以畫圖計算排列方法如下：

1. $n=1$ ，所有可能排列方法有 2 種：

(1)

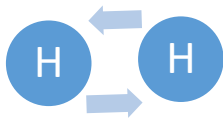


(2)

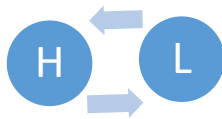


2. $n=2$ ，所有可能排列方法有 3 種：

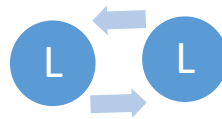
(1)



(2)

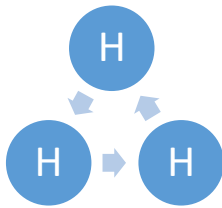


(3)

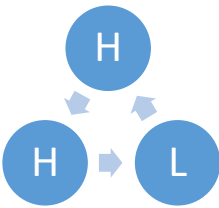


3. $n=3$ ，所有可能排列方法有 4 種：

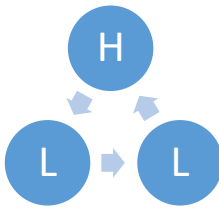
(1)



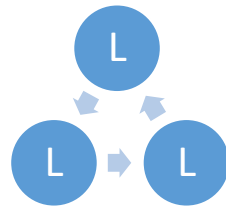
(2)



(3)

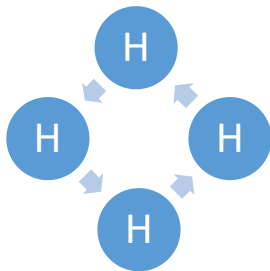


(4)

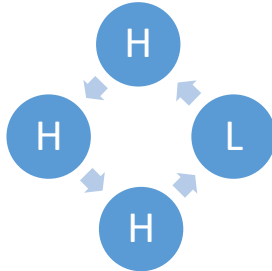


4. $n=4$ ，所有可能排列方法有 6 種：

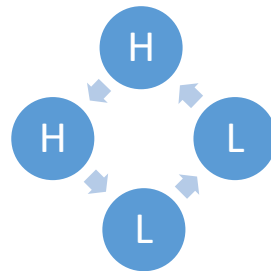
(1)



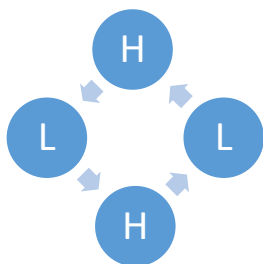
(2)



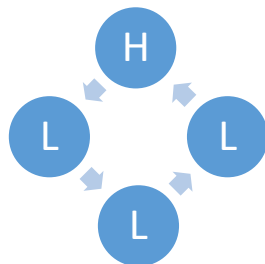
(3)



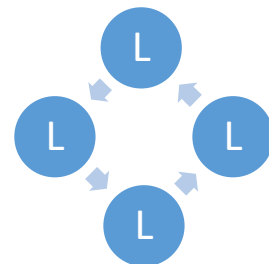
(4)



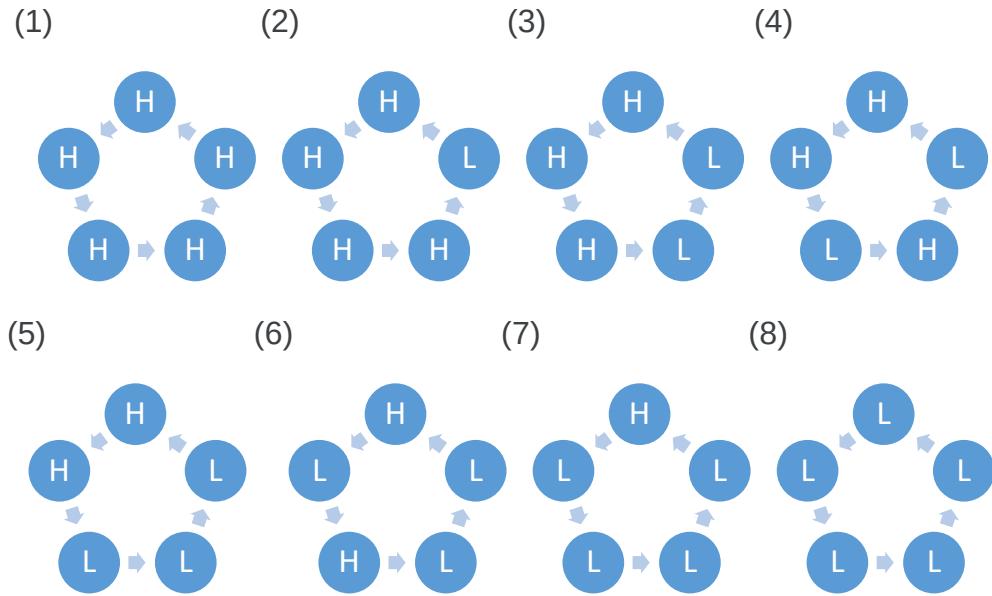
(5)



(6)



5. $n=5$ ，所有可能排列方法有 8 種：



(二)公式計算方式

再來，為了提高計算速度，我們上網查詢有關環狀排列的資料，在第 292 期科學教育月刊「不盡相異物的環狀排列公式」中，得到計算的公式：

n 個物品排成一列後循環節個數由小而大依序為 $W_1, W_2, \dots, W_k$ ，若循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之情形所成集合依序為 $S_1, S_2, \dots, S_k$ ，則環狀排列數 = $\sum_{i=1}^k \frac{W_i \times |S_i|}{n}$ 。

我們再詳細解釋公式的原理如下：

k 類物品共 n 個排成一列後有 W_i ($i=1, 2, 3, \dots, k$) 個循環節，若循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之情形所成集合為 S_i ，即 S_i 中每種情形都有 W_i 個循環節，每一循環節中有 $\frac{n}{W_i}$ 個物品，因此 S_i 中每 $\frac{n}{W_i}$ 種循環排列複製 W_i 次對應到同一種環狀排列，所以 S_i 的環狀排列數 =

$$|S_i| \div \frac{n}{W_i} = \frac{W_i \times |S_i|}{n}, \text{ 所有環狀排列數} = \sum_{i=1}^k \frac{W_i \times |S_i|}{n}。$$

1. 以 $n=8$ 為例子說明：

(1) 8H0L，環狀排列數 = 1。

(2)7H1L, $(7, 1)=1$, 1 的正因數只有 1, $W_1=1$, $|S_1| = \frac{8!}{7! \times 1!} = 8$,

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 8}{8} = 1。$$

(3)6H2L, $(6, 2)=2$, 2 的正因數有 1、2, $W_1=1$, $|S_1| = \frac{8!}{6! \times 2!} - \frac{4!}{3! \times 1!}$

$$= 24, W_2=2, |S_2| = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4, \text{環狀排列數} = \frac{1 \times 24}{8} + \frac{2 \times 4}{8} = 4。$$

(4)5H3L, $(5, 3)=1$, 1 的正因數只有 1, $W_1=1$, $|S_1| = \frac{8!}{5! \times 3!} = 56$,

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 56}{8} = 7。$$

(5)4H4L, $(4, 4)=4$, 4 的正因數有 1、2、4, $W_1=1$, $|S_1| = \frac{8!}{4! \times 4!}$

$$- \frac{4!}{2! \times 2!} = 64, W_2=2, |S_2| = \frac{4!}{2! \times 2!} - \frac{2!}{1! \times 1!} = 4, W_3=4, |S_3|$$

$$= \frac{2!}{1! \times 1!} = 2, \text{環狀排列數} = \frac{1 \times 64}{8} + \frac{2 \times 4}{8} + \frac{4 \times 2}{8} = 10。$$

(6)3H5L, $(3, 5)=1$, 1 的正因數只有 1, $W_1=1$, $|S_1| = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$,

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 56}{8} = 7。$$

(7)2H6L, $(2, 6)=2$, 2 的正因數有 1、2, $W_1=1$, $|S_1| = \frac{8!}{2! \times 6!} - \frac{4!}{1! \times 3!}$

$$= 24, W_2=2, |S_2| = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4, \text{環狀排列數} = \frac{1 \times 24}{8} + \frac{2 \times 4}{8} = 4。$$

(8)1H7L, $(1, 7)=1$, 1 的正因數只有 1, $W_1=1$, $|S_1| = \frac{8!}{1! \times 7!} = 8$,

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 8}{8} = 1。$$

(9)0H8L, 環狀排列數=1。

小結：綜合(1)到(9), 所有可能排列方法共有 36 種。

2.以 $n=9$ 為例子說明：

(1)9H0L, 環狀排列數=1。

(2)8H1L, $(8, 1)=1$, 1 的正因數只有 1, $W_1=1$, $|S_1| = \frac{9!}{8! \times 1!} = 9$,

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 9}{9} = 1。$$

$$(3)7H2L, (7, 2)=1, 1 \text{ 的正因數只有 } 1, W_1=1, |S_1| = \frac{9!}{7! \times 2!} = 36,$$

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 36}{9} = 4。$$

$$(4)6H3L, (6, 3)=3, 3 \text{ 的正因數有 } 1、3, W_1=1, |S_1| = \frac{9!}{6! \times 3!} - \frac{3!}{2! \times 1!}$$

$$= 81, W_2=3, |S_2| = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3, \text{環狀排列數} = \frac{1 \times 81}{9} + \frac{3 \times 3}{9} = 10。$$

$$(5)5H4L, (5, 4)=1, 1 \text{ 的正因數只有 } 1, W_1=1, |S_1| = \frac{9!}{5! \times 4!} = 126,$$

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 126}{9} = 14。$$

$$(6)4H5L, (4, 5)=1, 1 \text{ 的正因數只有 } 1, W_1=1, |S_1| = \frac{9!}{4! \times 5!} = 126,$$

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 126}{9} = 14。$$

$$(7)3H6L, (3, 6)=3, 3 \text{ 的正因數有 } 1、3, W_1=1, |S_1| = \frac{9!}{3! \times 6!} - \frac{3!}{1! \times 2!}$$

$$= 81, W_2=3, |S_2| = \frac{3!}{1! \times 2!} = 3, \text{環狀排列數} = \frac{1 \times 81}{9} + \frac{3 \times 3}{9} = 10。$$

$$(8)2H7L, (2, 7)=1, 1 \text{ 的正因數只有 } 1, W_1=1, |S_1| = \frac{9!}{2! \times 7!} = 36,$$

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 36}{9} = 4。$$

$$(9)1H8L, (1, 8)=1, 1 \text{ 的正因數只有 } 1, W_1=1, |S_1| = \frac{9!}{1! \times 8!} = 9,$$

$$\text{環狀排列數} = \frac{1 \times 9}{9} = 1。$$

$$(10)0H9L, \text{環狀排列數} = 1。$$

小結：綜合(1)到(10)，所有可能排列方法共有 60 種。

(三)程式計算方式

最後，為了再提高計算速度，我們查詢並參考有關 Python 程式的書籍，

寫出原始程式的雛形，經由 gemini 優化及修改，得到計算的程式如下：

```

from itertools import permutations

def min_rotation(seq):

    """回傳序列的最小旋轉版本（字典序）"""

    doubled = seq * 2

    n = len(seq)

    return min(tuple(doubled[i:i+n]) for i in range(n))

def generate_circular_ab_arrangements(n):

    unique_arrangements = set()

    # 產生所有不重複的圓排列

    for k in range(n + 1):

        base = ['H'] * k + ['L'] * (n - k)

        for p in set(permutations(base)):

            canon = min_rotation(p)

            unique_arrangements.add(canon)

    # 將排列轉為列表並依 H 數量排序（由多到少）

    sorted_arrangements = sorted(unique_arrangements, key=lambda
    x: (-x.count('H'), x))

    print(f"\n 圓桌排列下，{n} 人的 H/L 身分總共有
    {len(sorted_arrangements)} 種不重複組合（依 H 數量排序）：\n")

```

```

for i, arrangement in enumerate(sorted_arrangements, 1):
    h_count = arrangement.count('H')
    l_count = arrangement.count('L')
    print(f"{i}: {' '.join(arrangement)} (H={h_count}, L={l_count})")

n = int(input("請輸入人數 n : "))

generate_circular_ab_arrangements(n)

```

【結果 2】：綜合(一)到(三)不同的計算方式，我們得到 n 個人圍桌而坐時，所有可能排列方法的個數如下：

n	1	2	3	4	5
排列方法	2	3	4	6	8
n	6	7	8	9	10
排列方法	14	20	36	60	108
n	11	12	13	14	15
排列方法	188	352	632	1182	2192
n	16	17	18	19	20
排列方法	4116	7712	14602	27596	52488
n	21	22	23	24	
排列方法	99880	190746	364724	699252	

三、研究 n 個人圍桌而坐時，所有可能說出答案的個數。

(一)我們以畫圖計算所有可能說出答案的個數如下：

1. $n=1$ ，所有可能說出答案為 1H0L，共 1 種：

(1)



(2)

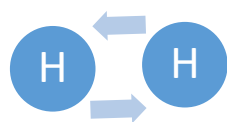


2.n=2，所有可能說出答案為 2H0L、0H2L，共 2 種：

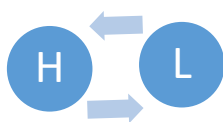
(1)

(2)

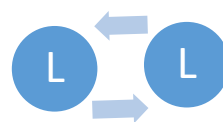
(3)



2H0L



0H2L

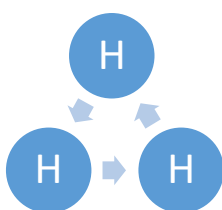


2H0L

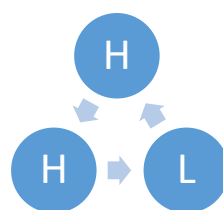
3.n=3，所有可能說出答案為 3H0L、1H2L，共 2 種：

(1)

(2)



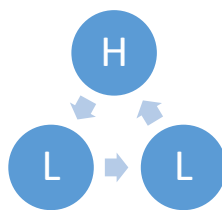
3H0L



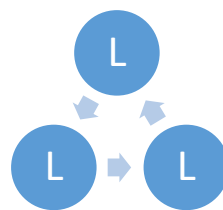
1H2L

(3)

(4)



1H2L



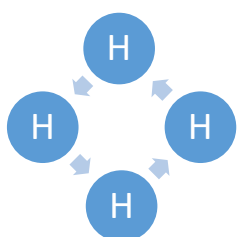
3H0L

4.n=4，所有可能說出答案為 4H0L、2H2L、0H4L，共 3 種：

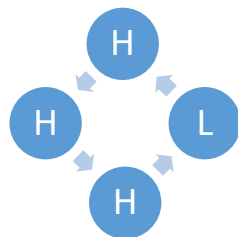
(1)

(2)

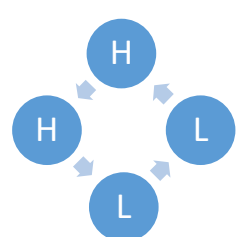
(3)



4H0L

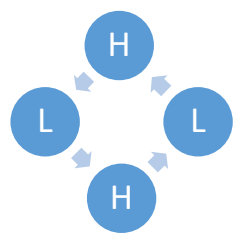


2H2L



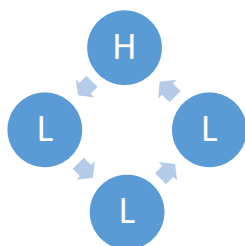
2H2L

(4)



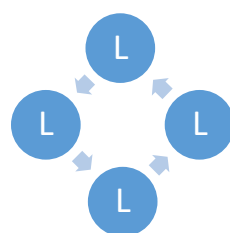
0H4L

(5)



2H2L

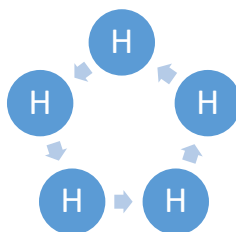
(6)



4H0L

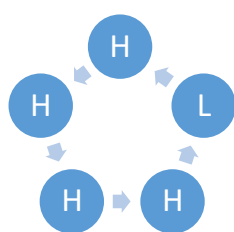
5. $n=5$ ，所有可能說出答案為 5H0L、3H2L、1H4L，共 3 種：

(1)



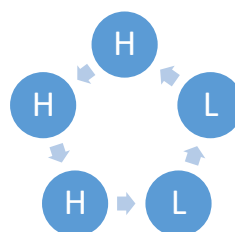
5H0L

(2)



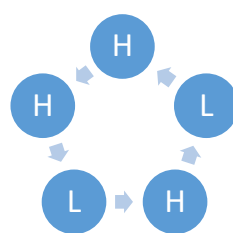
3H2L

(3)



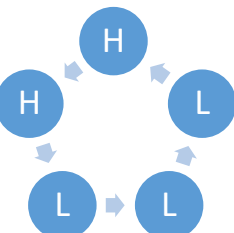
3H2L

(4)



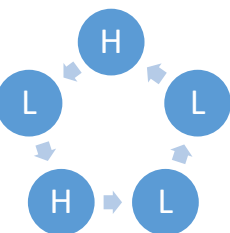
1H4L

(5)



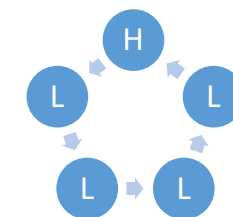
3H2L

(6)



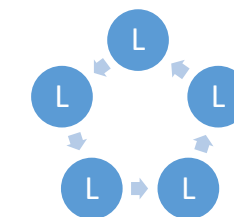
1H4L

(7)



3H2L

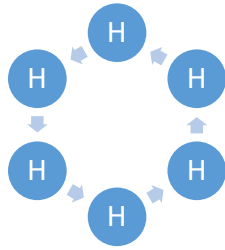
(8)



5H0L

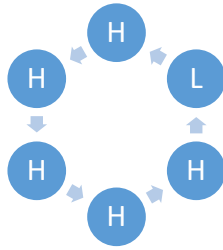
6. $n=6$ ，所有可能說出答案為 6H0L、4H2L、2H4L、0H6L，共 4 種：

(1)



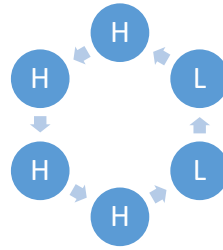
6H0L

(2)



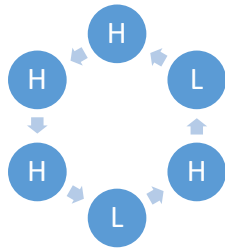
4H2L

(3)



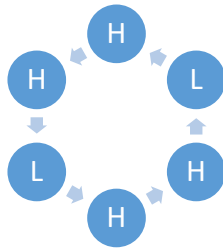
4H2L

(4)



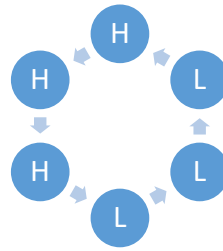
2H4L

(5)



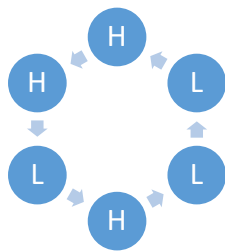
2H4L

(6)



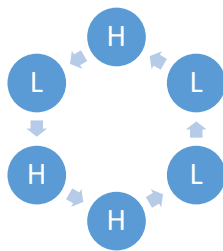
4H2L

(7)



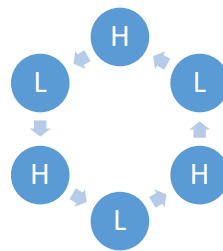
2H4L

(8)



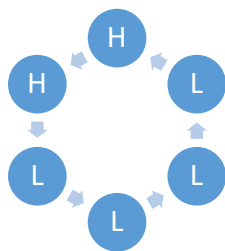
2H4L

(9)



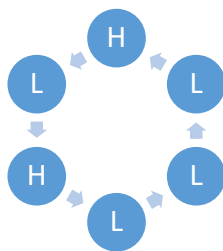
0H6L

(10)



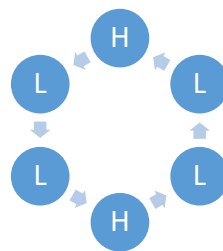
4H2L

(11)



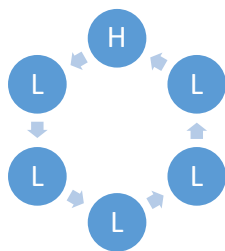
2H4L

(12)



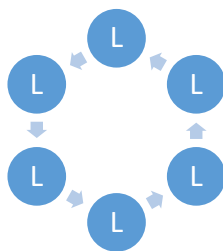
2H4L

(13)



4H2L

(14)



6H0L

由 1.到 6.的結果，我們可以整理出以下表格：

n	所有可能說出答案	L 個數	答案個數
1	1H0L	0	1
2	2H0L、0H2L	0、2	2
3	3H0L、1H2L	0、2	2
4	4H0L、2H2L、0H4L	0、2、4	3
5	5H0L、3H2L、1H4L	0、2、4	3
6	6H0L、4H2L、2H4L、0H6L	0、2、4、6	4

進而得到下列推論：

【推論 3】：

n 個人圍桌而坐，當 n 為任意正整數時，所有可能說出答案的 L 個數必為偶數。

【證明 3】：

當 H 右邊是 H 或 L 右邊是 L 時，說出答案會是 H；當 H 右邊是 L 或 L 右邊是 H 時，說出答案會是 L。因此，可以得知：

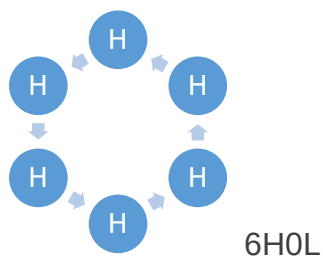
- 1.當 n 個人都是 H 或都是 L 時，說出答案會有 0L。
 - 2.當 n 個人中 L 與 H 都至少有 1 人時，所有 L 的排列情況只有兩種：
 - (1)1 個 L 坐在兩個 H 中間，即 HLH，左邊的 HL 會說右邊的人是 LL，說出答案會有 2L。
 - (2)有 m 個 L 坐在兩個 H 之間，即 HLL.....LLH，左邊的 m+1 個人 HLL.....LL 會說出右邊的人是 LHH.....HL，說出答案會有 2L。
- 因此，當 n 為任意正整數時，所有可能說出答案的 L 個數必為偶數。

四、研究 n 個人圍桌而坐，當人數為 a 個老實人和 b 個騙子時，所有可能說出答案的種類。

(一)我們以 $n=6$ 為例子說明如下：

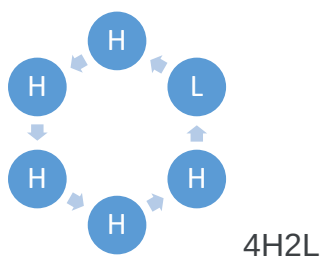
1.當人數為 6H0L 時，所有可能說出答案為 6H0L，共 1 種：

(1)



2.當人數為 5H1L 時，所有可能說出答案為 4H2L，共 1 種：

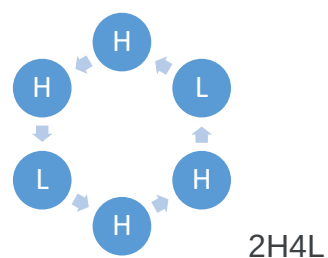
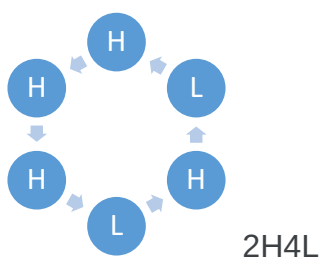
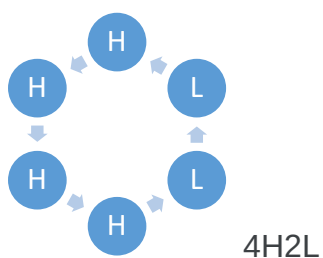
(1)



3.當人數為 4H2L 時，所有可能說出答案為 4H2L、2H4L，共 2 種：

(1)

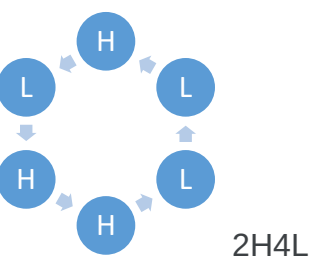
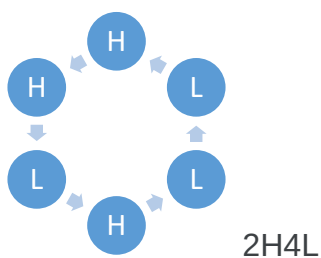
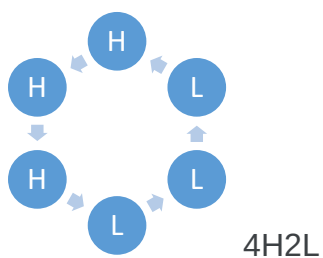
(2)



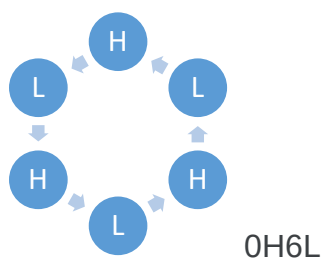
4.當人數為 3H3L 時，所有可能說出答案為 4H2L、2H4L、0H6L，共 3 種：

(1)

(2)



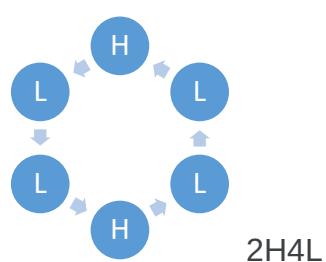
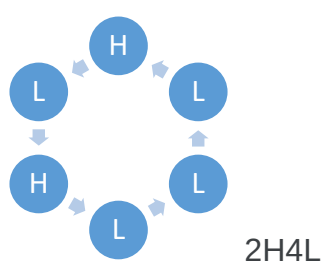
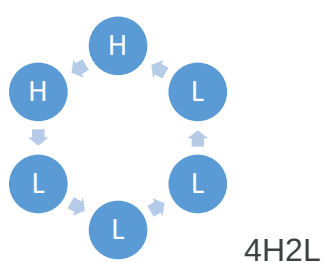
(3)



5.當人數為 2H4L 時，所有可能說出答案為 4H2L、2H4L，共 2 種：

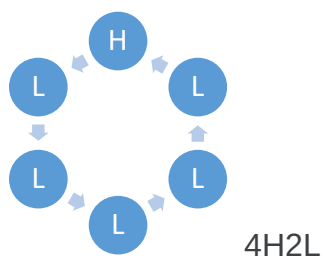
(1)

(2)



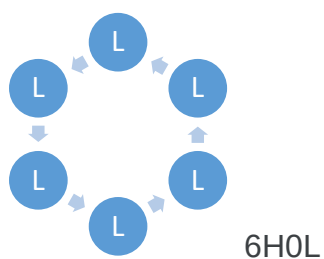
6.當人數為 1H5L 時，所有可能說出答案為 4H2L，共 1 種：

(1)



7.當人數為 0H6L 時，所有可能說出答案為 6H0L，共 1 種：

(1)



由 1.到 7.的結果，我們可以整理出以下表格：

n	a	b	所有可能說出答案	答案個數
6	6	0	6H0L	1
6	5	1	4H2L	1
6	4	2	4H2L、2H4L	2
6	3	3	4H2L、2H4L、0H6L	3
6	2	4	4H2L、2H4L	2
6	1	5	4H2L	1
6	0	6	6H0L	1

進而得到下列推論：

【推論 4.1】：

n 個人圍桌而坐，當人數為 $aHbL$ 時，令 k 為 a 和 b 中小於或等於 $\frac{n}{2}$ 的整數，則：**(1) $k=0$** ，說出答案一定為 $nH0L$ ；**(2) $k \neq 0$** ，所有可能說出答案為 $(n-2)H2L$ 、.....、 $(n-2k)H(2k)L$ 。

【證明 4.1】：

- (1)當 $k=0$ 時，表示 n 個人都是 H 或都是 L ，說出答案一定為 $nH0L$ 。
- (2)當 $k \neq 0$ 時，表示 k 個人可以分成 1 到 k 組，每一組和其他左右相鄰的人是不同身分，說出答案一定為 $2L$ ， k 個人最多分成 k 組，說出答案最多就會為 $(2k)L$ ，又因為 H 的個數 = 總人數 - L 的個數，所以，所有可能說出答案為 $(n-2)H2L$ 、.....、 $(n-2k)H(2k)L$ 。

【推論 4.2】：

n 個人圍桌而坐時，所有可能說出答案的個數為 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ ，其中 $\lceil \]$ 為高斯符號。

【證明 4.2】：

由【推論 4.1】可知，當 $k=0$ 時，說出答案一定為 $nH0L$ ，有 1 種；
當 $k \neq 0$ 時，所有可能說出答案為 $(n-2)H2L$ 、.....、 $(n-2k)H(2k)L$ ，
有 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 種。因此，我們可以將所有可能說出答案的個數合併為 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ ，
其中 $\left\lfloor \right\rfloor$ 為高斯符號。

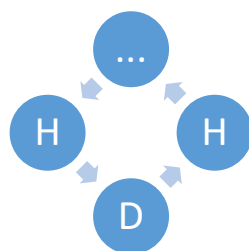
五、研究 n 個人圍桌而坐，當加入我們設定的「偽裝者」後，所產生的改變。

【名詞定義】：

- (一) D (disguiser)代表偽裝者，設定不可相鄰。
- (二) D 左邊的人會無視 D ，直接依照原始規則(身分相異說 L ；相同說 H)說出 D 右邊的人的身分。
- (三) D 的身分會改變成兩種情況：
 - 1.若 D 左右兩人身分相同時，則 D 的身分會相異於左右兩者。
 - (1)在 HDH 的情況下， D 的身分會改變成 L (相異於 H)。
 - (2)在 LDL 的情況下， D 的身分會改變成 H (相異於 L)。
 - 2.若 D 左右兩人身分相異時，則 D 的身分會相同於左邊的人。
 - (1)在 HDL 的情況下， D 的身分會改變成 H (相同於 H)。
 - (2)在 LDH 的情況下， D 的身分會改變成 L (相同於 L)。

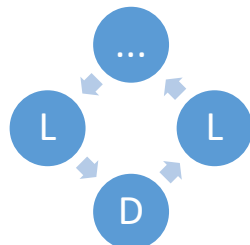
(一)我們按照新的設定規則加入一個偽裝者 D 。

1.情況一：



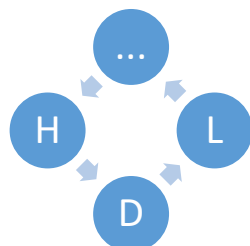
D 的左邊為 H，D 的右邊為 H，因為左右相同，所以 D 的身分會改變成 L，這時左邊的 H 會無視 D，直接說出 D 右邊的 H 是 H，而 D 會說出右邊的 H 是 L。因此，加入一個 D，說出答案會增加一個 L。

2.情況二：



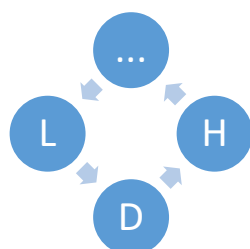
D 的左邊為 L，D 的右邊為 L，因為左右相同，所以 D 的身分會改變成 H，這時左邊的 L 會無視 D，直接說出 D 右邊的 L 是 H，而 D 會說出右邊的 L 是 L。因此，加入一個 D，說出答案會增加一個 L。

3.情況三：



D 的左邊為 H，D 的右邊為 L，因為左右相異，所以 D 的身分會改變成 H，這時左邊的 H 會無視 D，直接說出 D 右邊的 L 是 L，而 D 會說出右邊的 L 是 L。因此，加入一個 D，說出答案會增加一個 L。

4.情況四：



D 的左邊為 L，D 的右邊為 H，因為左右相異，所以 D 的身分會改變成

L，這時左邊的 L 會無視 D，直接說出 D 右邊的 H 是 L，而 D 會說出右邊的 H 是 L。因此，加入一個 D，說出答案會增加一個 L。

由 1.到 4.的結果，我們可以整理出以下表格：

排列順序	D 左右關係	D 改變身分	左邊人說出答案	D 說出答案
H→D→H	相同	L	H	L
L→D→L	相同	H	H	L
H→D→L	相異	H	L	L
L→D→H	相異	L	L	L

進而得到下列推論：

【推論 5】：

n 個人圍桌而坐，當加入一個偽裝者 D 後，所有可能說出答案的 L 個數改變為奇數。

【證明 5】：

由【推論 3.1】可得知， n 個人圍桌而坐，當 n 為任意正整數時，所有可能說出答案的 L 個數必為偶數。當加入一個偽裝者 D 後，不管 D 所坐的位置為何，D 說出的答案一定為 L，因此，所有可能說出答案的 L 個數一定會加 1，就會從偶數改變為奇數。

肆、研究結果

一、解出原題答案。

【結果 1】：

- (一)有可能。
- (二)沒有可能。
- (三)有 4 種可能。

二、研究 n 個人圍桌而坐時，所有可能排列方法的個數。

【結果 2】：

n	1	2	3	4	5
排列方法	2	3	4	6	8
n	6	7	8	9	10
排列方法	14	20	36	60	108
n	11	12	13	14	15
排列方法	188	352	632	1182	2192
n	16	17	18	19	20
排列方法	4116	7712	14602	27596	52488
n	21	22	23	24	
排列方法	99880	190746	364724	699252	

三、研究 n 個人圍桌而坐時，所有可能說出答案的個數。

【推論 3】：

n 個人圍桌而坐，當 n 為任意正整數時，所有可能說出答案的 L 個數必為偶數。

四、研究 n 個人圍桌而坐，當人數為 a 個老實人和 b 個騙子時，所有可能說出答案的種類。

【推論 4.1】：

n 個人圍桌而坐，當人數為 $aHbL$ 時，令 k 為 a 和 b 中小於或等於 $\frac{n}{2}$ 的整數，則：(1) $k=0$ ，說出答案一定為 $nH0L$ ；(2) $k \neq 0$ ，所有可能說出答案為 $(n-2)H2L$ 、.....、 $(n-2k)H(2k)L$ 。

【推論 4.2】：

n 個人圍桌而坐時，所有可能說出答案的個數為 $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ ，其中 $[]$ 為高斯符號。

五、研究 n 個人圍桌而坐，當加入我們設定的「偽裝者」後，所產生的改變。

【推論 5】：

n 個人圍桌而坐，當加入一個偽裝者 D 後，所有可能說出答案的 L 個數改變為奇數。

伍、討論

我們上網搜尋資料做文獻探討時，發現到 n 個人圍桌而坐時， H 和 L 所有可能排列方法的個數 = $\langle 2、3、4、6、8、14、20、36、60、108、188、352、632、…… \rangle$ ，剛好是應用波利亞計數定理(Polya Enumeration Theorem)計算 n 顆珠子、2 種顏色的項鍊數，並可以簡化為使用歐拉總計函數 $\phi(n)$ (小於或等於 n 且與 n 互質的正整數個數)的公式： $A(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(n) 2^{\frac{n}{d}}$ 。例如：當 $n=8$ ， $A(8) = \frac{1}{8} \sum_{d|8} \phi(n) 2^{\frac{n}{d}} = \frac{1}{8} [\phi(1)2^{\frac{8}{1}} + \phi(2)2^{\frac{8}{2}} + \phi(4)2^{\frac{8}{4}} + \phi(8)2^{\frac{8}{8}}] = \frac{1}{8} (1 \times 256 + 1 \times 16 + 2 \times 4 + 4 \times 2) = 36$ 。這部分的數學知識對於國中生來說是非常艱深的，將來我們會繼續朝這個領域去研究，期望能在這方面有更深入的進展和突破。

陸、結論

對於「騙子或老實人」這個題目，我們一開始先解出原題的答案，然後，研究得到 n 個人圍桌而坐時，所有可能排列方法和說出答案的個數。接著，我們又研究得到當人數為 a 個老實人和 b 個騙子時，所有可能說出答案的種類。最後，我們改變遊戲身分設定，研究得到當加入「偽裝者」後，所產生的改變。研究過程中雖然常常卡關，但是經過不斷地上網搜尋相關資料並和老師討論之後，我們終於順利地完成這份科展報告。

柒、參考文獻資料

- 一、游森棚(2025)・森棚教官的數學題-騙子或老實人・科學研習雙月刊,63(2)。
- 二、王世勛與李陽明(2006)・不盡相異物的環狀排列公式・科學教育月刊,292。
- 三、老實人與騙子：交錯的真相(2025)・金門地區第 65 屆中小學科學展覽會。