

屏東縣第66屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：繽紛多倫多

關 鍵 詞：色層交錯、輪替、分派模式

編號：A1014

繽紛多倫多

摘要

- 一、單色雙塔的交換有沒有 A 先或 B 先的差異，結果一樣。因為不管哪一柱先行，都是以中間柱作為臨停點，除了底盤 F_H 移動 $D_n = 3$ 之外，中間柱是兩柱疊盤數量一樣，A 先和 B 先都會呈現以 B 柱為對稱點移動， D_{n-1} 呈現 F_V ，又以 $3-1P_{temp}$ 柱為翻轉點，因此結果呈現 2^n 規律變化。
- 二、變形第一版多倫多塔 TT 沒有 A 先或 B 先的差異。
- 三、變形第二版 CT 繽紛多倫多的三塔 2 色交錯及變形第三版三塔 3 色交錯，兩種版本之輪替交換與分派有 A 先或 B 先的差異。
- 四、傳統河內塔雙塔交換 $F_H = 3$ ，以中間暫停柱作為垂直或水平翻轉的對稱軸。TT $F_H = 4$ 以四階段分派完畢；CT2 色交錯 $F_H = 6$ ，以六階段分派完畢；CT3 色交錯 $F_H = 6$ ，以六階段分派完畢。

壹、研究動機

我們從網路上發現一個多倫多塔遊戲[1]是從發想加拿大國家廣播電台 (Tower of Toronto, 又稱多倫多塔，以下簡稱為 TT)，日間就像其他電塔無特別之處，但到了夜間，TT 的塔身會瞬間變色為紫紅色、藍色[2]，炫麗奪目，於是將這種塔身變色特效與傳統河內塔變化版結合，探討混和交換與分派的移動規律。

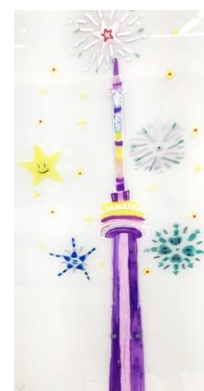
貳、研究目的

- 一、探討兩柱雙色交錯交換分派規律。
- 二、探討雙色層交錯的雙塔輪替分派規律。
- 三、探討三色層交錯分派的三塔輪替分派規律。

圖 1
多倫多塔示意

叁、研究設備與材料

- 一、實際操作：連方塊組成塔身與代表柱身顏色的底座。
- 二、筆記本、多色筆等文具和電腦處理文書軟體如 excel 和 word。



肆、研究工具與方法

一、文獻探討

歷來探討河內塔作品非常多，有 n 柱交換位置、有輪替分派。我們根據三柱鼎立[3]第一個滿柱輪替和快來看!好長的貪食蛇啊![4]是第一個將塔身混和多色在輪流分派到所屬顏色柱，是很有挑戰的作法。

表 1

已知遊戲規則

種類	三柱鼎立	貪食蛇
主題	多柱輪替	單柱分派
特殊性	單色塔身-兩柱雙色	三色塔身-單柱分派
啟發	考慮混色交錯	考慮增加柱數

圖 2
起始狀態

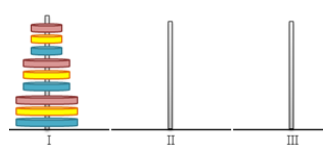
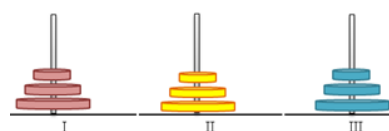


圖 3
結束狀態



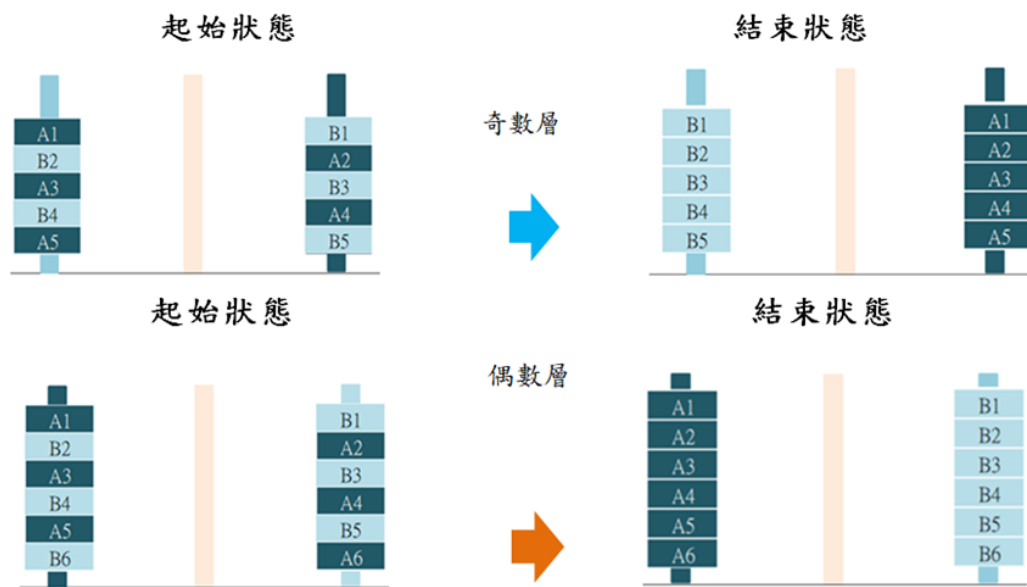
二、發展新遊戲方法

表 2

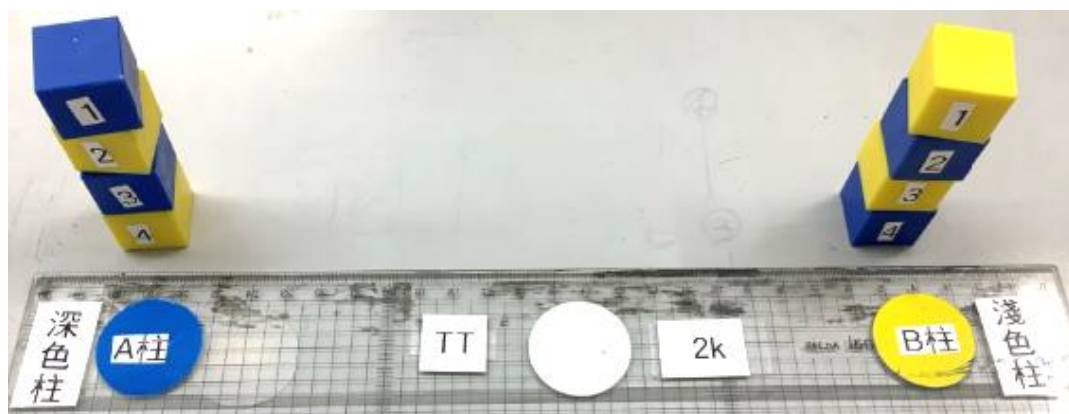
本研究之遊戲規則

種類	多倫多塔，TT				繽紛多倫多，CT											
主題	雙色層交錯輪流分派				多層混色輪流分派											
特殊性	柱身隨底盤顏色變化				各色輪流分派、歸位至同色柱											
起始狀態	底盤與柱身顏色不同				第 1 層與柱身顏色相同											
柱身顏色	深色柱-淺色底 淺色底盤-深色柱深				A 柱-黃色，B 柱-紅色，C 柱-藍色											
色層分配	A1 B2 A3 B4		B1 A2 B3 A4		A1 B2 A3 B4		B1 C2 B3 C4		C1 A2 C3 A4		A1 B2 C3 A4 B5 C6		B1 C2 A3 B4 C5 A6		C1 A2 B3 C4 A5 B6	
目標狀態	A 柱↔C 柱				A 柱↔B 柱↔C 柱											
操作範例	圖 4				圖 5 左				圖 5 右							

圖 4
多倫多塔操作示意與實際方式

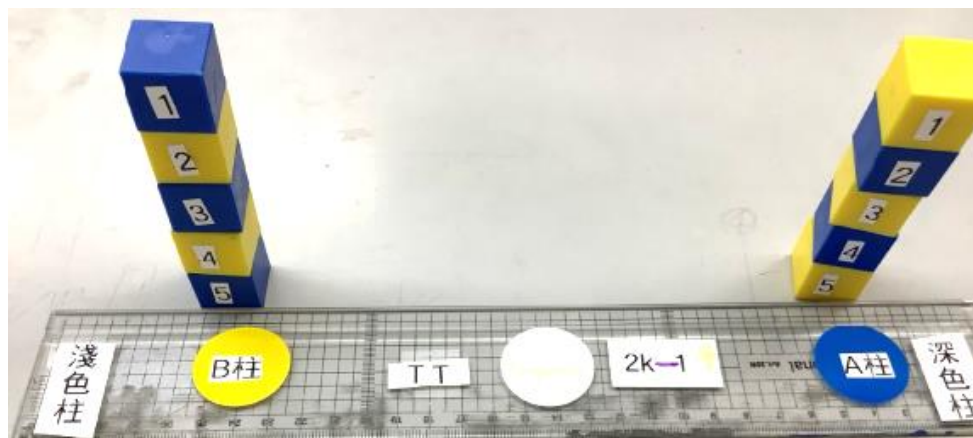


偶數層=左深右淺



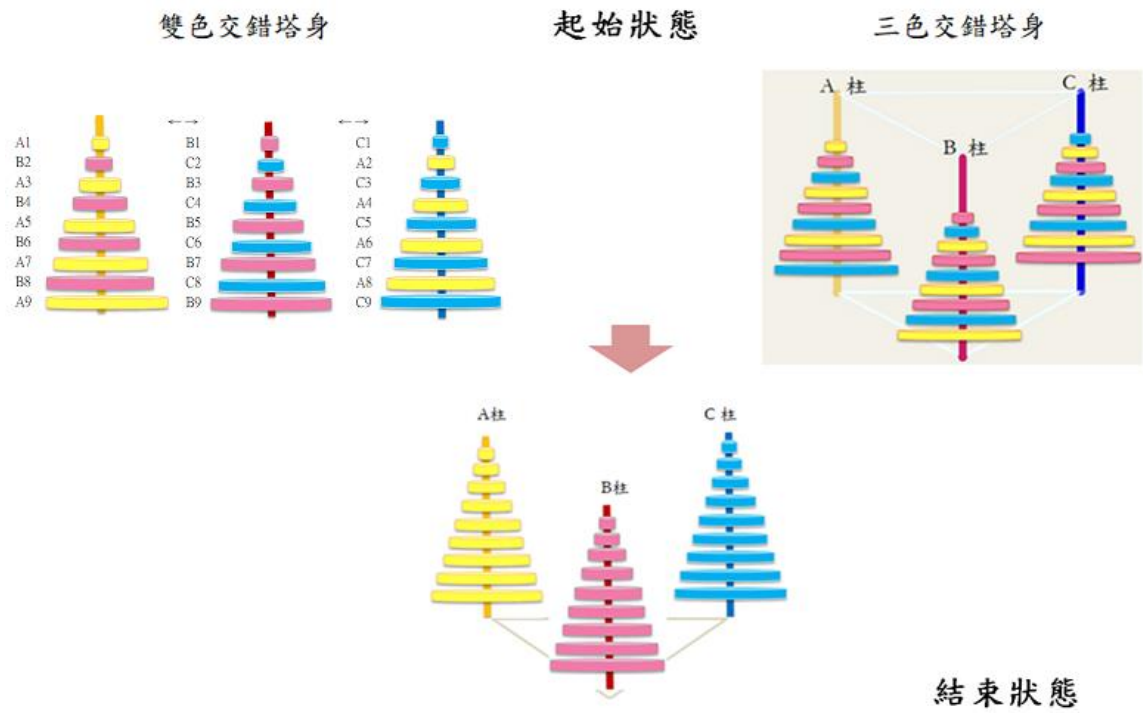
Temporary P=Peg T

奇數層=左淺右深



Temporary P=Peg T

圖 5
續紛多倫多



(一)遊戲共同規則

1. 小盤必須在大盤之上。
2. 移動 1 盤即動 1 步。
3. 找出最少移動步數的方法並分析其規律。

(二)遊戲特殊規則

1. **多倫多塔，簡稱 TT**：是我們自創遊戲，融合雙柱河內塔多倫多塔特點(圖 3)。

- (1) 兩色交錯的塔身，每一層依據大小由上往下層疊交替。
- (2) 動態的柱色：兩柱的顏色必須依著底層顏色輪流變化，

柱身 **A 淺色 B 深色** 配合底盤 **A 深色 B 淺色**



柱身 **A 深色 B 淺色** 配合底盤 **A 淺色 B 深色**

- (3) 完成狀態：每一層必須歸位到指定柱，柱身顏色和全部 n 層顏色相同。

2. **繽紛多倫多，CT**：與多倫多塔的差別在於三柱且多色層交錯的塔身，第 1 層和塔身顏色一樣(圖 4)。

- (1) 兩色交錯：柱身變化以兩層組成，A 柱 **Peg-A** 盤序由上往下依序為 A-B，B 柱 **Peg-B** 盤序由上往下依序為 B-C，C 柱 **Peg-C** 盤序由上往下依序為 C-A，規定每柱至少要有 2 色才能開始搬移。

- (2) 三色交錯：顏色變化以三層組成，A 柱 **Peg-A** 盤序由上往下依序為 A-B-C，B 柱 **Peg-B** 盤序由上往下依序為 B-C-A，C 柱 **Peg-C** 盤序由上往下依序為 C-B-A，規定每柱至少要有 3 色才能開始搬移。

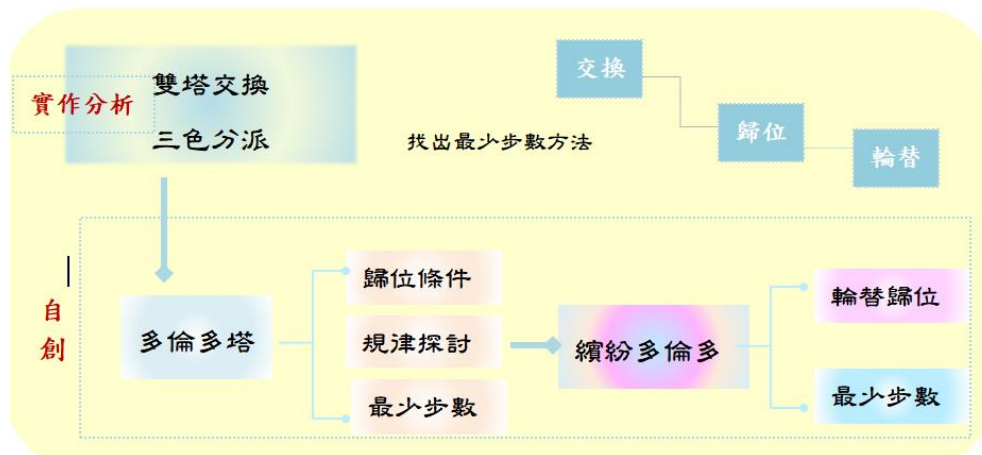
(三)遊戲規則使用代號、名詞

- (1) 「雙色層」交錯指雙色混和塔身，由上往下依序疊不同顏色，第 1 層與柱身相同，第 2 層、第 3 層依序疊加不同顏色，例如 A 柱疊加 A1+B2+C3。用其盤身是以 A、C 柱身為單色。
- (2) 「三色層」交錯指三色混合塔身，由上往下依序疊不同顏色，第 1 層與柱身相同，第 2 層、第 3 層依序疊加不同顏色，例如 A 柱疊加 A1+B2+C3。
- (3) 指深色與淺色，深色指深色柱與深色底盤，淺色指淺色柱與淺色底盤

(四)本研究使用之名詞

1. M ：表示該方法之最少搬移步數
2. D_n ：表示底盤。
3. F_H ：表示水平翻轉，指 D_n 交換過程。
4. F_V ：表示垂直翻轉，指 D_{n-1} 的動態交換過程。
5. P_{temp} ：表示臨時停柱。
6. $\bar{L}$ 表示成組， $\vec{L}$ 表示 A 在下， $\tilde{L}$ 表示 A 在上。

四、研究架構



伍、研究過程

研究一：三柱單色雙塔交換規律

底盤動一定 3 步結束：**A** 先 A1-B1-A1；**B** 先 B1-A1-B1。

圖 6

單色雙塔底盤交換 D=1

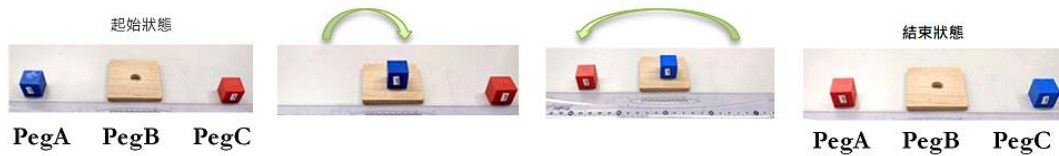


圖 7

單色雙塔底盤交換 D=2, 3

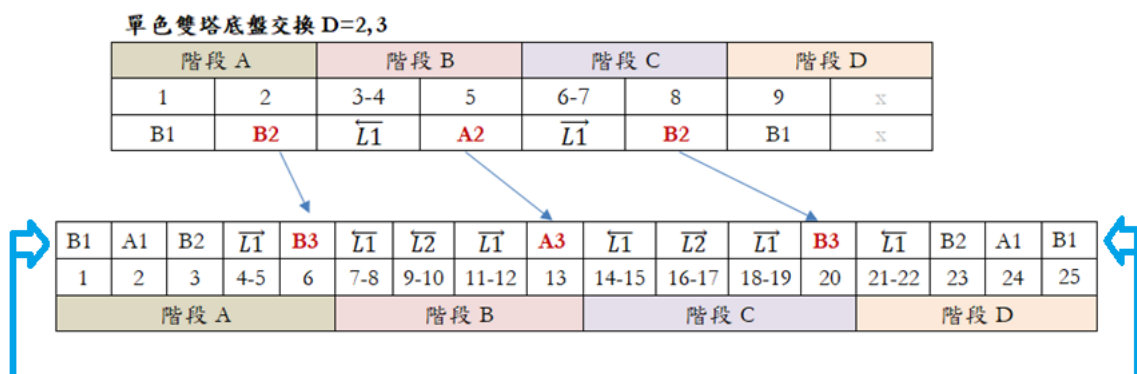
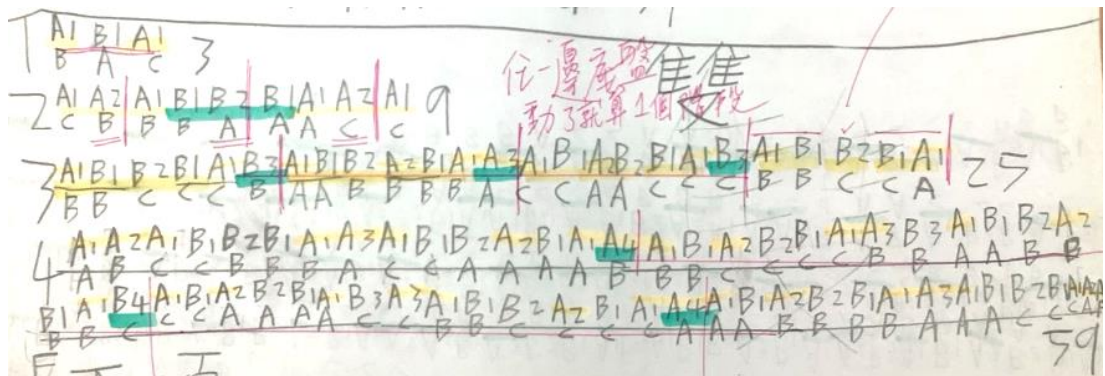


圖 8

單色雙塔各層交換結果



【發現】單色雙塔不管是那一柱先移動，步數都一樣。規律地以中間柱作為臨停點，兩柱疊盤數量一樣，A 先和 B 先都會呈現以 B 柱為對稱點移動，因此結果會一樣。

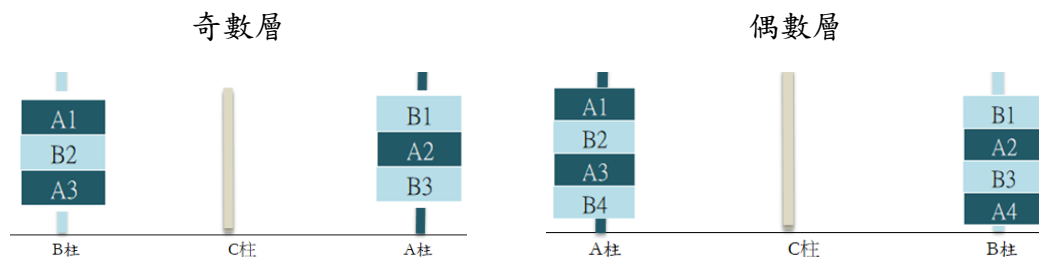
【小結】看到遞迴的可能性四個階段提出底盤動的步數之後，以中間暫停柱作為垂直或水平翻轉的對稱軸。階段 A=階段 D，階段 B=階段 C。因為底盤移動次數從兩層開始提出，可以看到規律變化，所以先將四個階段個別分析計算步數。

研究二：第一種變形—探討雙色塔且 2 色交錯的規律—雙色層交錯

操作條件：TT 柱身會變色，因此底盤必需和柱身不同才能開始搬動，所以分為奇數層和偶數層改變標記。

圖 9

TT 的交換條件在柱身與底盤呈相對色



由於 TT 較研究一複雜，我們利用 excel 整理成表列後分析，成組搬移以 $\bar{L}$ 表示。

表 3
TT 各層交換結果

$M(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$M(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 層	總步數:3										6 層	總步數:332									
1	A1	B1	A1								1	A1	B2	L1	A2	L1	A3	L1			
2 層	總步數:11										2	L2	L1	B4	L1	L2	L1				
1	A1	B2	L1	A2	L1	B2	A1	B1			3	L3	L1	L2	L1	A4					
2	A1										4	L1	L2	L1	L3	L1					
3 層	總步數:43										5	L2	L1	A5	L1	L2	L1				
1	B1	A1	A2	L1	B3	L1	L2				6	L3	L1	L2	L1	L4					
2	L1	A3	L1	L2	L1	B3					7	L1	L2	L1	L3	L1					
3	L1	A2	L1	A2	L1	B2	A2				8	L2	L1	B6	L1	L2					
	A1										9	L1	L3	L1	L2	L1					
4 層	總步數:64										10	L4	L1	L2	L1	L3					
1	B1	A2	L1	B2	L1	B3	L1				11	L1	L2	L1	L5	L1					
2	L2	L1	A4	L1	L2	L1					12	L2	L1	L3	L1	L2					
3	L3	L1	L2	L1	B4						13	L1	L4	L1	L2	L1					
4	L1	L2	L1	L3	L1						14	L3	L1	L2	L1	A6	L1				
5	L2	L1	A4	L1	L2	L1					15	L2	L1	L3	L1	L2					
6	A3	L1	L2	L1	A1	L1					16	L1	L4	L1	L2	L1					
7	B2	A1	B1	A1							17	L3	L1	L2	L1	L5					
5 層	總步數:169										18	L1	L2	L1	L3	L1					
1	B1	A1	B2	L1	A3	L1	L2				19	L2	L1	L4	L1	L2					
2	L1	B3	L1	L2	L1	B4					20	L1	L3	L1	L2	L1					
3	L1	L2	L1	L3	L1						21	B6	L1	L2	L1	L3					
4	L2	L1	A5	L1	L2	L1					22	L1	L2	L1	L4	L1					
5	L3	L1	L2	L1	L4						23	L2	L1	L3	L1	L2					
6	L1	L2	L1	L3	L1						24	L1	A5	L1	L2	L1	L3				
7	L1	L1	B5	L1	L2						25	L1	L2	L1	L4	L1					
8	L1	L3	L1	L2	L1						26	L2	L1	L3	L1	L2					
9	L4	L1	L2	L1	L3						27	L1	B5	L1	L2	L1					
10	L1	L2	L1	A5	L1	L2					28	L3	L1	L2	L1	L4					
11	L1	L3	L1	L2	L1						29	L1	L2	L1	L3	L1					
12	L4	L1	L2	L1	L3						30	L2	L1	A5	L1	L2	L1				
13	L1	L2	L1	A4	L1						31	L3	L1	L2	L1	A4					
14	L2	L1	L3	L1	L2						32	L1	L2	L1	L3	L1					
15	L1	B4	L1	L2	L1	B3					33	L2	L1	A3	L1	B2	L1				
16	L1	L3	L1	B2	B1	A1					34	A2	A1								

表 4

TT 各層交換成組搬移分析方式(以 7 層為例)

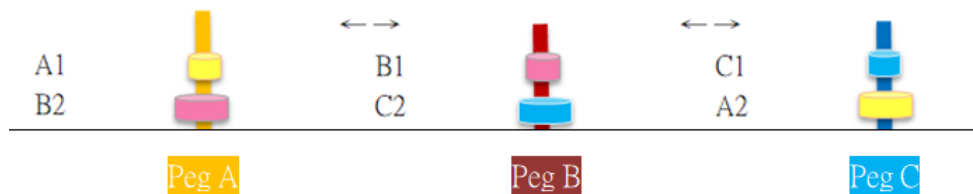
盤號	A1	B1	L1	A2	B2	L2	A3	B3	L3	成組去回統計								
M	3	3	185	2	2	90	4	2	43	Σ	成組	L1	L2	L3	L4	L5	L6	
盤號	A4	B4	L4	A5	B5	L5	A6	B6	L6	←	→	←	92	45	21	9	4	1
M	2	4	19	1	2	9	1	3	3	172	177	→	93	45	22	10	5	2
盤號	A7	B7																
M	2	1																

研究三：第二種變形—探討三柱塔身且 2 色層交錯—融合輪替與分派的規律

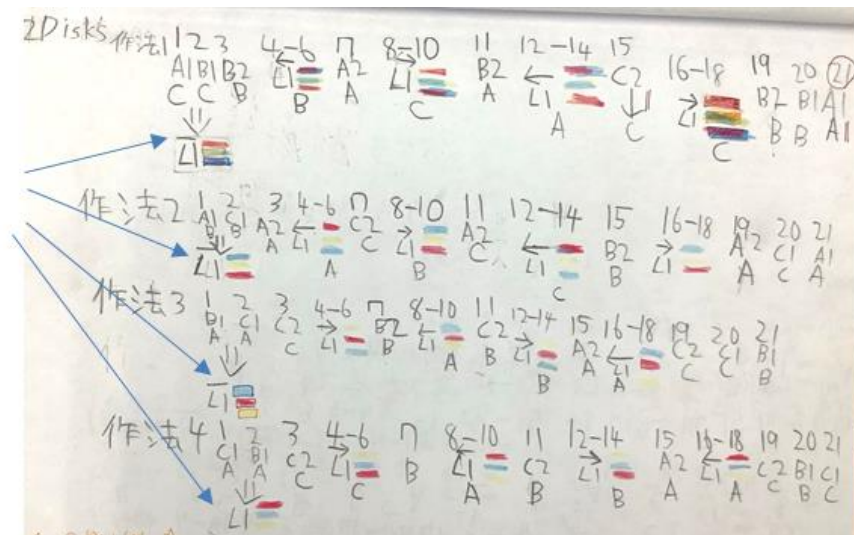
這裡我們嘗試在每一柱安排兩色交錯，兩種顏色成一組，所以每一柱的顏色變化是 2, 4, 6, 8, 10 盤。三柱兩兩層成組後才開始搬動。以一組兩層嘗試六種方法，發現方法六的 20 步是步數最少的方法，方法之間的影響到後來的操作。

圖 9

CT-2 色交錯 1 組之移動順序比較



三色成組L1



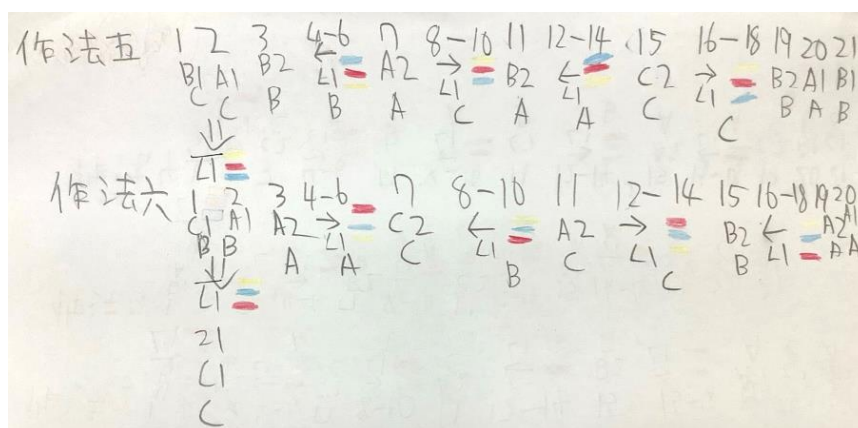


表 5

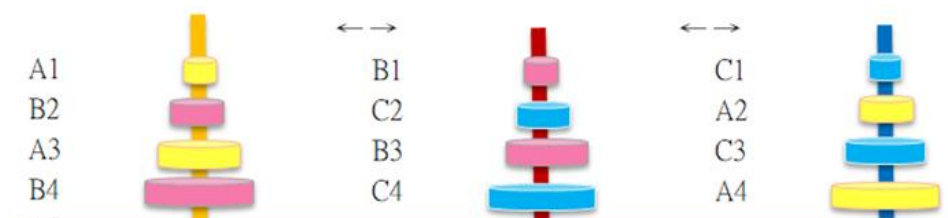
CT2 色交錯一組 2 層交換結果分析(2 層為例)

M	D_n	A1	B1	C1	A2	B2	C2	$M(n)$
方法一	B	6	6	4	1	3	1	21
方法二	A	6	4	6	3	1	1	21
方法三	C	4	6	6	1	1	3	21
方法四	C	4	6	6	1	1	3	21
方法五	B	6	6	4	1	3	1	21
方法六	A	6	4	6	3	1	1	21

【發現】底盤移動模式都是一樣輪轉，，例如：方法六 A-C-A-B-A，方法五 B-A-B-C-B，方法四 C-B-C-A-C，方法三 C-B-C-A-C，方法二 A-C-A-B-A，方法一 B-A-B-C-B，呈現五階段移動模式，方法間的差異在於成組順序不同。

表 5

CT2 色交錯交換結果(4 層為例)



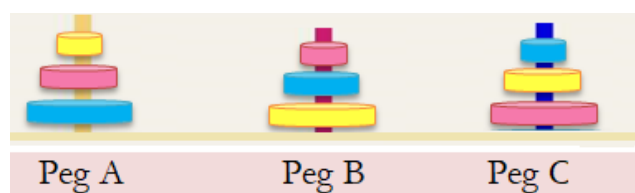
總列數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4層	總步數:162									
1	B1	A1	C2		L1		A2		L1	
2	B3		L1			L2			L1	
3	A3		L1			L1			L1	
4	B4		L1			L2			L1	
5		L3			L1			L2		L1
6			A4		L1			L2		L1
7				L3			L1			L2
8			L1		C4		L1			L2
9			L1			L3				L1
10		L2			L1		B4			L1
11		L2			L1		A3			L1
12		L2			L1		B3			L1
13		L2			L1			L2		L1
14			A2	A2		L1		C2	A1	B1
15	C1	B1								

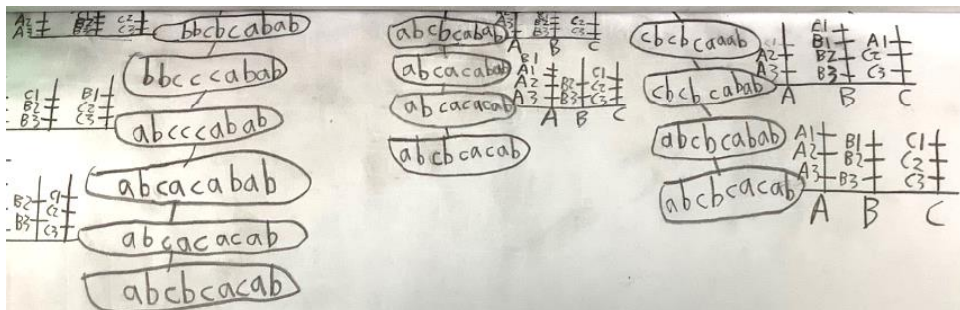
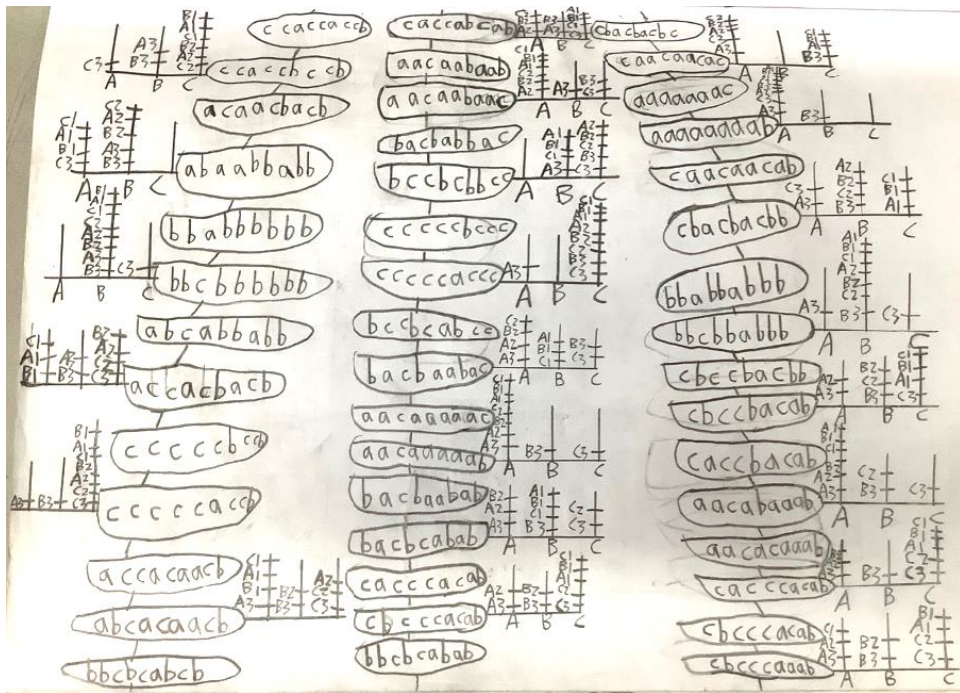
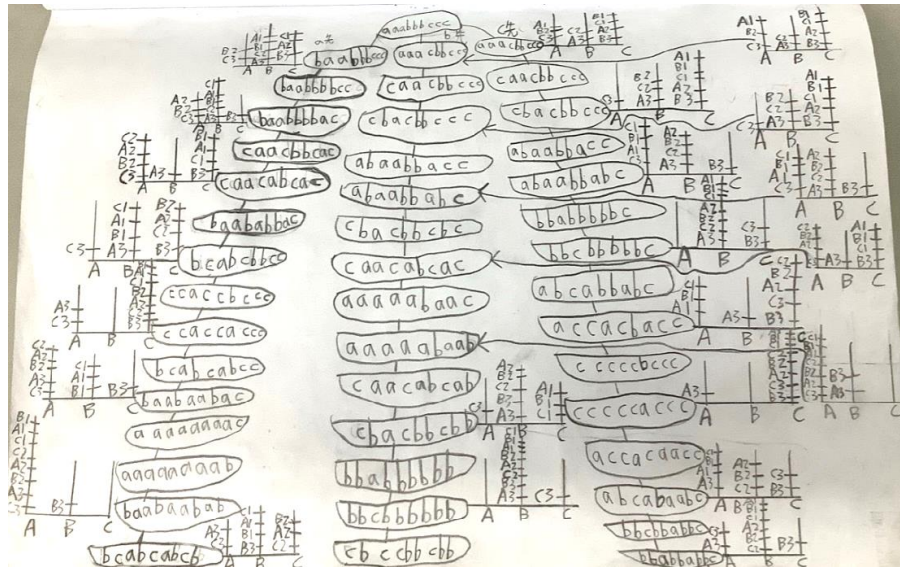
研究四：第三種變形—探討三柱塔身且3色層交錯

因為底盤必需和柱子顏色不一樣且確認三色組合完畢才能搬動，所以我們比較特定底盤的結果。

圖 10

特定柱先搬動結果比較





(詳見現場資料)

陸、研究結果

研究一：三柱單色雙塔交換規律

我們將[3]實作結果再細部分析，底盤動一定3步結束：**A先** A1-B1-A1；**B先** B1-A1-B1(圖 6~7)。階差數列改以表列呈現，便於分析。

表 7

第一階段 $A(x)$ 結果

奇數層	各項總和					Σ
階差值	1	3	5	7	9	
1	2^0					$2^1 - 1$
9	2^0	2^3				$(2^1 + 2^3) - 1$
41	2^0	2^3	2^5			$(2^1 + 2^3 + 2^5) - 1$
169	2^0	2^3	2^5	2^7		$(2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7) - 1$
681	2^0	2^3	2^5	2^7	2^9	$(2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9) - 1$

偶數層	各項總和					項次變化	
階差值	2	4	6	8	10		
4	2^2					2^{2^1}	4^1
20	2^2	2^4				2^{2^2}	4^2
84	2^2	2^4	2^6			2^{2^3}	4^3
344	2^2	2^4	2^6	2^8		2^{2^4}	4^4
1364	2^2	2^4	2^6	2^8	2^{10}	2^{2^5}	4^5

圖 11

$A(x)$ 奇數項變化

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2^1 - 1 \\ 1 \text{ 項} \\ 7(2^0) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 3 \\ (2^1 + 2^3) - 1 \\ 2 \text{ 項} \\ 7(2^0 + 2^3) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 5 \\ (2^1 + 2^3 + 2^5) - 1 \\ 3 \text{ 項} \\ 7(2^0 + 2^3 + 2^5) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 7 \\ (2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7) - 1 \\ 4 \text{ 項} \\ 7(2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 9 \\ (2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9) - 1 \\ 5 \text{ 項} \\ 7(2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9) \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

圖 12

$A(x)$ 偶數項變化

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 2^2 & (2^2 + 2^4) & (2^2 + 2^4 + 2^6) & (2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8) & (2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10}) \\ 1 \text{ 項} & 2 \text{ 項} & 3 \text{ 項} & 4 \text{ 項} & 5 \text{ 項} \end{array} \\
 & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 & (2^2)^1 + [(2^2)^1 + (2^2)^2] + [(2^2)^1 + (2^2)^2 + (2^2)^3] + [(2^2)^1 + (2^2)^2 + (2^2)^3 + (2^2)^4] + [(2^2)^1 + (2^2)^2 + (2^2)^3 + (2^2)^4 + (2^2)^5]
 \end{aligned}$$

表 8

第二階段 $B(x)$ 結果

$B(x)$	各項總和				
項次	1	2	3	4	5
4	2^2				
20	2^2	2^4			
84	2^2	2^4	2^6		
344	2^2	2^4	2^6	2^8	
1364	2^2	2^4	2^6	2^8	2^{10}

【小結】隨盤數增加，搬移總步數變化 $A(n) = D(n) + 1$ ， $B(n) = C(n)$

$$A(n) + B(n) + C(n) + D(n) + 3 = 2 \times A(n) + 2 + B(n) + 3 = 1, 9, 25, 59, 131 \dots$$

圖 13

第一階段 $A(x)$ 結果

$A(x-1)$

層數 $\rightarrow$ 步數分析

5442 112 $(2^0 + (2^0) + (2^0 + 2^3) + (2^0 + 2^4) + (2^0 + 2^3 + 2^5) + (2^0 + 2^4 + 2^6) + (2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7) + (2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8) + (2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9) + (2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10}) + (2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 + 2^{11}))$

1₁₂ $2^0 \rightarrow 2^1 - 1$

5₁₃ $(2^0) + (2^3) + 4$

14₁₄ $(2^0) + (2^3) + (2^0 + 2^3) + 9$

34₁₅ $(2^0) + (2^3) + (2^0 + 2^3) + (2^0 + 2^4) + 14 + 9 + 20$

75₁₆ $(2^0) + (2^3) + (2^0 + 2^3) + (2^0 + 2^4) + (2^0 + 2^3 + 2^5)$

159₁₇ $(2^0) + (2^3) + (2^0 + 2^3) + (2^0 + 2^4) + (2^0 + 2^3 + 2^5) + (2^0 + 2^4 + 2^6) + 14 + 20 + 84$

328₁₈ $(2^0) + (2^3) + (2^0 + 2^3) + (2^0 + 2^4) + (2^0 + 2^3 + 2^5) + (2^0 + 2^4 + 2^6) + (2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7)$

668₁₉ $(2^0) + (2^3) + (2^0 + 2^3) + (2^0 + 2^4) + (2^0 + 2^3 + 2^5) + (2^0 + 2^4 + 2^6) + (2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7) + (2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8) + 14 + 20 + 84 + 340$

1349₂₀ $(2^0) + (2^3) + (2^0 + 2^3) + (2^0 + 2^4) + (2^0 + 2^3 + 2^5) + (2^0 + 2^4 + 2^6) + (2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7) + (2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8) + (2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9) + 14 + 20 + 84 + 340 + 1340$

2713₂₁ $(2^0) + (2^3) + (2^0 + 2^3) + (2^0 + 2^4) + (2^0 + 2^3 + 2^5) + (2^0 + 2^4 + 2^6) + (2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7) + (2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8) + (2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9) + (2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10}) + 14 + 20 + 84 + 340 + 1340 + 2710$

$$\begin{aligned}
 \text{奇數項結果: } 2^0 + 2^3 + 2^5 \dots 2^{2k-1} &= (2^1 + 2^3 + 2^5 \dots 2^{2k-1}) - 1 \\
 &= 2^{2 \times 1 - 1} + 2^{2 \times 2 - 1} + 2^{2 \times 3 - 1} \dots 2^{2k-1} \\
 &= \frac{2^{2k+1} - 5}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{偶數項結果：} & 2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots 2^{2k} = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^k \\ & = \frac{2^{2k+2} - 4}{3}\end{aligned}$$

研究二：第一種變形—探討雙色塔且 2 色交錯的規律—雙色柱與色層交錯

我們利用多倫多塔塔身變化將傳統河內塔概念延伸，維持三柱，B 柱 = P_{temp} ，A、C 柱交換，我們猜想結果可能會與 2 的變化有關。

方法一 尚邑

表 9

TT 各層結果

層數	步數 M	分析	逐層遞減	
1 層	3	3×1	1	
2 層	11	3×3+2	3	2
3 層	43	3×14+1	14	11
4 層	64	3×21+1	21	7
5 層	169	3×56+1	56	35
6 層	332	3×110+2	110	54
7 層	722	3×240+2	240	130
8 層	1348	13×479+1	479	239

表 10

雙色交錯柱 TT 交換結果

層數/步數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	A1	B1	A1																	
2	A1	B2	A1	B1	A2	B1	A1	B2	A1	B1	A1									
3	A1	B1	A2	B1	A1	B3	A1	B1	A2	B2	B1	A1	A3	A1	B1	B2	A2	B1	A1	B3
.	A1	B1	A2	B1	A1	B2	A1	B1	A2	B1	A1	B1								
4	A1	B2	A1	B1	A2	B1	A1	A3	A1	B1	A2	B2	B1	A1	B4	A1	B1	B2	A2	B1
.	A1	A3	B3	A1	B1	A2	B2	B1	A1	A4	A1	B1	B2	A2	B1	A1	B3	A3	A1	B1
.	A2	B2	B1	A1	B4	A1	B1	B2	A2	B1	A1	A3	A1	B1	A2	B2	A1	B2	B3	A1
.	B1	B2	A2	B1	A1	A3	A1	B1	A2	B1	A1									
5	A1	B1	A2	B1	A1	B3	A1	B1	A2	B2	B1	A1	A3	A1	B1	B2	A2	B1	A1	A4
.	A1	B1	A2	B2	B1	A1	A3	B3	A1	B1	B2	A2	B1	A1	B5	A1	B1	A2	B2	B1
.	A1	B3	A3	A1	B1	B2	A2	B1	A1	A4	B4	A1	B1	A2	B2	B1	A1	A3	B3	A1
.	B1	B2	A2	B1	A1	A5	A1	B1	A2	B2	B1	A1	B3	A3	A1	B1	B2	A2	B1	A1
.	B4	A4	A1	B1	A2	B2	B1	A1	A3	B3	A1	B1	B2	A2	B1	A1	B5	A1	B1	A2
.	B2	B1	A1	A4	A1	B1	A2	B2	B1	A1	A3	B3	A1	B1	B2	A2	B1	A1	B4	A1
.	B1	A2	B2	B1	A1	B3	A3	A1	B1	B2	A2	B1	A1	A4	A1	B1	A2	B2	B1	A1
.	B3	A1	B1	B2	B1	A1	A2	A1												

研究三：第二種變形—探討兩柱塔身且2色層交錯—融合輪替與分派的規律
圖 14

雙色交錯柱 TT—5 層交換結果

$A1: 40 = 2^3 + 2^5$	$A1: 40 = 2^3 + 2^5$	$B1: 40 = 2^3 + 2^5$
$B1: 40 = 2^3 + 2^5$	$A1+B1 = B1$	
$A2: 18 = 2^1 + 2^4$	$A2: 18 = 2^1 + 2^4$	$B2: 20 = 2^2 + 2^4$
$B2: 20 = 2^2 + 2^4$	$A2+B2 = B2$	
$A3: 9 = 2^0 + 2^3$	$A3: 9 = 2^0 + 2^3$	$B3: 9 = 2^0 + 2^3$
$B3: 9 = 2^0 + 2^3$	$A3+B3 = B3$	
$A4: 4 = 2^2$	$A4: 4 = 2^2$	$B4: 4 = 2^2$
$B4: 4 = 2^2$	$A4+B4 = B4$	
$A5: 2 = 2^1$	$A5: 2 = 2^1$	$B5: 1 = 2^0$
$B5: 1 = 2^0$	$A5+B5 = B5$	

5 層分析

$2^3 = 8$
 $2^4 = 16$
 $8+16=24$

圖 15
雙色交錯柱 TT 交換結果—6 層交換結果

$A1: 82 = 2^1 + 2^4 + 2^6$	$A1: 82 = 2^1 + 2^4 + 2^6$	$B1: 81 = 2^0 + 2^4 + 2^6$
$B1: 81 = 2^0 + 2^4 + 2^6$		
$A2: 40 = 2^3 + 2^5$	$A2: 40 = 2^3 + 2^5$	$B2: 40 = 2^3 + 2^5$
$B2: 40 = 2^3 + 2^5$		
$A3: 20 = 2^2 + 2^4$	$A3: 20 = 2^2 + 2^4$	$B3: 18 = 2^1 + 2^4$
$B3: 18 = 2^1 + 2^4$		
$A4: 9 = 2^0 + 2^3$	$A4: 9 = 2^0 + 2^3$	$B4: 9 = 2^0 + 2^3$
$B4: 9 = 2^0 + 2^3$		
$A5: 4 = 2^2$	$A5: 4 = 2^2$	$B5: 4 = 2^2$
$B5: 4 = 2^2$		
$A6: 1 = 2^0$	$A6: 1 = 2^0$	$B6: 2 = 2^1$
$B6: 2 = 2^1$		

6 層

圖 16
雙色交錯柱 TT 交換結果—7 層交換結果

A1: 165 = $2^0 + 2^2 + 2^5 + 2^7$ B1: 164 = $2^2 + 2^5 + 2^7$	A1: 165 = $2^0 + 2^2 + 2^5 + 2^7$	B1: 164 = $2^2 + 2^5 + 2^7$
A2: 80 = $2^4 + 2^6$ B2: 82 = $2^1 + 2^4 + 2^6$	A2: 80 = $2^4 + 2^6$	B2: 82 = $2^1 + 2^4 + 2^6$
A3: 40 = $2^3 + 2^5$ B3: 40 = $2^3 + 2^5$	A3: 40 = $2^3 + 2^5$	B3: 40 = $2^3 + 2^5$
A4: 18 = $2^1 + 2^4$ B4: 20 = $2^2 + 2^4$	A4: 18 = $2^1 + 2^4$	B4: 20 = $2^2 + 2^4$
A5: 10 = $2^1 + 2^3$ B5: 9 = $2^0 + 2^3$	A5: 10 = $2^1 + 2^3$	B5: 9 = $2^0 + 2^3$
A6: 4 = 2^2 B6: 4 = 2^2	A6: 4 = 2^2	B6: 4 = 2^2
A7: 2 = 2^1 B7: 1 = 2^0	A7: 2 = 2^1	B7: 1 = 2^0

7 層

研究四：第三種變形—探討三柱塔身且 3 色層交錯—融合輪替與分派的規律
實作比較文獻[3]結果，C 先步數最少，M=66；B 是其次，M=68；A 最多步數，M=69。

表 11
三柱單色柱輪替

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 B1	A1	B2		L1		C2		L1	
2 C3		L1		L2				L1	
3 A3		L1		L2				L1	
4 C3		L1		L2				L1	
5 B3		L1		L2				L1	
6 C3		L1		C2	B2		L1		A2
7	L1	B2	C1	B1					

M=66

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 B1	C1	C2		L1		A2		L1	
2 A3		L1		L2				L1	
3 B3		L1		L2				L1	
4 A3		L1		L2				L1	
5 C3		L1		L2				L1	
6 A3		L1		L2				L1	
7 B2		L1		C2	A1	B1	C1	B1	

M=68

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 B1	C1	C2		L1		A2		L1	
2 C2	B2		L1		B3		L1		L2
3			L1		C3		L1		L2
4			L1		B3		L1		L2
5			L1		A3		L1		L2
6			L1		B3		L1		B2
7	L1		C2	A1	B1	C1	B1		

M=69

表 12
CT 1 組 3 層 3 色交錯各柱底盤先動分析

M	A 先	累計數量			B 先	累計數量			C 先	累計數量		
		A	B	C		A	B	C		A	B	C
1	abc	2	4	3	abc	3	2	4	abc	3	2	4
	243				324				324			

M	A 先	累計數量			B 先	累計數量			C 先	累計數量		
		A	B	C		A	B	C		A	B	C
2	$\frac{abc}{252}$	4	9	5	$\frac{abc}{225}$	5	4	9	$\frac{abc}{522}$	8	4	6
3	$\frac{abc}{351}$	7	14	6	$\frac{abc}{135}$	6	7	14	$\frac{abc}{135}$	9	7	11
4	$\frac{abc}{324}$	10	15	10	$\frac{abc}{432}$	10	10	16	$\frac{abc}{432}$	13	10	13
5	$\frac{abc}{144}$	11	20	14	$\frac{abc}{441}$	14	14	17	$\frac{abc}{441}$	17	14	14
6	$\frac{abc}{441}$	15	24	15	$\frac{abc}{144}$	15	18	21	$\frac{abc}{171}$	18	21	15
7	$\frac{abc}{144}$	16	28	19	$\frac{abc}{414}$	19	19	24	$\frac{abc}{072}$	18	28	17
8	$\frac{abc}{117}$	17	29	26	$\frac{abc}{711}$	26	20	25	$\frac{abc}{342}$	21	32	19
9	$\frac{abc}{207}$	19	29	33	$\frac{abc}{720}$	33	22	25	$\frac{abc}{315}$	24	33	24
10	$\frac{abc}{234}$	21	32	37	$\frac{abc}{423}$	37	24	28	$\frac{abc}{018}$	24	34	32
11	$\frac{abc}{531}$	26	35	38	$\frac{abc}{153}$	38	29	31	$\frac{abc}{108}$	25	34	40
12	$\frac{abc}{801}$	34	35	39	$\frac{abc}{180}$	39	37	31	$\frac{abc}{405}$	29	34	45
13	$\frac{abc}{810}$	42	36	39	$\frac{abc}{081}$	39	45	32	$\frac{abc}{432}$	33	37	47
14	$\frac{abc}{540}$	47	40	39	$\frac{abc}{054}$	39	50	36	$\frac{abc}{162}$	34	43	49
15	$\frac{abc}{243}$	49	44	42	$\frac{abc}{324}$	42	52	40	$\frac{abc}{261}$	36	49	50
16	$\frac{abc}{216}$	51	45	48	$\frac{abc}{621}$	48	54	41	$\frac{abc}{234}$	38	52	54
17	$\frac{abc}{126}$	52	47	54	$\frac{abc}{612}$	54	55	43	$\frac{abc}{504}$	43	52	58
18	$\frac{abc}{423}$	56	49	57	$\frac{abc}{342}$	57	59	45	$\frac{abc}{801}$	51	52	59
19	$\frac{abc}{}$	60	54	57	$\frac{abc}{}$	57	63	50	$\frac{abc}{}$	59	53	59

M	A 先	累計數量			B 先	累計數量			C 先	累計數量		
		A	B	C		A	B	C		A	B	C
	450				045				810			
20	$\frac{abc}{180}$	61	62	57	$\frac{abc}{018}$	57	64	58	$\frac{abc}{513}$	64	54	62
21	$\frac{abc}{081}$	61	70	58	$\frac{abc}{108}$	58	64	66	$\frac{abc}{243}$	66	58	65
22	$\frac{abc}{351}$	64	75	59	$\frac{abc}{135}$	59	67	71	$\frac{abc}{270}$	68	65	65
23	$\frac{abc}{324}$	67	77	63	$\frac{abc}{432}$	63	69	73	$\frac{abc}{171}$	69	72	66
24	$\frac{abc}{027}$	67	79	70	$\frac{abc}{702}$	70	69	75	$\frac{abc}{144}$	70	76	70
25	$\frac{abc}{117}$	68	80	77	$\frac{abc}{711}$	77	70	76	$\frac{abc}{234}$	72	79	74
26	$\frac{abc}{414}$	72	81	81	$\frac{abc}{441}$	81	74	77	$\frac{abc}{324}$	75	81	78
27	$\frac{abc}{423}$	76	83	84	$\frac{abc}{342}$	84	78	79	$\frac{abc}{621}$	81	83	79
28	$\frac{abc}{153}$	77	88	87	$\frac{abc}{315}$	87	79	84	$\frac{abc}{612}$	87	84	81
29	$\frac{abc}{252}$	79	93	89	$\frac{abc}{225}$	89	81	89	$\frac{abc}{315}$	90	85	86
30	$\frac{abc}{243}$	81	97	92	$\frac{abc}{252}$	91	86	91	$\frac{abc}{225}$	92	87	91
31	$\frac{abc}{333}$	84	100	95	$\frac{abc}{342}$	94	92	93	$\frac{abc}{324}$	95	89	95
32	$\frac{abc}{432}$	88	103	97	$\frac{abc}{432}$	98	95	95	$\frac{abc}{333}$	98	92	98
33	$\frac{abc}{423}$	92	105	100	$\frac{abc}{423}$	102	97	98	$\frac{abc}{243}$	100	96	101
34									$\frac{abc}{342}$	103	100	103

表 13

CT3 色交錯實作各層步數

底盤先動	A 先	B 先	C 先	A 先	B 先	C 先
組數	1 組	1 組	1 組	2 組	2 組	2 組
層碟數	3	3	3	6	6	6
總步數 M	69	68	69	826	833	856

柒、討論

一、單色雙塔的交換有沒有 A 先或 B 先的差異，結果一樣。因為不管哪一柱先行，都是以中間柱作為臨停點，除了底盤 F_H 移動 $D_n = 3$ 之外，中間柱是兩柱疊盤數量一樣，A 先和 B 先都會呈現以 B 柱為對稱點移動， D_{n-1} 呈現 F_V ，又以 $3-1P_{temp}$ 柱為翻轉點，因此結果呈現 2^n 規律變化。

二、TT 沒有 A 先或 B 先的差異。

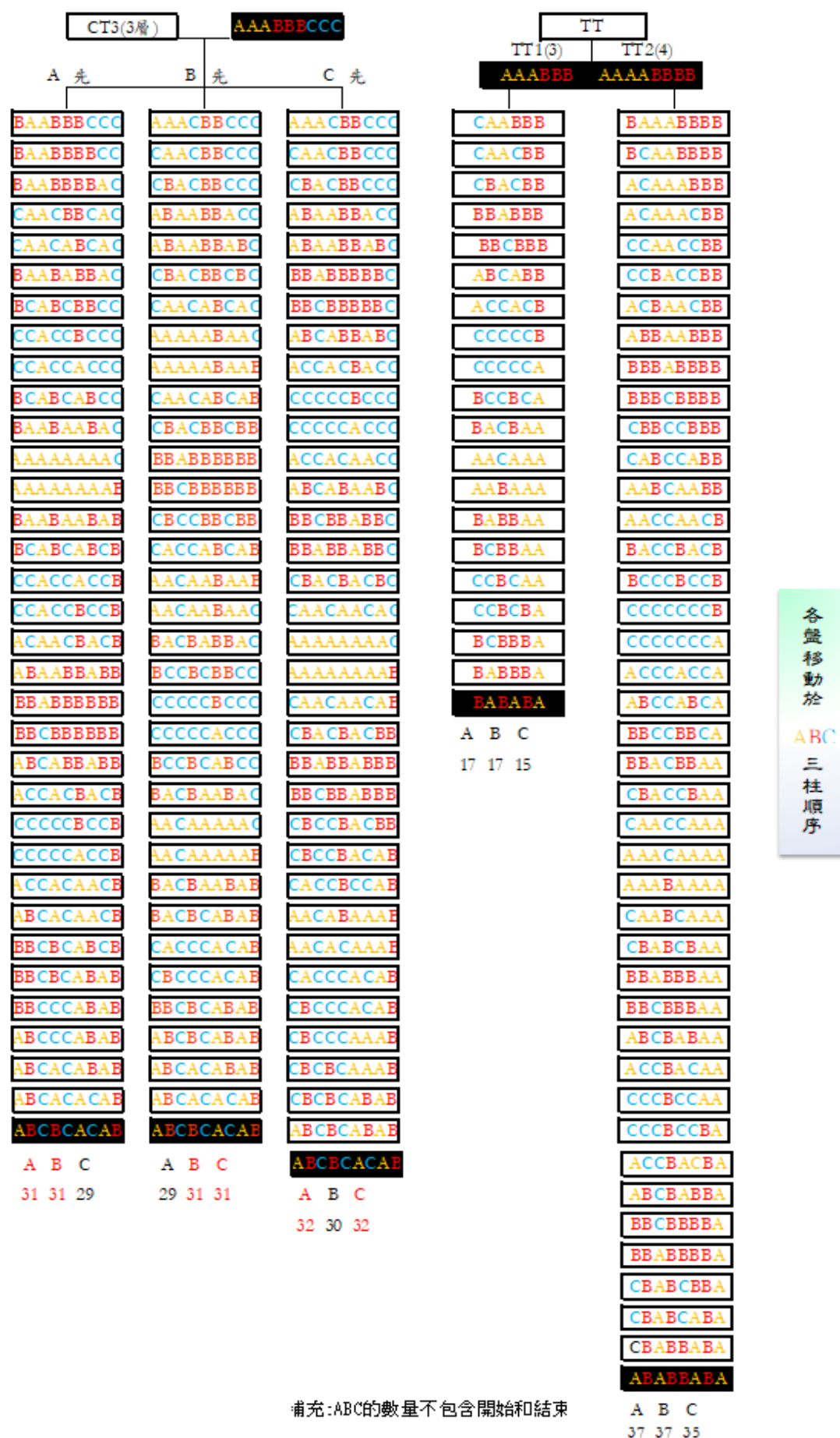
三、CT 繽紛多倫多塔的三塔兩色交錯三色交錯之輪替交換與分派有 A 先或 B 先的差異， $M(x)$ 比較如下頁表。

四、TT 兩色交錯雙柱交換 $F_H = 4$ 即六階段分派完畢。

五、CT2 色交錯 $F_H = 6$ ，即六階段分派完畢；CT3 色交錯 $F_H = 6$ ，即六階段分派完畢。

圖 17

TT 與 CT 之比較



捌、結論

一、單色雙塔的交換有沒有 A 先或 B 先的差異，結果一樣。因為不管哪一柱先行，都是以中間柱作為臨停點，除了底盤 F_H 移動 $D_n = 3$ 之外，中間柱是兩柱疊盤數量一樣，A 先和 B 先都會呈現以 B 柱為對稱點移動， D_{n-1} 呈現 F_V ，又以 $3-1P_{temp}$ 柱為翻轉點，因此結果呈現 2^n 規律變化。

二、變形第一版多倫多塔 TT 沒有 A 先或 B 先的差異。

三、變形第二版 CT 繽紛多倫多的三塔 2 色交錯及變形第三版三塔 3 色交錯，兩種版本之輪替交換與分派有 A 先或 B 先的差異。

四、傳統河內塔雙塔交換 $F_H = 3$ ，以中間暫停柱作為垂直或水平翻轉的對稱軸。TT $F_H = 4$ 以四階段分派完畢；CT2 色交錯 $F_H = 6$ ，以六階段分派完畢；CT3 色交錯 $F_H = 6$ ，以六階段分派完畢。

玖、參考文獻

[1] Franklin, K. (2002). Towers of Toronto. 2025/09/01 retrieved from Zillion Board Games.

<https://www.zillions-of-games.com/cgi-bin/zilligames/submissions.cgi?do=show;id=901>

[2] CN Tower. 加拿大國家電視塔。2025/09/01 retrieved from https://es.wikipedia.org/wiki/CN_Tower.

[3] 林紘毅、周子皓等(2012)。三柱鼎立——三柱搬盤遊戲最佳移動模式之探討。中華民國第 52 屆中小學科學展覽會作品說明書。

[4] 王暄淪、陳以澤等(2025)。快來看!好長的貪食蛇! 屏東縣第 65 屆中小學科學展覽會作品說明書。