

屏東縣第 66 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：混沌棋局

關 鍵 詞：最簡單向布局邏輯、結構圖形、最簡棋盤

編 號：B1005

## 摘要

本研究自科學研習雙月刊第 63 卷第 6 期森棚教官的數學專欄「三段變速之豬羊變色」中獲得靈感。我們一開始先探討研究方法，然後，找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍從  $2 \times 2$  到  $4 \times 4$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。接著，綜合前面的研究結果，推導出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $a \times a$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件，並解答原題目的問題。最後，我們另外討論和證明了許多研究的結果與性質。

## 壹、前言

### 一、研究動機

我們在科學研習雙月刊的特約專欄中，看到以下的數學遊戲：

國立臺灣科學教育館 科學研習 第 63 卷第 6 期

---

### 森棚教官數學題——三段變速之豬羊變色

文／游森棚

小佟正在電腦上玩小遊戲，這個小遊戲是這樣玩的：一開始螢幕上有一個  $n \times n$  的棋盤，格子用黑色與白色塗成西洋棋盤的樣式，其中左上角那一格是黑色的。

每一次玩家可以用滑鼠選一個  $2 \times 2$  的田字形，然後按下滑鼠，被選中的田字形中的格子，

1. 如果是白色，就會變成灰色。
2. 如果是灰色，就會變成黑色。
3. 如果是黑色，就會變成白色。

遊戲的目的是讓棋盤一樣用黑白兩色塗成西洋棋盤的樣式，但是左上角那一格是白色（也就是說與一開始的顏色剛好互換），請你幫幫小佟完成  $3 \times 3$ 、 $4 \times 4$  與  $5 \times 5$  的遊戲。

這個遊戲引起我們的興趣和好奇心，便想繼續探索其中的奧秘，於是就展開了我們的研究旅程。

## 二、目的

- (一)探討研究方法。
- (二)找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $2 \times 2$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。
- (三)找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $3 \times 3$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。
- (四)找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $4 \times 4$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。
- (五)找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $5 \times 5$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。
- (六)找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $a \times a$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。

## 三、文獻回顧

我們上網搜尋資料做文獻探討時，找到了一篇和我們研究題目有相關的報告：

- (一)黑白大逆轉：棋盤變色任務！(2025)・花蓮縣第 65 屆中小學科學展覽會。

這篇國中組數學科展報告也是參考森棚教官的數學專欄「三段變速之豬羊變色」，但是，我們的研究方法與方向和他們不同，研究內容與範圍也比他們多。

## 四、遊戲性質解析

- (一)基本原理

從遊戲說明中可以得知 3 個主要因素會影響遊戲，分別是：

- 1.棋盤大小：遊戲在一個  $n \times n$  的棋盤上進行。
- 2.選取範圍：每一次玩家可選取改變顏色的  $a \times a$  田字形。
- 3.段數：所有顏色種類的總數量  $b$ 。

遊戲的原理很簡單，黑色變成反色需要  $1(\bmod b)$  次，而白色需要  $-1(\bmod b)$  次，只要讓起始棋盤上所有黑色棋格的總改變次數各為  $1(\bmod b)$ ，所有白色棋格的總改變次數各為  $-1(\bmod b)$ ，就完成遊戲，所以主要探討如何布局，當棋格的選取

總次數是變成反色需要的次數，稱為達成反色條件。

## (二)特殊情形定義

操作過程中會遇到一些特殊情形，為方便表達做以下定義：

- 1.重疊的選取範圍：有些地方會需要重複點選多次，重疊在一起的選取範圍視為一個選取範圍，而重複點選的次數即為此選取範圍的次數。
- 2.反色：就是兩個相反的顏色(例如黑變白，白變黑)，但遊戲中是超過兩種顏色不斷地循環出現。一開始棋盤有黑白兩色，而遊戲目標要使黑色棋格變白色，白色棋格變黑色，完成時棋盤依舊只有黑白兩色。將顏色循環取一完整片段，即是一個起始顏色(可為黑或白)依序變成多種過渡顏色，再變成終點顏色(另一種起始顏色)。

## (三)操作定義

原本遊戲的操作就只有選取一個選取範圍，讓被涵蓋到的所有棋格的顏色狀態變成下一種狀態，不過若將重合在一起的選取範圍視為一個選取範圍，就不只是選定一個範圍，還要決定次數，針對這兩項操作分別進行定義：

- 1.選定一個範圍就是只是在棋盤上形成一個幾何範圍，稱為**布置選取範圍**；而決定要讓被涵蓋的所有棋格顏色狀態改變多少，也就是這個選取範圍的次數決定為多少，稱為**填入次數**。
- 2.布置選取範圍並填入次數這樣完整的操作又稱為**布局**。

# 貳、研究設備及器材

電腦、紙、筆。

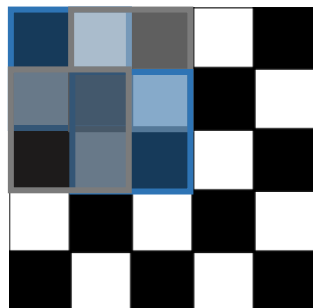
# 參、研究過程或方法

## 一、探討研究方法

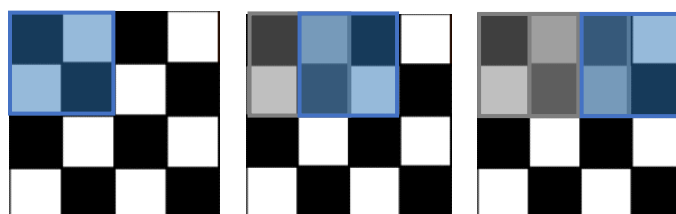
### (一)各選取範圍的布置

因為棋盤是黑白交錯的，兩種顏色的棋格變成反色需要的次數不同，且每個棋格至少要改變 1 次，所以從棋盤的角落開始布置選取範圍，每向左右或上下錯開 1

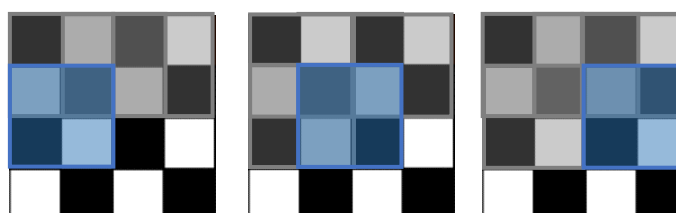
格棋格就要布置其它選取範圍，布置的選取範圍部分呈現如下圖：4 個灰和藍色的半透明正方形是 2x2 的選取範圍，呈現出向上下左右錯開 1 格棋格就布置其它選取範圍。



研究時我們是從棋盤左上角開始布置第一個選取範圍，然後向右每錯開 1 格便布置下一個選取範圍，直到最右邊的選取範圍對齊棋盤的右邊。



回到棋盤左側，在第一個布置的選取範圍下方錯開 1 格棋格，開始一樣的模式，不斷地向右布置第二橫列。



重複完成每橫列的布置，直到整個棋盤都達到了每向上下左右錯開 1 格棋格都要布置其它選取範圍的基本條件，所以研究時用到的選取範圍數量是最少的。

## (二)填入次數的考量

填入次數的順序和布置一樣，基本上布置一個選取範圍就要一併填入次數，因為研究時先在左上角布置選取範圍，發現選取範圍中被涵蓋的棋格只有左上角那一格被這個選取範圍涵蓋，或者還被前面布局的選取範圍涵蓋，但都不再被後續佈局的選取範圍涵蓋，所以此選取範圍填入的次數，必須以涵蓋範圍中左上角棋格

需要的次數為考量，設法讓此棋格總改變次數能使之變成反色。

### (三)布局的簡化

每一橫列的布局稱為橫向布局，而布局模式(就是橫向佈局中個選取範圍次數的比例)稱為橫向布局邏輯，每個橫向布局邏輯存在著倍數關係(指次數的部分)，是棋盤最上方的橫向布局邏輯的正整數倍，

如下圖，3×3 選取範圍在 6×6 棋盤(b=3)的第二個橫向布局邏輯是第一個橫向布局邏輯的 2 倍。

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 5 | 4 | 2 |
| 1 | 2 | 4 | 5 | 4 | 2 |
| 1 | 2 | 4 | 5 | 4 | 2 |

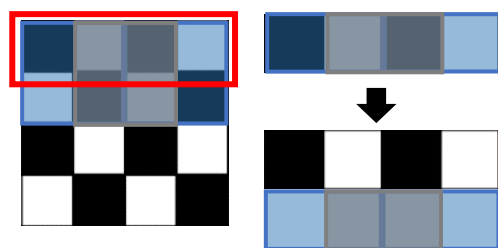
|   |   |   |    |   |   |
|---|---|---|----|---|---|
| 2 | 4 | 8 | 10 | 8 | 4 |
| 2 | 4 | 8 | 10 | 8 | 4 |
| 2 | 4 | 8 | 10 | 8 | 4 |

這是因為第一個橫向布局邏輯中第一個布局的次數是 1，各布局的次數是「最簡整數比」，形成最簡橫向布局邏輯，所以所有的橫向布局邏輯是最簡橫向布局邏輯的正整數倍，而每個橫向布局也都是縱向錯開一棋格設置，把最簡布局邏輯 1 倍的第一橫列布局當作一個「大選取範圍」從上至下進行縱向布局，因為棋盤是正方形，縱向布局邏輯遵循最簡橫向布局邏輯，次數就逐一乘入橫向布局中的每個選取範圍。

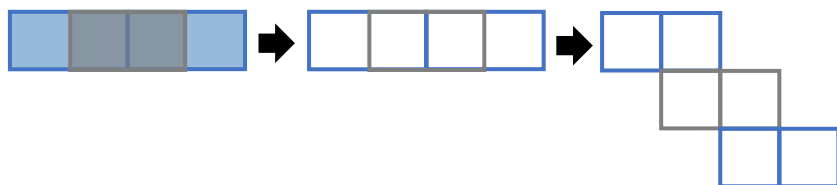
最簡橫/縱向布局邏輯就像是棋盤的兩邊長(因為棋盤是正方形，兩者相等)，相乘的結果就是整個棋盤的**最簡布局邏輯**，研究時只要找出**最簡單向布局邏輯**，不但可以知道棋盤的最簡布局邏輯，還可以得知最簡布局需要的總次數、總選取範圍數量等相關變數。

### (四)最簡單向布局邏輯視覺化

棋盤最上方的第一個橫向布局是 1 倍的最簡單向布局邏輯，研究就是探討它，又因為每個選取範圍布局時是以左上角棋格為考量，只須注意棋盤第一列，在這一條黑色開頭的一維棋盤上，選取範圍也簡化成  $ax1$  的形式。



具體畫出最簡橫向布局邏輯，只需呈現選取範圍與其次數，用正方形方框表示一個棋格，連續一排  $a$  個棋格即為簡化的  $a \times 1$  選取範圍的表示形式，選取範圍的次數填進每個正方形方框，如此也方便得知每個棋格的改變次數，向右佈置下一個選取範圍也就有對齊的依據，而為了清楚分辨不同選取範圍，將每個選取範圍都較前一個向下移 1 棋格的距離，形成一種階梯狀的圖形，稱為某個選取範圍  $axa$  的結構(布局邏輯)圖形。



## (五)研究流程

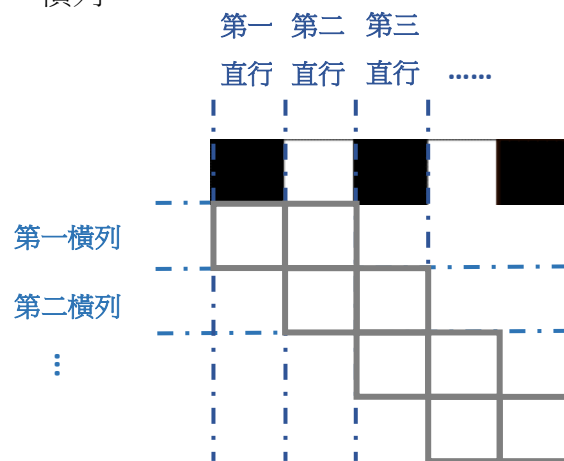
- 1.研究時會先固定一個  $a$  值(決定選取範圍大小)，用結構圖形畫出布局過程，並找出此  $a$  值的單向最簡布局邏輯，不過，我們並不知道每個  $a$  值的單向最簡布局邏輯共有幾個選取範圍，無法知道棋盤需要多大，這裡第一次突破遊戲限制，研究時不會決定棋盤大小，而是一直布局直到形成單向最簡布局邏輯；先布置第一個選取範圍作為棋盤左上角的起始選取範圍，以選取範圍中左上角棋格為考量填入最少次數，前言的遊戲性質已經知道黑白棋格各自要湊成的次數條件，依序布局後續的選取範圍。又因為棋格各自要湊成的次數條件受  $b$  值影響，固定的  $a$  值對應不同  $b$  值，會有各自的單向最簡布局邏輯，就還要分別研究不同  $b$  值的情況，為了研究上的方便，第二次突破遊戲限制，不要決定  $b$  值，將之用未知數  $b$  表示，就能將相同  $a$  值對應不同  $b$  值的各種情況，都用一個結構圖形呈現出來，如此也方便比較  $b$  值不同時各變因的改變及找出規律。
- 2.研究時畫出某固定  $a$  值的結構圖形，對應不同  $b$  值會有不同的最簡單向布局邏輯，若在這個  $a$  值和  $b$  值為條件下，縱橫都用這個布局邏輯，可以完成的這個棋

盤稱為這組  $a$ 、 $b$  的**最簡棋盤**，從結構圖形中可以知道這個**最簡棋盤**的邊長，以  $k(a, b)$  的形式表示。

3.研究時會排除最簡單向布局邏輯只有一個選取範圍(次數是 1)的情形，此時對應的  $b$  值一定是 2，因為這樣選取範圍會和棋盤一樣大，就失去了遊戲中局部改變的意義。

## 六、結構圖形的部件名稱與性質

結構圖形從左至右的正方形方框分別覆蓋到棋盤最上排由左至右的棋格，結構圖形中第  $m$  個棋格的對應位置稱為第  $m$  直行，同一棋格對應位置的一個正方形方框只是一個選取範圍，這個棋格實際上還會覆蓋其他的選取範圍，在圖形中呈現上下連接的多個正方形方框，第  $m$  棋格的總改變次數是結構圖形由左數來第  $m$  個直行所有正方形方框內的次數總和；結構圖形第一個選取範圍在最上方，後續的選取範圍會依序下移一格(正方形方框的邊長)呈現階梯狀，將每個選取範圍稱為結構圖形的一個橫列，最上方第一個選取範圍作為結構圖形的第一橫列，向下依序是第二、三、四……橫列。



二、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $2 \times 2$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。

(一)先畫出選取範圍  $2 \times 2$  結構圖形的第一列。



(二)其次數需符合左上角棋格的條件  $1 \pmod b$ ，因為要找出的是最簡次數，故第一列

填入 1。

|   |   |
|---|---|
| 1 | 1 |
|---|---|

(三)再畫出結構圖形第二列。

|   |   |  |
|---|---|--|
| 1 | 1 |  |
|   |   |  |

(四)要使第二直行次數總和符合第二棋格的條件，故第二列填入  $b-2$ 。

|   |       |       |
|---|-------|-------|
| 1 | 1     |       |
|   | $b-2$ | $b-2$ |

(五)接續畫出結構圖形並判斷次數，會是無限延伸的階梯狀圖形(以下僅列出 6 列)。

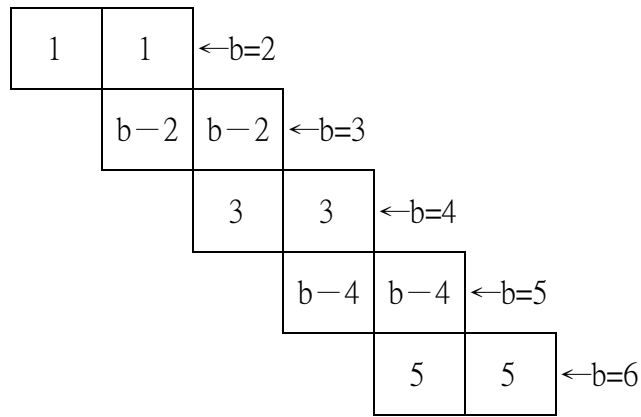
|   |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1   |     |     |     |     |     |
|   | b-2 | b-2 |     |     |     |     |
|   |     | 3   | 3   |     |     |     |
|   |     |     | b-4 | b-4 |     |     |
|   |     |     |     | 5   | 5   |     |
|   |     |     |     |     | b-6 | b-6 |

(六)所以需要判別到第幾列是最簡單項佈局邏輯。排除第一列，可以發現到第二

列時，前兩個棋格已經達成反色條件，第三個棋格要湊成  $1(\bmod b)$ ，最簡次數為 1，若段數為 3，則到此列即是，也就是  $a=2$ ， $b=3$  最簡單向布局邏輯，當選取範圍  $=2 \times 2$  時，最小可行的段數是 3，對應的最簡棋盤邊長為  $k(2, 3)=3$ 。

如果繼續往下看到第三列，此時前三個棋格已達成反色條件，第四個棋格要湊成  $-1(\bmod b)$ ，最簡次數為  $b-1$ ，若段數為 4，則到此列也是完整的結構圖形。

因為繼續往下的每一列(第  $t$  列)，前  $t$  個棋格皆是反色狀態，第  $t+1$  直行只有 1 格方框，都可以找出 1 個對應段數使得該格結構圖形的次數(第  $t$  個選取範圍的次數)符合該直行(第  $t+1$  直行)所需的條件，實際情況如下(僅列出 5 列)：



(七)綜合上面所述，當選取範圍  $2 \times 2$  時，我們可以整理出下表：

| 選取範圍數量   | 段數 $b$ | 最簡棋盤邊長 $k(2, b)$ | 選取總次數      |
|----------|--------|------------------|------------|
| 1 列      | 2      | 2                | 1          |
| 2 列      | 3      | 3                | $b-1$      |
| 3 列      | 4      | 4                | $b+2$      |
| 4 列      | 5      | 5                | $2b-2$     |
| 5 列      | 6      | 6                | $2b+3$     |
| .....    | .....  | .....            | .....      |
| $2p$ 列   | $2p+1$ | $2p+1$           | $pb-p$     |
| $2p+1$ 列 | $2p+2$ | $2p+2$           | $pb+(p+1)$ |

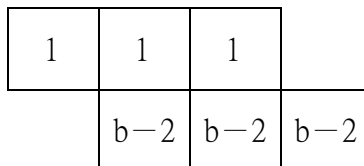
註：1 列完成的最簡布局不具研究意義，後續討論將之刪除。

三、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim nxn$ )，選取範圍  $3 \times 3$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。

(一)先畫出選取範圍  $3 \times 3$  結構圖形的第一列，並填入次數 1，再畫出第二列。



(二)要使第二直行次數總和符合第二棋格的條件，故第二列填入  $b-2$ 。



(三)畫出第三列並判斷其次數，第三直行次數總和必須為  $1 \pmod{b}$ ，故填入 2。

|   |     |     |     |   |
|---|-----|-----|-----|---|
| 1 | 1   | 1   |     |   |
|   | b-2 | b-2 | b-2 |   |
|   |     | 2   | 2   | 2 |

(四)接續畫出結構圖形並判斷次數，會是無限延伸的階梯狀圖形(以下僅列出 4 列)。

|   |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1   | 1   |     |     |     |
|   | b-2 | b-2 | b-2 |     |     |
|   |     | 2   | 2   | 2   |     |
|   |     |     | b-1 | b-1 | b-1 |

(五)到第四列時會發現每一直行的次數總和皆達成所需次數，所以當選取範圍  $3 \times 3$  時，段數  $b$  可以是任何  $>2$  的整數，且最簡棋盤邊長皆為  $k(3, b)=6$ ，選取總次數為  $2b$ 。

四、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $4 \times 4$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。

(一)先畫出選取範圍  $4 \times 4$  結構圖形的第一列，並填入次數 1，再畫出第二列。

|   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|   |   |   |   |  |

(二)要使第二直行次數總和符合第二棋格的條件，故第二列填入  $b-2$ 。

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1   | 1   | 1   |     |
|   | b-2 | b-2 | b-2 | b-2 |

(三)畫出第三列並判斷其次數，第三直行次數總和必須為  $1(\text{mod } b)$ ，故填入 2。

|   |     |     |     |     |   |
|---|-----|-----|-----|-----|---|
| 1 | 1   | 1   | 1   |     |   |
|   | b-2 | b-2 | b-2 | b-2 |   |
|   |     | 2   | 2   | 2   | 2 |

(四)接續畫出結構圖形並判斷次數，會是無限延伸的階梯狀圖形(以下僅列出 9 列)。

|   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 | 1   | 1   | 1   |     |     |     |     |     |     |     |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | b-2 | b-2 | b-2 | b-2 |     |     |     |     |     |     |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |     | 2   | 2   | 2   | 2   |     |     |     |     |     |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |     |     | b-2 | b-2 | b-2 | b-2 |     |     |     |     |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |     |     |     | 3   | 3   | 3   | 3   |     |     |     |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |     |     |     |     | b-4 | b-4 | b-4 | b-4 |     |     |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |     |     |     |     |     | 4   | 4   | 4   | 4   |     |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |     |     |     |     |     |     | b-4 | b-4 | b-4 | b-4 |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |     |     |     |     |     |     |     | 5   | 5   | 5   | 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |

(四)到第五列的時候，前面五直行已經達成反色條件，後面三直行的總和依序是 3 與  $1 \pmod{b}$  相間隔；到第九列的時候，前面九直行已經達成反色條件，後面三直行的總和依序是 5 與  $1 \pmod{b}$  相間隔。可以由此得知：到第  $t$  列時，前面  $t$  直行已經達成反色條件，若後面  $a-1$  直行的總和依序是常數與  $1 \pmod{b}$  相間隔，此時已是完整的結構圖形，且  $b = \text{常數} + 1$  (把常數當作  $b-1$ )。

(五)綜合上面所述，當選取範圍  $4 \times 4$  時，我們可以整理出下表：

| 選取範圍數量   | 段數 $b$ | 最簡棋盤邊長 $k(4, b)$ | 選取總次數       |
|----------|--------|------------------|-------------|
| 5 列      | 4      | 8                | $2b+2$      |
| 9 列      | 6      | 12               | $4b+3$      |
| .....    | .....  | .....            | .....       |
| $4p+1$ 列 | $2p+2$ | $4p+4$           | $2pb+(p+1)$ |

五、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim nxn$ )，選取範圍  $5 \times 5$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。

(一)先畫出選取範圍  $5 \times 5$  結構圖形的第一列，並填入次數 1，再畫出第二列。

|   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|   |   |   |   |   |  |

(二)要使第二直行次數總和符合第二棋格的條件，故第二列填入  $b-2$ 。

|   |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 1     | 1     | 1     | 1     |       |
|   | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ |

(三)畫出第三列並判斷其次數，第三直行次數總和必須為  $1 \pmod{b}$ ，故填入 2。

|   |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 1     | 1     | 1     | 1     |       |
|   | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ |
|   |       | 2     | 2     | 2     | 2     |

(四)接續畫出結構圖形並判斷次數，會是無限延伸的階梯狀圖形(以下僅列出 6 列)。

|   |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 1     | 1     | 1     | 1     |       |
|   | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ |
|   |       | 2     | 2     | 2     | 2     |
|   |       |       | $b-2$ | $b-2$ | $b-2$ |
|   |       |       |       | 2     | 2     |
|   |       |       |       |       | $b-1$ |

(五)到第六列時會發現每一直行的次數總和皆達成所需次數，所以當選取範圍  $5 \times 5$  時，段數  $b$  可以是任何  $>2$  的整數，且最簡棋盤邊長皆為  $k(5, b) = 10$ ，選取總次數為  $2b$ 。

六、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $a \times a$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。

(一)依序畫出  $a=2$  到 9 的最簡布局結構，並將相關變因的條件整理成下表：

| 選取範圍         | 選取範圍數量 | 段數 $b$   | 最簡棋盤邊長 $k(a, b)$ | 選取總次數                       |
|--------------|--------|----------|------------------|-----------------------------|
| $2 \times 2$ | $b-1$  | $>2$ 的奇數 | $b$              | $b$ 奇數, $\frac{(b-1)^2}{2}$ |
| $2 \times 2$ | $b-1$  | $>2$ 的偶數 | $b$              | $b$ 偶數, $\frac{(b-1)b}{2}$  |
| $3 \times 3$ | 4      | $>2$ 的整數 | 6                | $2b$                        |

|                                       |                        |        |                |                                     |
|---------------------------------------|------------------------|--------|----------------|-------------------------------------|
| 4x4                                   | $2b-3$                 | >2 的偶數 | $2b$           | $\frac{(2b-3)b}{2}$                 |
| 5x5                                   | 6                      | >2 的整數 | 10             | $3b$                                |
| 6x6                                   | $3b-5$                 | >2 的偶數 | $3b$           | $\frac{(3b-5)b}{2}$                 |
| 7x7                                   | 8                      | >2 的整數 | 14             | $4b$                                |
| 8x8                                   | $4b-7$                 | >2 的偶數 | $4b$           | $\frac{(4b-7)b}{2}$                 |
| 9x9                                   | 10                     | >2 的整數 | 18             | $5b$                                |
| .....                                 | .....                  | .....  | .....          | .....                               |
| $a \times a$ , $a$ 奇數                 | $a+1$                  | >2 的整數 | $2a$           | $\frac{(a+1)b}{2}$                  |
| $a \times a$ , $a$ 偶數<br>, $a \neq 2$ | $\frac{ab}{2} - (a-1)$ | >2 的偶數 | $\frac{ab}{2}$ | $\frac{[\frac{ab}{2} - (a-1)]b}{2}$ |

註：以上的選取範圍數量和選取總次數為單一方向達成反色的數量和次數，實際操作兩數值皆要平方。

(二)由上表可以觀察得到下列結果：

【結果 6.1】：從表中看到所有相關變因的條件遵循兩套規則，和  $a$  的奇偶性有關， $a=2$  是特例。

【結果 6.2】：如果  $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，布局到第  $a+1$  個選取範圍時，右邊剩下的  $a-1$  個棋格的選取總次數皆已達成反色條件， $b$  沒有太多限制(>2 的整數)，且奇數  $a$  配上任何可行的  $b$  值， $k(a, b)$  皆為  $2a$ 。

【結果 6.3】：若  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，永遠無法湊成代數上達成反色條件，只有在第  $\frac{ab}{2} - (a-1)$  列，透過特定  $b$  值讓右邊  $a-1$  直行各自的次數總和達成反色條件，因此相同  $a$  值和不同  $b$  值， $k(a, b)$  會不同。

【結果 6.4】：當  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，布局更多選取範圍，會找到更多不同的  $b$  值，且選取範圍數量愈多， $b$  值就愈大。

【結果 6.5】：當  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，第一個  $b$  值和第二個  $b$  值所在列次的間隔，和第二個  $b$  值與第三個  $b$  值的間隔相同，從第一個  $b$  值所在列次距離相同間隔的所有列次，都能依序找到其他  $b$  值。但第一個  $b$  值所在列次未必和這個間隔相同。

【結果 6.6】：當  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，所有  $b$  值所在列次都是奇數列，各  $b$  值間隔是偶數。

【結果 6.7】：當  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，選取總次數和  $b$  值所在列次密切相關；當  $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，則只和  $b$  值相關。

【性質 6.8】：

棋盤最上排棋格改以白色開頭，相關變因的條件不影響，最簡單向布局邏輯也相同，只是次數形式要對調，原來次數為常數改成  $b - \text{常數}$ ，原來是  $b - \text{常數}$  的改為常數，就變成以白色棋格開頭的結構圖形。其實就是把反色棋盤變回原始棋盤的逆向操作。

【證明 6.8】：

先把結構圖形中所有含  $b$  形式的次數  $-b$ ，因為黑色棋格對應的直行次數總和為 1，白色則為  $-1$ ，每一直行對應的棋格黑白色要對調，所以要湊成的次數條件也要對調，原來總和為 1 的直行次數條件從 1 變成  $-1$ ，將所有次數正負號調換即可解決，讓原來總和為 1 的直行次數總和也變成  $-1$ 。而實際次數不為負數， $- \text{常數}$  最少次數記為  $b - \text{常數}$ 。

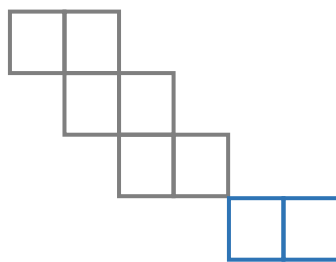
**重新定義最簡單向布局邏輯**：原先最簡單向布局邏輯的意義是進行正向操作時，一套完整(能使所有涵蓋棋格達成反色)的橫向布局邏輯，當中所有選取範圍次數的最簡整數比，也就是結構圖形中的次數，若將逆向操作一併考量，最簡單向布局邏輯就變成結構圖形所有含  $b$  形式的次數  $-b$  後加絕對值，定義這套最簡單向布局邏輯為**形式最簡單向布局邏輯**，實際操作時使用的最簡單向布局邏輯，定義為**操作最簡單向布局邏輯**，如果是正向操作，就將所有偶數列的次數  $x(-1) + b$ ；逆向操作則是將所有奇數列的次數  $x(-1) + b$ 。

【性質 6.9】：

一組  $a$ 、 $b$  只有唯一的  $k(a, b)$  邊長和形式最簡單向布局邏輯。

【證明 6.9】：

- 1.若  $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，最簡棋盤邊長是固定的  $2a$ ，所以  $a$  值不同時， $k(a, b)$  也不同，對於一組  $a, b$  只有一個對應大小的最簡棋盤；若  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，固定  $a$  值時，列次愈多  $b$  值也愈大，相同  $a$  值時，每個  $b$  值只有一個對應的  $k(a, b)$ ，若  $a$  值改變就是另一組  $a, b$  了。
- 2.固定一組  $a, b$ ，當結構圖形已經形成最簡單向布局邏輯時，若要繼續向下推展，因為最簡單向布局邏輯不再需要多餘的次數，故不需要重疊其他選取範圍，所以下一個選取範圍，會在完整的最簡單向布局邏輯最後一個選取範圍的右下角，如下圖(灰色部分是完整的最簡單向布局邏輯，藍色是下一個選取範圍)，而不論這個選取範圍填入次數時考量的是黑或白色棋格，在形式最簡單向布局邏輯中次數都是 1，如此布局下去又是一套相同的最簡單向布局邏輯。



【性質 6.10】：

兩組  $a, b$  的  $k(a, b)$  可能相同 ( $b \neq 4$ )。

【證明 6.10】：

相同的  $b$  值配上奇偶性相同的  $a$  值， $k(a, b)$  如同【性質 6.9】所述不可能相同，但若是相同  $b$  值分別配上奇偶性相異的兩  $a$  值， $k(a, b)$  相等也就是  $\frac{ab}{2} = 2a$  (兩  $a$  值不同)，不過因為兩  $a$  值相異 ( $b \neq 4$ )，根據鴿籠原理最多只會有兩組  $a, b$  的  $k(a, b)$  相等。

【性質 6.11】：

結構圖形中次數部份決定一切變因。

【證明 6.11】：

選取總次數和  $b$  的條件及次數部分息息相關，而另外兩項變因選取範圍數量與  $k(a, b)$  取決於結構圖形有幾列，在第幾列才是最簡單向布局邏輯，直接由結構圖形中的次數決定，次數間接決定了選取範圍數量與  $k(a, b)$ 。

**研究只針對次數部分：**最簡單向布局邏輯分為布置選取範圍與次數填入的部分，因為棋盤性質的緣故，布置選取範圍的模式是固定的，所以確實主要在研究次數的部分，而一切變因也都是由次數決定，所以研究次數的部分才能達成目的。

#### (四)研究結果具體化與應用

- 1.為了研究方便引入最簡單向布局邏輯的概念，最終目的是要知道一局遊戲中各種相關變因實際的值與條件，將最簡單向布局邏輯各邊因的值和條件推導出目標所求，只有幾項變因會改變，首先條件的部分是不會有差異的，變動的只有選取總次數與選取範圍數量，根據目的一的布局簡化部分，這兩項變因的實際值就是最簡單向布局邏輯中這兩者的平方。
- 2.有了以上研究結果可以知道任何一組  $a$  和  $b$  的最簡單向布局邏輯，也能求出所有變數的值與條件，就能判斷一個棋盤在這組  $a, b$  為條件下是否有辦法變成反色棋盤，如果可以也知道具體的做法。
- 3.針對最簡單向布局邏輯有不同的應用方式，基本的應用是對於固定一組  $a, b$ ，縱橫兩項的布局都用這套布局邏輯，就是用正方形的選取範圍完成正方形的最簡棋盤；當然還有進階應用，固定一個  $b$  值，縱橫布局可以使用不同的布局邏輯，也就是不同  $a$  值但  $b$  值相同的最簡單向布局邏輯，如此就是用長方形的選取範圍完成長方形的最簡棋盤。使用兩套最簡單向布局邏輯，選取總次數和選取範圍數量是兩套布局邏輯各自的這兩項變因相乘。

### (五) 【解原題目】

原題目中選取範圍是  $2 \times 2$  的田字形， $a=2$ ；共有 3 種顏色， $b=3$ ；要完成  $3 \times 3$ 、 $4 \times 4$  以及  $5 \times 5$  的棋盤。只要將  $a=2$ 、 $b=3$  代入上表整理出的結果， $k(2, 3)=3$ ，所以  $3 \times 3$  的棋盤以及兩邊長皆為 3 倍數的矩形棋盤，都可以按結構圖形的邏輯完成；而  $4 \times 4$  和  $5 \times 5$  的棋盤則不可能變成反色棋盤。

## 肆、研究結果

### 一、探討研究方法。

請詳見研究目的一。

### 二、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍 $2 \times 2$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數 $b$ 等)的條件。

| 選取範圍數量   | 段數 $b$ | 最簡棋盤邊長 $k(2, b)$ | 選取總次數      |
|----------|--------|------------------|------------|
| 1 列      | 2      | 2                | 1          |
| 2 列      | 3      | 3                | $b-1$      |
| 3 列      | 4      | 4                | $b+2$      |
| 4 列      | 5      | 5                | $2b-2$     |
| 5 列      | 6      | 6                | $2b+3$     |
| .....    | .....  | .....            | .....      |
| $2p$ 列   | $2p+1$ | $2p+1$           | $pb-p$     |
| $2p+1$ 列 | $2p+2$ | $2p+2$           | $pb+(p+1)$ |

### 三、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍 $3 \times 3$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數 $b$ 等)的條件。

到第四列時會發現每一直行的次數總和皆達成所需次數，所以當選取範圍  $3 \times 3$  時，段數  $b$  可以是任何  $>2$  的整數，且最簡棋盤邊長皆為  $k(3, b)=6$ ，選取總次數為  $2b$ 。

### 四、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍 $4 \times 4$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數 $b$ 等)的條件。

| 選取範圍數量 | 段數 $b$ | 最簡棋盤邊長 $k(4, b)$ | 選取總次數  |
|--------|--------|------------------|--------|
| 5 列    | 4      | 8                | $2b+2$ |
| 9 列    | 6      | 12               | $4b+3$ |

|          |        |        |             |
|----------|--------|--------|-------------|
| .....    | .....  | .....  | .....       |
| $4p+1$ 列 | $2p+2$ | $4p+4$ | $2pb+(p+1)$ |

五、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim nxn$ )，選取範圍  $5 \times 5$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。

到第六列時會發現每一直行的次數總和皆達成所需次數，所以當選取範圍  $5 \times 5$  時，段數  $b$  可以是任何  $>2$  的整數，且最簡棋盤邊長皆為  $k(5, b) = 10$ ，選取總次數為  $2b$ 。

六、找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim nxn$ )，選取範圍  $axa$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數  $b$  等)的條件。

| 選取範圍                           | 選取範圍數量                 | 段數 $b$   | 最簡棋盤邊長 $k(a, b)$ | 選取總次數                               |
|--------------------------------|------------------------|----------|------------------|-------------------------------------|
| $2 \times 2$                   | $b-1$                  | $>2$ 的奇數 | $b$              | $b$ 奇數, $\frac{(b-1)^2}{2}$         |
| $2 \times 2$                   | $b-1$                  | $>2$ 的偶數 | $b$              | $b$ 偶數, $\frac{(b-1)b}{2}$          |
| $3 \times 3$                   | $4$                    | $>2$ 的整數 | $6$              | $2b$                                |
| $4 \times 4$                   | $2b-3$                 | $>2$ 的偶數 | $2b$             | $\frac{(2b-3)b}{2}$                 |
| $5 \times 5$                   | $6$                    | $>2$ 的整數 | $10$             | $3b$                                |
| $6 \times 6$                   | $3b-5$                 | $>2$ 的偶數 | $3b$             | $\frac{(3b-5)b}{2}$                 |
| $7 \times 7$                   | $8$                    | $>2$ 的整數 | $14$             | $4b$                                |
| $8 \times 8$                   | $4b-7$                 | $>2$ 的偶數 | $4b$             | $\frac{(4b-7)b}{2}$                 |
| $9 \times 9$                   | $10$                   | $>2$ 的整數 | $18$             | $5b$                                |
| .....                          | .....                  | .....    | .....            | .....                               |
| $axa$ , $a$ 奇數                 | $a+1$                  | $>2$ 的整數 | $2a$             | $\frac{(a+1)b}{2}$                  |
| $axa$ , $a$ 偶數<br>, $a \neq 2$ | $\frac{ab}{2} - (a-1)$ | $>2$ 的偶數 | $\frac{ab}{2}$   | $\frac{[\frac{ab}{2} - (a-1)]b}{2}$ |

註：以上的選取範圍數量和選取總次數為單方向達成反色的數量和次數，實際操作兩數值皆要平方。

【結果 6.1】：從表中看到所有相關變因的條件遵循兩套規則，和  $a$  的奇偶性有關， $a=2$  是特例。

【結果 6.2】：如果  $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，布局到第  $a+1$  個選取範圍時，右邊剩下的  $a-1$  個棋格的選取總次數皆已達成反色條件， $b$  沒有太多限制 ( $>2$  的整數)，且奇數  $a$  配上任何可行的  $b$  值， $k(a, b)$  皆為  $2a$ 。

【結果 6.3】：若  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，永遠無法湊成代數上達成反色條件，只有在第  $\frac{ab}{2} - (a-1)$  列，透過特定  $b$  值讓右邊  $a-1$  直行各自的次數總和達成反色條件，因此相同  $a$  值和不同  $b$  值， $k(a, b)$  會不同。

【結果 6.4】：當  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，布局更多選取範圍，會找到更多不同的  $b$  值，且選取範圍數量愈多， $b$  值就愈大。

【結果 6.5】：當  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，第一個  $b$  值和第二個  $b$  值所在列次的間隔，和第二個  $b$  值與第三個  $b$  值的間隔相同，從第一個  $b$  值所在列次距離相同間隔的所有列次，都能依序找到其他  $b$  值。但第一個  $b$  值所在列次未必和這個間隔相同。

【結果 6.6】：當  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，所有  $b$  值所在列次都是奇數列，各  $b$  值間隔是偶數。

【結果 6.7】：當  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，選取總次數和  $b$  值所在列次密切相關；當  $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，則只和  $b$  值相關。

【性質 6.8】：棋盤最上排棋格改以白色開頭，相關變因的條件不影響，最簡單向布局邏輯也相同，只是次數形式要對調，原來次數為常數改成  $b - \text{常數}$ ，原來是  $b - \text{常數}$  的改為常數，就變成以白色棋格開頭的結構圖形。其實就是把反色棋盤變回原始棋盤的逆向操作。

【性質 6.9】：一組  $a, b$  只有唯一的  $k(a, b)$  邊長和形式最簡單向布局邏輯。

【性質 6.10】：兩組  $a, b$  的  $k(a, b)$  可能相同 ( $b \neq 4$ )。

【性質 6.11】：結構圖形中次數部份決定一切變因。

## 伍、討論

前面已經整理出各個變因的交互條件及規律，就能判斷遊戲起始條件 ( $a, b$  和  $n$ ) 是否可行，也能藉由結構圖形知道這組  $a, b$  的最簡單向布局邏輯，就知道要如何破解遊戲。最簡單向布局邏輯分為幾何與代數方面，對應的操作就是布置選取

範圍與填入次數，不過因為棋盤的性質，布置選取範圍的模式一直都是固定的，且遊戲一切相關變因都是由次數部分決定，前面研究最簡單向布局邏輯就是在研究次數的部分，想了解當選取範圍大小不同時 因重疊的密度不同，結構圖形中的次數會如何。既然專注於次數的部分，將次數依序從結構圖形中分離出來，形成一個數列定義為選取次數數列  $\langle d_n(a) \rangle$ ，第一個選取範圍的次數作為  $d_1$ ，不過用結構圖形來研究，必須一步一步慢慢地推出數列每一項且不能預測後續較大的項，針對次數的部分還要再更深入探討，目標推導出描述  $\langle d_n(a) \rangle$  的一般式，這樣也能解釋前面研究發現的現象和結果。

### 一、結構圖形基本樣態

所有結構圖形前幾列的次數是相同的，當次數開始改變是在第  $a+1$  列，因為選取範圍邊長  $=a$  無法涵蓋到第  $a+1$  棋格， $a+1$  直行次數加總時少了頂端的 1。

假設所有選取範圍向右無限延伸，將次數列為數列，定義為選取次數基本數列

$\langle C_n \rangle = 1, -2, 2, -2, 2, \dots$ ，這就是結構圖形最基本的樣態，如下圖：

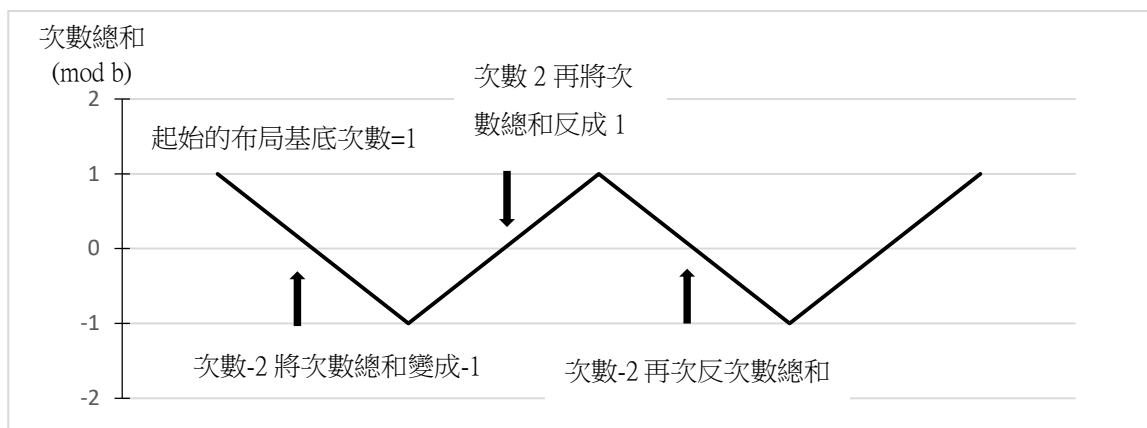
|   |    |    |    |       |       |
|---|----|----|----|-------|-------|
| 1 | 1  | 1  | 1  | ..... | 1     |
|   | -2 | -2 | -2 | ..... | -2    |
|   |    | 2  | 2  | ..... | 2     |
|   |    |    | -2 | ..... | -2    |
|   |    |    |    | ..... | ..... |
|   |    |    |    |       | 2     |

### 二、基本樣態選取範圍向左縮的影響

前面研究的結構圖形都是每個選取範圍從第  $a+1$  直行開始，依序缺少頂端的方框(前面的選取範圍開始無法覆蓋到)，需要先想了某一值行缺少頂端一個方框，選取次數基本數列  $\langle C_n \rangle$  有何變化。

當布局到第  $k$  個選取範圍也就是要在結構圖形第  $k$  直行下方第  $k$  個方框內填入次數，第  $k$  直行上方已經有  $k-1$  個方框，而這  $k-1$  個方框的次數總和就是前一直

行(第  $k-1$  直行)的次數總和，這個總和是  $\pm 1 \pmod{b}$  定義為**布局基底次數**，所以填入的次數加上布局基底次數需  $\equiv \mp 1 \pmod{b}$ ，因此填入的次數是  $\mp 2$ 。如下圖所示：



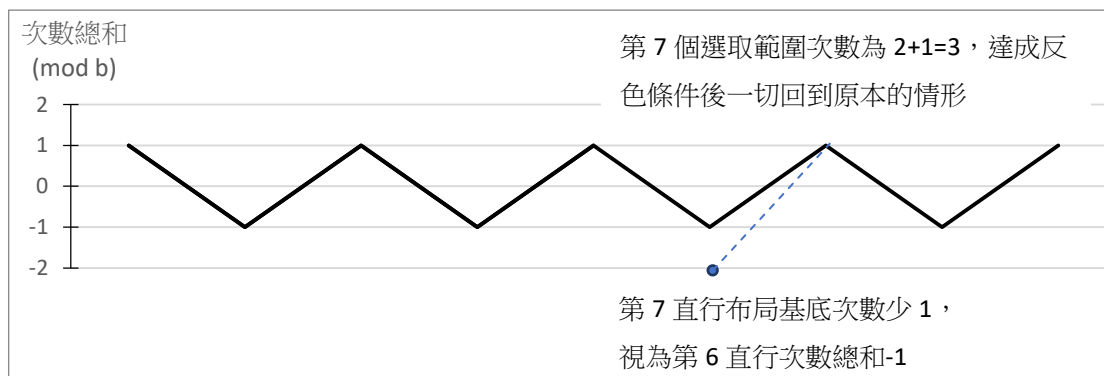
由左至右第  $k$  個端點是第  $k$  直行次數總和  $\pmod{b}$ ，也是第  $k+1$  直行的布局基底次數，第  $k$  線段代表第  $k+1$  個選取範圍(方框)的次數  $\pmod{b}$ 。第一個之後的選取範圍次數都為  $\pm 2$ ，直行的次數總和在  $\pm 1$  之間不斷變換。

### 三、第 $a+1$ 直行布局基底次數缺少 $C_1$ 對 $\langle C_n \rangle$ 之影響

在第  $a+1$  直行布局基底次數缺少  $C_1=1$ ， $C_{a+1}$  必須  $+1$ ，根據  $C_{a+1}$  正負性有不同影響。

(一)  $C_{a+1} \in \mathbb{Z}^+$ ， $a > 2$ ，設  $a+1=3$ ， $\langle C_n \rangle \rightarrow \mathcal{X}, -2, 3, -2, 2, -2, \dots$ ，只有  $C_{a+1}+1$ ，其餘項都不受影響。

原理：第  $a+1$  直行布局基底次數少 1 和第  $a$  直行布局基底次數少 1 有一樣的效果(第  $a$ 、 $a+1$  個選取範圍次數都必須多  $+1$ )，如下圖將第  $a+1$  直行基底次數少 1 當作第  $a$  直行次數總和也少 1，第  $a+1$  直行多  $+1$  一切回到原本的形式，所以其他項沒影響，次數依然是  $\pm 2$ 。



(二) $C_{a+1} \in \mathbb{Z}^-$ ， $a > 2$ ，設  $a+1=4$ ， $\langle C_n \rangle \rightarrow \mathcal{X}$ ， $-2, 2, -1, 2, -2, \dots$ ，只有  $C_{a+1}+1$ ，其餘項都不受影響。原理同  $C_{a+1} \in \mathbb{Z}^+$ 。

(三)結論： $\{C_{a+1} \in \mathbb{Z} \mid C_{a+1} \neq 0\}$ ， $a > 2$ ，在第  $a+1$  直行布局基底次數少  $k$ ，對  $\langle C_n \rangle$  影響僅為  $C_{a+1}+k$ ，其餘項都不受影響。

#### 四、第 $a$ 、 $a+1$ 直行布局基底次數依序缺少 $C_1$ 、 $C_2$ 對 $\langle C_n \rangle$ 之影響

遊戲中的結構圖形是從第  $a+1$  直行開始布局基底次數依序缺少  $C_1$ 、 $C_2, \dots$ ，先了解依序缺少兩項的影響。

根據第三點的結論，第  $k$  直行的布局基底次數缺少只對  $C_k$  產生影響，就算是連續兩直行的布局基底次數都相繼缺少，也都分別只影響這兩直行。

(一) $C_{a+1} \in \mathbb{Z}^+$ ， $a > 2$ ，設  $a+1=3$ ， $\langle C_n \rangle \rightarrow \mathcal{X}$ ， $-2, 3, -4, 2, -2, 2, -2, \dots$ ，只有  $C_{a+1}+1$ 、 $C_{a+2}-2$ ，其餘項都不受影響。

(二) $C_{a+1} \in \mathbb{Z}^-$ ， $a > 2$ ，設  $a+1=4$ ， $\langle C_n \rangle \rightarrow \mathcal{X}$ ， $-2, 2, -1, 0, -2, 2, -2, \dots$ ，只有  $C_{a+1}+1$ 、 $C_{a+2}-2$ ，其餘項都不受影響。

(三)結論： $\{C_{a+1} \in \mathbb{Z} \mid C_a \neq 0\}$ ， $a > 2$ ，在第  $a+1$ 、 $a+2$  直行依序缺少  $k$ 、 $m$ ，對  $\langle C_n \rangle$  影響僅為  $C_{a+1}+k$ ， $C_{a+2}+m$ ，其餘項都不受影響。

#### 五、第 $a+1$ 直行開始各直行的布局基底次數依序缺少 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3, \dots$ 對 $\langle C_n \rangle$ 之影響

綜合三和四的結論，從第  $a+1$  直行開始( $a > 2$ )，每一直行的布局基底次數依序減少  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3, \dots$ ，影響是  $C_{a+1}$  開始的每一項依序加上  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3, \dots$ 。不過選取次數數列  $\langle d_n(a) \rangle$  雖然每一項都是以選取次數基本數列  $\langle C_n \rangle$  中對應項為基底，加上布局基底次數缺少的次數，但  $\langle d_n(a) \rangle$  中布局基底次數缺少的次數是  $\langle d_n(a) \rangle$  前面的某一項，例如  $d_n$  以  $C_n$  為基底，加上布局基底次數缺少的次數  $d_{n-a}$ 。可以推導出一個一般式，固定  $a$  值就可以得出其選取次數數列  $\langle d_n(a) \rangle$ 。一般式分為兩個部分：

##### (一)初始階段

當  $1 \leq n \leq a$ ，遵循基本數列沒有佈局基底次數缺少的影響。

$$d_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^{n-1} \times 2, & 1 < n \leq a \end{cases} \dots\dots ①$$

## (二)修正階段

修正階段又以  $a$  項為單位，分為不同修正階段，因為修正階段中每  $a$  項會有相同組成。位處第一次修正階段的  $a$  個項  $d_{a+1} \sim d_{2a} = C_{a+1} \sim C_{2a}$  分別加上的  $d_1 \sim d_a$  屬於初始階段；而第二次修正階段的  $a$  個項  $d_{2a+1} \sim d_{3a} = C_{2a+1} \sim C_{3a}$  分別加上的  $d_{a+1} \sim d_{2a}$  屬於第一次修正階段，為了方便敘述與理解後續研究過程，將  $\langle d_n(a) \rangle$  與  $\langle C_n \rangle$  每  $a$  項分為一個階段。假設基本樣態從  $a+1$  直行開始的布局基底次數依序缺少最上方方框的次數，根據上面的結論， $\langle C_n \rangle$  中所有  $n > a$  的項，需要加上  $\langle d_n(a) \rangle$  在前一階段對應位置的項，也就是布局基底次數缺少的次數，如此選取次數基本數列  $\langle C_n \rangle$  就變成選取次數數列  $\langle d_n(a) \rangle$ 。 $d_n = C_n + d_{n-a}$ ，而  $d_{n-a}$  又可看成  $C_{n-a} + d_{n-2a}$ ， $d_{n-2a}$  也可當作  $C_{n-2a} + d_{n-3a} \dots\dots$ ，所以  $d_n = C_n$  加上  $\langle C_n \rangle$  中  $C_n$  之前所有階段裡和  $C_n$  在相對應位置的所有項，如下圖：

|             |           |           |           |            |           |           |           |           |
|-------------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 初始階段        | 1         | -2        | 2         | -2         | 2         | -2        | 2         | -2        |
| 第一次修正階段     | 2         | -2        | 2         | -2         | 2         | -2        | 2         | -2        |
| 第二次修正階段     | 2         | -2        | 2         | -2         | 2         | -2        | 2         | -2        |
| 第三次修正階段     | 2         | -2        | 2         | -2         | 2         | -2        | 2         | -2        |
| .....       | .....     |           |           |            |           |           |           |           |
| 第 $m$ 次修正階段 | $C_{n-3}$ | $C_{n-2}$ | $C_{n-1}$ | $C_n$      | $C_{n+1}$ | $C_{n+2}$ | $C_{n+3}$ | $C_{n+4}$ |
|             | 2         | -2        | 2         | -2         | 2         | -2        | 2         | -2        |
|             |           |           |           | 加總 = $d_n$ |           |           |           |           |

因為  $\langle d_n(8) \rangle$  和  $\langle C_n \rangle$  的初始階段一樣， $d_n$  一定包含初始階段對應項在內，以此為基礎，定義將初始階段作為基準， $\langle C_n \rangle$  每個修正階段對應項的值皆相同，定義  $\langle C_n \rangle$  修正階段中每一項為修正值，奇數項的修正值為 2；偶數項的修正值為 -2，在第  $m$  次修正階段的  $d_n = \text{基準} + \text{修正值} \times m$ 。下圖為  $\langle d_n(8) \rangle$ ，與上圖對照。

|           |           |           |           |       |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 初始階段      | 1         | -2        | 2         | -2    | 2         | -2        | 2         | -2        |
| 第一次修正階段   | 3         | -4        | 4         | -4    | 4         | -4        | 4         | -4        |
| 第二次修正階段   | 5         | -6        | 6         | -6    | 6         | -6        | 6         | -6        |
| 第三次修正階段   | 7         | -8        | 8         | -8    | 8         | -8        | 8         | -8        |
| .....     | .....     |           |           |       |           |           |           |           |
| 第 m 次修正階段 | $d_{n-3}$ | $d_{n-2}$ | $d_{n-1}$ | $d_n$ | $d_{n+1}$ | $d_{n+2}$ | $d_{n+3}$ | $d_{n+4}$ |

### (三)通用公式

利用以上性質，第 m 次修正階段其中一項  $C_n$  = 初始階段中對應項(基準) + 修正值  $\times m$ ，基準、修正值和 m 值均能從 b 值得出：

1.基準，由式①可求得：(1) $n \equiv 1(\text{mod } a)$ ，基準是 1。

(2) $n \in 2k(k \neq 0)$ ，基準是 2。

(3) $n \in 2k+1(k \neq 0)$ ，基準是 -2。

2.修正值， $d_n$  的修正值 =  $(-1)^{n-1} \times 2$ ：(1) $n \in 2k+1$ ，修正值為 2。

(2) $n \in 2k(k \neq 0)$ ，修正值為 -2。

3.m 值：欲知道  $d_n$  所在階段，可用取頂符號 ceiling(x) 表示， $m = \lceil \frac{n}{a} \rceil - 1$ ， $m=0$

表示  $d_n$  在初始階段。

4.結果：〈 $d_n(a)$ 〉中一項  $d_n$  = 基準  $\pm 2 \times (\lceil \frac{n}{a} \rceil - 1)$  .....②，固定 a 值，欲求 〈 $d_n(a)$ 〉

中的  $d_n$ ，先從式①求出基準，再套用式②即可直接求出  $d_n$ 。

$$\begin{cases} \text{基準} = \begin{cases} 1, n \equiv 1(\text{mod } a) \\ -2 \times (-1^n), n \not\equiv 1(\text{mod } a) \end{cases} \dots\dots\dots\textcircled{3} \\ d_n = \text{基準} \pm 2 \times (\lceil \frac{n}{a} \rceil - 1), n \in \text{奇數}, \text{取正} \end{cases}$$

### 六、〈 $d_n(a)$ 〉停止的條件

〈 $d_n(a)$ 〉和結構圖形一樣可以無限延伸，但我們的目的是只想求出一組 a、b 的最簡單向布局邏輯次數部分，所以要知道到哪裡就是完整最簡單向布局邏輯的次數部分，雖然目的六已經知道奇數 a 值和偶數 a 值與任一可行的 b 值，它們的最簡

單向布局邏輯分別有  $a+1$ 、 $\frac{ab}{2} - (a-1)$  個選取範圍，也就是  $\langle d_n(a) \rangle$  後有的項數，這次換以選取次數數列  $\langle d_n(a) \rangle$  的角度分析何時會是完整的最簡單向布局邏輯，也就能說明目的六中選取範圍數量的公式。從選取範圍數量公式，以  $a$  值的奇偶性分為兩套公式，可以知道  $a$  值的奇偶性讓  $\langle d_n(a) \rangle$  呈現不同性質。

(一) $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，其選取次數數列  $\langle d_n(a) \rangle$  中  $d_{a+1} \sim d_{2a} = \text{基準} + 1$  個修正值，因為  $a$  是奇數的緣故，基準和修正值為異號，且基準和修正值是選取次數基本數列  $\langle C_n \rangle$  前  $2a$  項，除了  $d_{a+1}$  以外其餘項的基準和修正值互為相反數， $\langle d_n(a) \rangle$  會在第  $a+2$  項開始出現  $a-1$  個 0，次數為 0 表示不用再改變顏色，即對應的那一棋格已經在代數上達成反色條件，再出現最簡單向布局邏輯的次數數列如此循環，畫成結構圖形就是【性質 6.9】中所描述的，更應證了它的正確性。

|         |    |    |    |    |    |    |    |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|
| 初始階段    | 1  | -2 | 2  | -2 | 2  | -2 | 2  |
| 第一次修正階段 | -2 | 2  | -2 | 2  | -2 | 2  | -2 |

例如： $\langle d_n(7) \rangle = 1, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -1, \dots$ 。

奇數  $a$  值的  $\langle d_n(a) \rangle$  會呈現前  $a$  項是初始階段， $d_{a+1} = 1 + (-2) = -1$  後面接上  $a-1$  個 0，證明了最簡單向布局邏輯的次數數列為  $a+1$  項，選取範圍數量也是  $a+1$  項。

(二) $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，其選取次數數列  $\langle d_n(a) \rangle$  中每一項的基準和修正值正負號相同，因此  $\langle d_n(a) \rangle$  呈現發散數列，不會出現 0， $b$  值會隨著列次愈多而增大，應證了推論 2 的正確， $\langle d_n(a) \rangle$  要停止必須透過特定  $b$  值，讓右邊連續  $a-1$  直行次數總和要是 1 和  $-1 \pmod{b}$  間隔，這  $a-1$  直行各自的次數總和依序是最後  $a-1$  項的總和、最後  $a-2$  項的總和、……、最後 1 項，若排除所有階段的第一項，剩下所有項基準以及修正值均為偶數，不論如何加總都會是偶數，但是右邊這  $a-1$  直行總和是  $\pm 1 \pmod{b}$ ，所以這些直行的總和也就是最簡單向布局邏輯次數數列的最後  $a-1$  項的總和、最後  $a-2$  項的總和、……、最後 1 項，都包含到奇數個

階段中的第一項( $d_{ka+1}$ )，因為  $a-1$  項最多只會包含一個，所以這些直行總和都包含同一個階段中的第一項( $d_{ka+1}$ )，那麼這一項  $d_{ka+1}$  一定是最簡單向布局邏輯次數數列最後  $a-1$  項的總和、最後  $a-2$  項的總和、……、最後 1 項，共同加總的項，就是最後一項，所以偶數  $a$  值的最簡單向布局邏輯一定有  $ka+1$  項，選取範圍數量也是  $ka+1$ 。

## 七、研究目的六證明

### 【證明】：

#### 1.列次(選取範圍數量):

(1) $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，參見第六點證明奇數  $a$  的結構圖形只有  $a+1$  列。

(2) $a \in 2k (k \neq 0)$ ，參見第六點，偶數  $a$  的結構圖形有  $ka+1$  列。將  $ka+1$  和  $b$  連結變成  $a$ 、 $b$  的二元一次式：

i.根據目的六結果 4，當  $k=1$  時， $b$  是  $>2$  的最小偶數；當  $k=2$  時， $b$  是  $>2$  的第二小偶數，因此可以得到  $b=2k+2$  的關係式。

ii. $b=2k+2$ ，所以  $k=\frac{b-2}{2}=\frac{b}{2}-1 \cdots \cdots \textcircled{4}$

iii.將 $\textcircled{4}$ 代入  $ka+1$  得  $\frac{ab}{2}-a+1$ ，得證。

#### 2. $k(a, b)$ 最簡棋盤邊長：

最簡棋盤邊長=結構圖形左邊透過次數填入時考量過以達成反色的棋格+右邊剩下的  $a-1$  個棋格=結構圖形總階次+ $a-1$ 。

(1) $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，因為結構圖形列次= $a+1$ ，所以  $k(a, n)=(a-1)+(a+1)=2a$ ，得證。

(2) $a \in 2k (k \neq 0)$ ，因為結構圖形列次= $\frac{ab}{2}-a+1$ ，所以  $k(a, b)=\frac{ab}{2}-a+1+a-1=\frac{ab}{2}$ ，得證。

#### 3.總次數：

(1) $a \in 2k+1 (k \neq 0)$ ，根據第六點的數列性質，最簡單向布局邏輯次數數列是 1 和  $-1 \pmod{b}$  間夾雜  $a-1$  (偶數)個  $-2, 2 \pmod{b}$  交錯，剛好可以兩兩抵銷

湊成  $b$ ，總次數  $= \frac{a-1}{2} \times b + b = \frac{a+1}{2}b$ ，得證。

(2)  $a \in 2k (k \neq 0)$ ，最簡單向布局邏輯次數數列每個階段的次數總和，前兩項加總都是  $b-1$ ，後  $a-2$  項兩兩互為相反數(mod  $b$ )加總湊成  $\frac{a-2}{2}$  個  $b$ ，每個階段的次數總和都是  $\frac{ab}{2}-1$ ，全部有  $(\text{列次}-1) \div a$  個階段  $= \frac{b}{2}-1$ ，最後再加上最後一項  $d_{kb+1} = 2 \times \text{總修正階段數} + 1 = b-1$ ，總次數  $= \frac{ab-2}{2} \times \frac{b-2}{2} + b-1 =$

$$\frac{b(ab-2a+2)}{4} = \frac{b}{2} \times \frac{ab-2a+2}{2} = \frac{b}{2} \times \left( \frac{ab}{2} - a + 1 \right) = \frac{\left[ \frac{ab}{2} - (a-1) \right] b}{2}，得證。$$

【性質 7.1】：

$a=2$  也遵循偶數  $a$  值的規則。

【證明 7.1】：

將  $a=2$  代入以上變數的公式，選取範圍數量  $\frac{2b}{2}-2+1=b-1$ ， $k(a, b)$  最簡棋盤邊長  $\frac{2b}{2}=b$ ，總次數  $\frac{\left[ \frac{ab}{2} - (a-1) \right] b}{2} = \frac{\left[ \frac{2b}{2} - (2-1) \right] b}{2} = \frac{(b-1)b}{2}$  和目的六中  $a=2$  的公式吻合，若  $b$  值和其他偶數一樣出現在奇數列次，則總次數與  $b$  值條件也遵循偶數  $a$  值的規則，只是因為  $b$  值還可能出現在偶數列次，此時也只有  $b$  值條件和總次數公式會不同，是  $a=2$  額外的特殊情形， $a=2$  也遵循偶數  $a$  值的規則，只是多了額外的特殊規則。

【性質 7.2】：

$a=2$  有額外的特殊情形之原因。

【證明 7.2】：

$a=2$  有兩套規則，原因是它的  $b$  值可能出現在結構圖形的列次  $= b-1$ ，當  $b$  是偶數時列次為奇數，和其它偶數的規則相符；但當  $b$  是奇數時列次是偶數，而

b 值出現列次的奇偶性不同，第六點數列停止條件，右邊  $a-1$  直行總和是  $\pm 1 \pmod{b}$  間隔，至於是 1 開頭還是  $-1$  開頭，受到列次的奇偶性影響，所以 b 值出現列次的奇偶性，決定這  $a-1$  個直行需要的次數總和 1 和  $-1$  的順序，間接影響了特定的 b 值。只有  $a=2$  時，結構圖形列次  $\frac{ab}{2} - a + 1$  才可能是奇數，所以只有  $a=2$  有兩套規則。

【性質 7.3】：

a 的奇偶性造就兩套規則。

【證明 7.3】：

根據【性質 6.11】結構圖形的次數部分，也就是選取次數數列  $\langle d_n(a) \rangle$  決定了相關變因的規則，而 a 的奇偶性會使選取次數數列呈現不同性質(參見第六點)，因此造就兩套不同的相關變因的規則。

## 陸、結論

關於「混沌棋局」這個題目，我們一開始先探討研究方法，然後，找出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍從  $2 \times 2$  到  $4 \times 4$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數 b 等)的條件。接著，綜合前面的研究結果，推導出在不同棋盤大小( $3 \times 3 \sim n \times n$ )，選取範圍  $a \times a$ ，能把原始棋盤變為反色棋盤的各變因(段數 b 等)的條件，並解答原題目的問題。最後，我們另外討論和證明了許多研究的結果與性質。研究過程中雖然遇到很多的挫折，但是經過不斷地上網搜尋相關資料並和老師討論之後，我們終於克服難關，也對科展研究產生更多熱忱與興趣。

## 柒、參考文獻資料

- 一、游森棚(2025)・森棚教官的數學題－三段變速之豬羊變色・科學研習雙月刊，63(6)。
- 二、黑白大逆轉：棋盤變色任務！(2025)・花蓮縣第 65 屆中小學科學展覽會。