

屏東縣第66屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：城堡躲貓貓—多重交換路徑探討

關 鍵 詞：多重交換、路徑圖特徵、圖同構

編號：A1012

城堡躲貓貓—多重交換路徑探討

摘要

- 一、本研究自創十連方基底計有 12 組 190 種結果。
- 二、以 V_k 和 B^T 檢同構圖方法有環圖、無環圖異構圖有 166 張。
- 三、不躍子設計 NC 有 12 組基底，最多 4 對數最少步數 12，3 對數最少步數 7，2 對數最少步數 5，1 對數最少步數 3。
- 四、全部 BRS 都可以採用躍子方式完成，會有第二階的躍子交換圖。
- 五、躍子設計 C 一定會產生孤立點， $V_i = 1$ ，最大環點數是 9。
- 六、躍子設計最多對數之最少步數一定是 4 對 9 步。
- 七、雙防設計 NA 會產生孤立點， $1 \leq V_i \leq 4$ ，雙防可躍子，無環圖性質改變，全部 BRS 都具有環特徵， $3 \leq V_C^{max} \leq 9$ 。
- 八、BRS 設計係 4×4 範圍，行列最多只能配置 2 對，雙防路徑 1 對 3 步，最多 2 對時最少步數是 7 步。

壹、研究動機

城堡棋子在西洋其中的移動方式是綜走-橫走，在一般印象中城堡與其他棋子比較起來移動方式少。我們在網路上發現了一個城堡交換遊戲[1]，需要考慮「互不衝突」的可能，又要能達到交換的目標，是很有挑戰的設計，因此我們提出以城堡交換為目標的各種交換方法，並探討完成交換的條件。

貳、研究目的

- 一、找出 Rooks Swap 遊戲規律及城堡交換條件。
- 二、找出各種連方組塊型態所導引出的城堡交換軌跡及其圖特徵。
- 三、探究可擺放 n 對城堡棋及其交換規律。

參、研究設備及器材

- 一、自製磁鐵版棋盤、方格紙、白紙、各色筆、筆記本。
- 二、微軟 Excel、GeoGebra 程式。

本研究使用之照片、圖片皆研究者繪製

肆、研究方法與工具

一、文獻回顧

(一)歷屆科展作品

1. 關於限制擺放位置

表 1

文獻摘要與啟示

屆次/作品名稱	作品內涵	對本研究的啟發
57 th 十字軍「斜」爭	探討棋盤可放置最多「互不攻擊」主教棋之條件及配置方法。	1.採用西洋棋黑白兩方對峙
48 th 當「月曆縱橫刪」遇上「八皇后棋」	探討棋盤可放置最多「互不攻擊」皇后棋之條件及配置方法。	2.將配置延伸為雙防交換。

2.關於交換條件

屆次/作品名稱	作品內涵	對本研究的啟示
60 th Crazy Knights	以自創「8+2」之十連塊棋盤為基礎，探討可擺放最多騎士對的條件及達到黑白交換之最少步數條件。	1.新創十連方組塊方式 2.多重城堡交換方式 3.交換規律探討 4.發展有效的同構檢視方式

我們發現該篇缺口有 2：

(1)在於環圖通式解無法適用於所有環圖，「騎士對數量 $\times 2 + 1$ 」 V_c^4 僅 1 對騎士對交換符合最少步數，至多可擺放 3 對騎士對， $3P_{mm}$ 不符合本式。 V_c^6 至多可 3 對，僅 1~2 對符合， $3P_{mm}$ 不符合。 V_c^8 至多可 4 對，但本式僅限 1~3 對適用， $4P_{mm}$ 不符合。

(2)該篇度序列探討粗略，無法有效檢視圖同構。以本研究發展之檢視方法，該篇 156 張節點圖，同構高達 31 張，含無環圖 16 張、有環圖 15 張，刪除同構後僅有 125 張圖。

3.關於路徑探討之城堡遊歷：城堡棋為縱走、橫走，相較其他棋子路徑較為單調，以此延伸有設立障礙讓城堡回到起點的路徑(Petković,1996)稱為「跨越障礙」的城堡遊歷，如圖 1。於本研究的啟示發展為躍子遊戲，並探討躍子交換的規律與條件。

圖 1
城堡跨越障礙遊歷



圖 2
2 對城堡棋起始-結束狀態

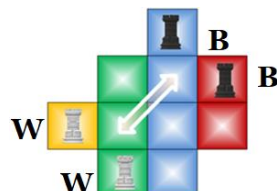
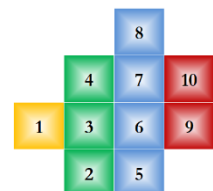


圖 3
棋盤編碼方式



本研究特點 在查核以上文獻後發展新的十連方組塊方式並融合遊歷路徑、跨越障礙與雙防，即「互不攻擊」之城堡，但討其路徑、最多城堡對數之最少交換步數的規律。

二、遊戲規則

1. **目標** 棋盤上擺放成對的黑白城堡棋，雙方互相交換位置，如圖 2。
2. **移動方式** 依據西洋棋城堡棋的走法，棋子可縱走、橫走或縱橫走。

本研究規則係從原位置到新位置即為移動 1 步。

3. 棋盤編碼，由下而上，由左而右依序編號 1~10，如圖 3。

4. 完成 n 對城堡棋交換的方法有 3 種：

- (1) 傳統走法(non-crossing, 簡稱 NC)：縱走、橫走或縱橫走，不跨躍黑棋或白棋，輪番移動完成交換。
- (2) 躍子走法(crossing, 簡稱 C)：除了縱橫走之外，可跨越其他棋子或空位，黑白不拘。
- (3) 雙防走法(non-attacking, 簡稱 NA)：黑白雙方交換過程於縱格橫格必須避開彼此，可以跨越其他同色棋子或空位。

三、解釋名詞

- (一) 基底 (Base of Rooks Swap, 簡稱 **BRS**)，指本研究使用的棋盤，由 10 個方格組成連方塊型組，又稱「組塊」。

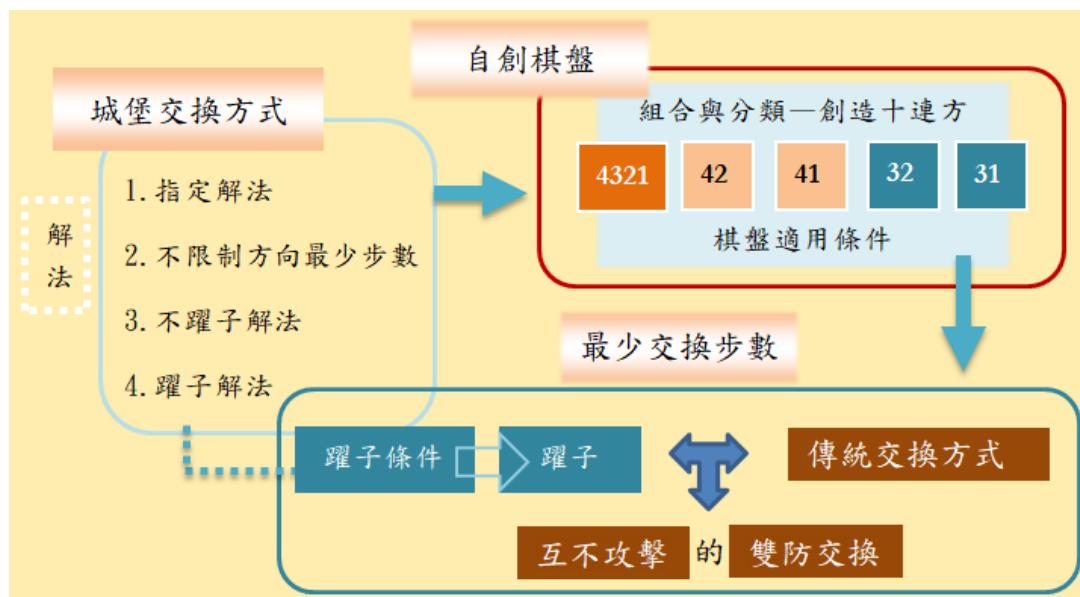
- (二) 交換圖特徵：以 $G=(V, E)$ 表現交換條件，本研究所有基底轉換為圖特徵及交換條件。

1. Tree：樹，示沒有環的連通圖，又稱無環圖，以 T 標註無環圖主幹(Trunk)。
2. B_T ：表示無環圖中分岔點，即樹的分支(Branch)。
3. Circle：環，由 3 個以上的點組成的封閉圖形。
4. V_k ：分岔點(kinetic vertices)，於環圖中可促成城堡對交換的點，度序列 $DS \geq 3$ 。
5. V_C^{max} ：有環圖之最大環點，用以標示交換圖中環點數最多的環。
6. V_i ：孤立點(isolated vertex)，度序列為 0，在 BRS 中可視為虛格。

- (三) 交換條件：

1. U_s ：unoccupied space 表示可供躍子空間。
2. $nPmM$ ： nP 表示城堡對數， mM 表示最少交換步數。

四、研究架構



五、自創十連方組塊作為研究工具

本研究使用之自創棋盤與 Crazy Knights 之八連方+2 連塊組合不同，是以**整數分拆**將 10 拆分為五大類，在 4×4 範圍內有【4321】、【3322】、【4411】、【3331】和【4222】五種拆分結果。以【4321】為主，將其他大類與主類比對後刪除同形組塊，得到城堡路徑使用之棋盤。

提問與討論 組塊方法有幾種？

方塊擺法 考慮在 4×4 範圍內任選 1 行或 1 列分別擺入 4 個、3 個、2 個和 1 個方塊，詳表 1。4 個方塊考慮行列對稱，有 1、4 對稱 2、3 對稱，有 2 種擺法；3 個方塊除了考慮行列對稱，還有 4 種組塊方式，包括(1,1,1,0)標為 a(3,0)、(0,1,1,1)標為 b(0,3)、(1,1,0,1)標為 c(2,0,1)、(1,0,1,1)標為 d(1,0,2)。2 個方塊有 6 種組塊方式，包括(1,1,0,0) (0,1,1,0) (0,0,1,1) (1,0,1,0) (0,1,0,1) (1,0,0,1)。1 個方塊 4 種組塊方式，包括(1,0,0,0) (0,1,0,0) (0,0,1,0) (0,0,0,1)。

表 2

4 × 4 範圍內方塊擺放方法

4 個方塊—4 種擺法		3 個方塊—4 種擺法		1 個方塊—4 種擺法	
2 個方塊—6 種擺法					

一、十二種次類型的產生與比較分析之組塊決定：以 4321 大類為主，以其他大類為次輔助比對的理由，以**從左到右**的逐行比對為主，輔以**由上而下**的逐列比對。

(一) **從左到右**的逐行比對：4321 大類為主，以其他大類為次輔助比對的理由。

(二) **由上而下**的逐列比對，為**二次編碼**，是將組塊**向右旋轉90°**後得到圖形，便於組內和組間同形比對，將重複的圖形刪除，保留唯一組塊。

(三)成形與不成形：刪除無法成形，最後得到 4321 主類型計有 12 次類型。

表 3
組塊成形篩選原則

不符合4×4範圍		組內同形		組間同形	

(四)組間比對：二次編碼是將組塊的鏡射、旋轉90°後，各組互相比對，刪除重複組塊，最後得到 190 種組合結果，與[1]之 156 種結果多出 34 個組塊。

圖 4
利用對稱軸核對組間同形

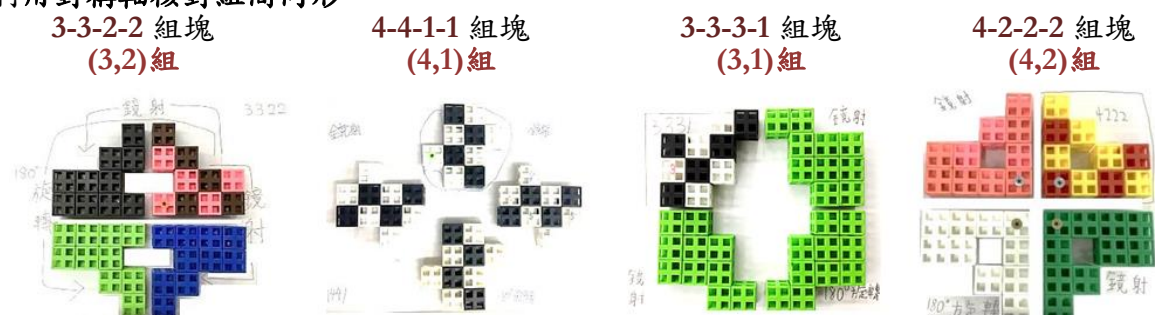


表 4
次類組塊結果

(3,2)組		(4,1)組	
第 1 類【3322】 組合總數 576	第 2 類【3232】 組合總數 576	第 1 類【4411】 組合總數 16	第 2 類【1414】 組合總數 16
第 3 類【3223】 組合總數 576	第 4 類【2332】 組合總數 576	第 3 類【4114】 組合總數 16	第 4 類【1441】 組合總數 16
(3,1)組		(4,2)組	
第 1 類【3331】 組合總數 256	第 2 類【3133】 組合總數 256	第 1 類【4222】 組合總數 126	第 2 類【2422】 組合總數 126

表 5
(4,3,2,1)組次類與組塊數量

次類	A 類	B	C	D	E	F
編碼	4321	4231	4312	4213	4123	4132
數量	18	23	8	7	6	10
次類	G	H	I	J	K	L
編碼	3421	3412	3241	2431	2341	2413
數量	18	9	26	27	26	12

【小結】主類(4,3,2,1)總組合數有 1152 個，比對同形、刪除組內同形與組間同形之後，計有 12 組 190 個組塊結果，即本研究使用之 BRS。

伍、研究過程與分析

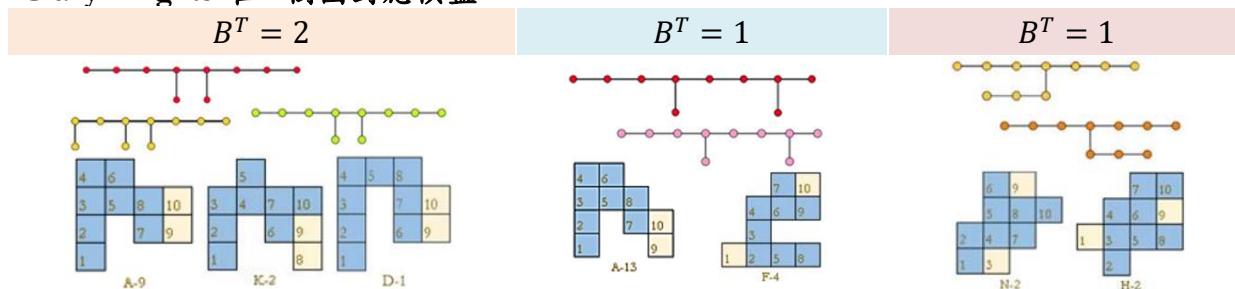
一、圖同構—圖與基底互相轉換

(一)從文獻比對中發現 Crazy Knights 以度序列作為同構檢核工具不夠嚴謹，其 156 張節點圖檢出無環圖總量 39，刪除 16 張同構圖，餘唯一樹圖 23 張，其中有大量同構如下：

1. 1 組 7 張圖同構 $A9 \cong B24 \cong D1 \cong K2 \cong M5 \cong M9 \cong P1$ 。
2. 2 組 4 張圖同構 $A13 \cong D6 \cong F4 \cong M4$ ； $A16 \cong B22 \cong F6 \cong L1$ 。
3. 1 組 3 張圖同構 $B10 \cong D4 \cong F1$ 。
4. 2 組 2 張圖同構 $D7 \cong B9$ ， $N2 \cong H2$ 。

圖 5

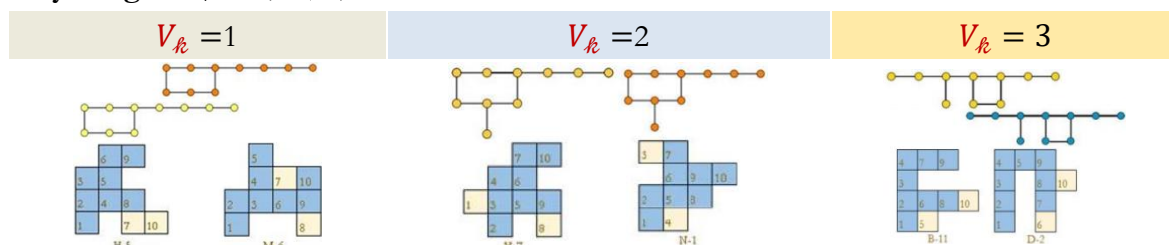
Crazy Knights 唯一樹圖對應棋盤



有環圖檢出數圖總量 117，刪除 15 張同構圖。同構分析有 1 組 4 張圖同構 $H5 \cong I2 \cong M1 \cong M6$ 。3 組 3 張圖同構 $A7 \cong A21 \cong A35$ ； $A32 \cong A19 \cong B29$ ； $A19 \cong A32 \cong B29$ 。8 組 2 張圖同構 $A30 \cong A5$ ， $A34 \cong A20$ ， $B15 \cong A29$ ， $A28 \cong B18$ ， $C5 \cong C8$ ， $B11 \cong D2$ ， $H7 \cong N1$ ， $I1 \cong M11$ 。有環圖餘 102 張。

圖 6

Crazy Knights 唯一環圖對應棋盤



【小結】以 B^T 和 V_k 檢核 Crazy Knights，發現樹圖特徵 $B^T = 1$ 有 4 張； $B^T = 2$ 有 11 張； $B^T = 3$ 有 2 張；環圖特徵 V_k^4 中 $V_k = 1$ 有 3 張； $V_k = 2$ 有 7 張； $V_k = 3$ 有 10 張； $V_k = 4$ 有 1 張； V_k^6 中 $V_k = 1$ 有 1 張； $V_k = 2$ 有 8 張； $V_k = 3$ 有 8 張； $V_k = 4$ 有 4 張； $V_k = 5$ 有 1 張； V_k^8 中 $V_k = 1$ 有 3 張； $V_k = 2$ 有 5 張； $V_k = 3$ 有 7 張； $V_k = 4$ 有 5 張。

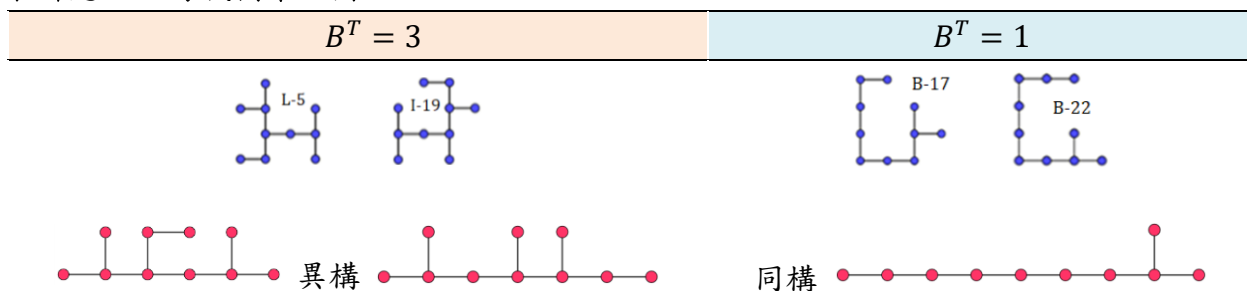
該作品使用之 156 張節點圖事實上僅有 125 張唯一圖。

(二)本研究以 B^T 和 V_k 同構檢索方式

以 B^T 和 V_k 檢核後發現本研究與 Crazy Knights 有數張圖同構，亦即，一種圖可以轉化為城堡交換 ↔ 騎士交換兩種棋盤，例如 $B21 \cong F16$ ， $D7 \cong M4$ ， $M8$ ， $F10 \cong D4$ ， $I16 \cong A5$ ， $I17 \cong A4$ ， $I21 \cong F8$ ， $H6 \cong M1$ ， $I2$ 。

圖 7

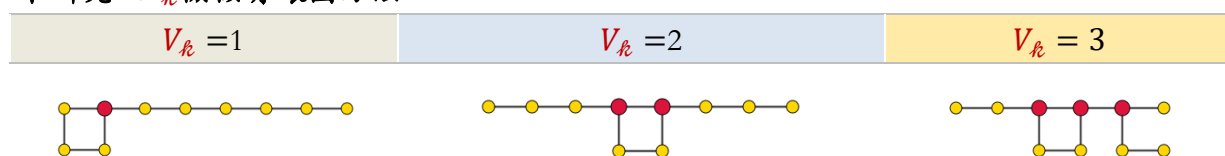
本研究以 B^T 尋找樹唯一圖



【小結】得到本研究無環圖總量 43，唯一樹圖有 30 個。

圖 8

本研究以 V_k 檢核有環圖方法



【小結】1. 本研究環圖計有 147 個，比對同構後唯一環圖有 136 個。

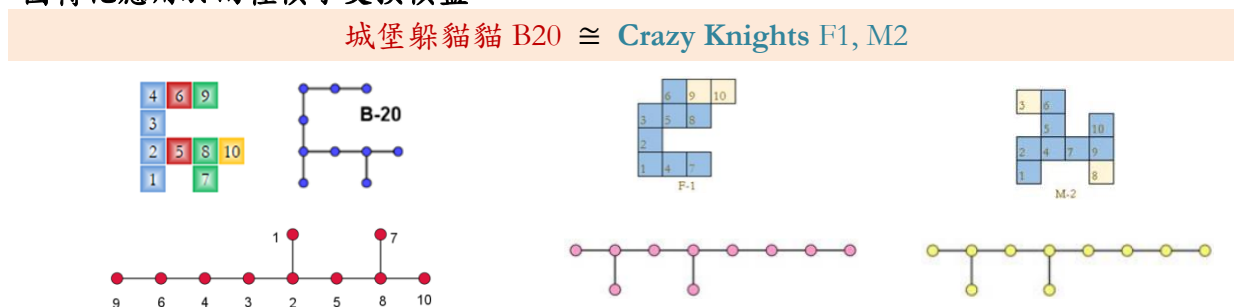
2. 本研究用於不躍子交換唯一圖計有 166 張。

(三)圖轉化為棋盤的創作

Crazy Knights 一張圖可以有多個騎士交換棋盤，在我們的 BRS 也有同樣的發現，一張圖可以對應多個 BRS 可做為城堡交換棋盤。

表 6

圖轉化應用於兩種棋子交換棋盤



【小結】我們將基底轉換為不躍子交換圖時將樹的分岔點 B^T 與環的分叉點 V_k 分別列出有利於同構比對篩出唯一 BRS。

二、BRS 轉化為圖—判斷交換條件

主要組合類型【4-321】總組合數 1152 種結果，將少於 4×4 範圍組塊刪除，剔除不成形後有 18 次類組塊，分別以英文字母歸為子類。再將所有 BRS 轉化為圖找出特徵。

A 類【4-321】總組合數，刪除不成形及重複組塊，符合十連方組塊有 18 種。

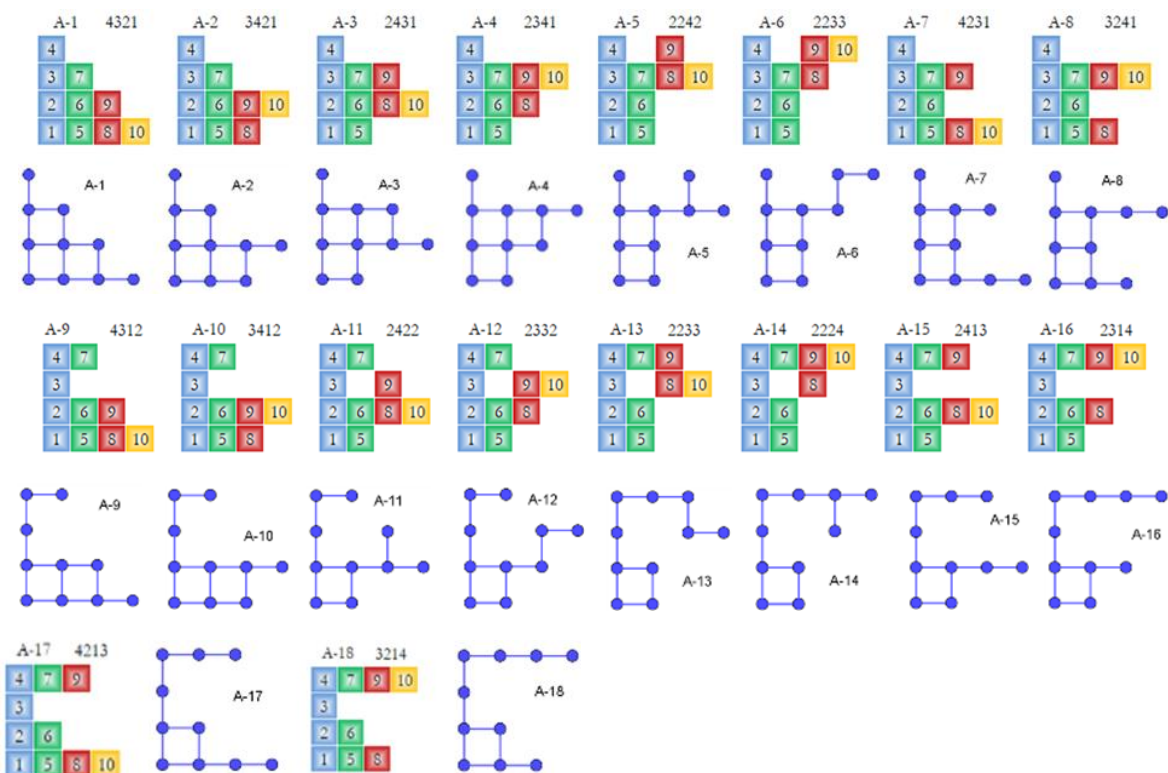


表 7

A 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)							Tree B^T
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	$V_{\#}$	
A 1	8	1,2,5,6	2,3,6,7	5,6,8,9	1,2,5,6,8,9	1,2,3,5,6,7	1,2,3,5,6,7,8,9	5	x
A 2	8	1,2,5,6	2,3,6,7	5,6,8,9	1,2,5,6,8,9	1,2,3,5,6,8	1,2,3,5,6,7,8,9	5	x
A 3	8	1,2,5,6	2,3,6,7	6,7,8,9	1,2,3,5,6,7	2,3,6,7,8,9	1,2,3,5,6,7,8,9	5	x
A 4	8	1,2,5,6	2,3,6,7	6,7,8,9	1,2,3,5,6,7	2,3,6,7,8,9	1,2,3,5,6,7,8,9	5	x
A 5	6	1,2,5,6	2,3,6,7	x	1,2,3,5,6,7	x	x	5	x
A 6	6	1,2,5,6	2,3,6,7	x	1,2,3,5,6,7	x	x	4	x
A 7	6	1,2,5,6	2,3,6,7	x	1,2,3,5,6,7	x	x	5	x
A 8	6	1,2,5,6	2,3,6,7	x	1,2,3,5,6,7	x	x	5	x
A 9	6	1,2,5,6	5,6,8,9	x	1,2,5,6,8,9	x	x	4	x
A 10	6	1,2,5,6	5,6,8,9	x	1,2,5,6,8,9	x	x	4	x
A 11	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	3	x
A 12	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	2	x
A 13	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	1	x

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)							Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	
A 14	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	2	x
A 15	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	2	x
A 16	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	2	x
A 17	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	2	x
A 18	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	2	x

B 類【4-231】總組合數，刪除不成形及重複組塊，符合十連方組塊有 23 種。

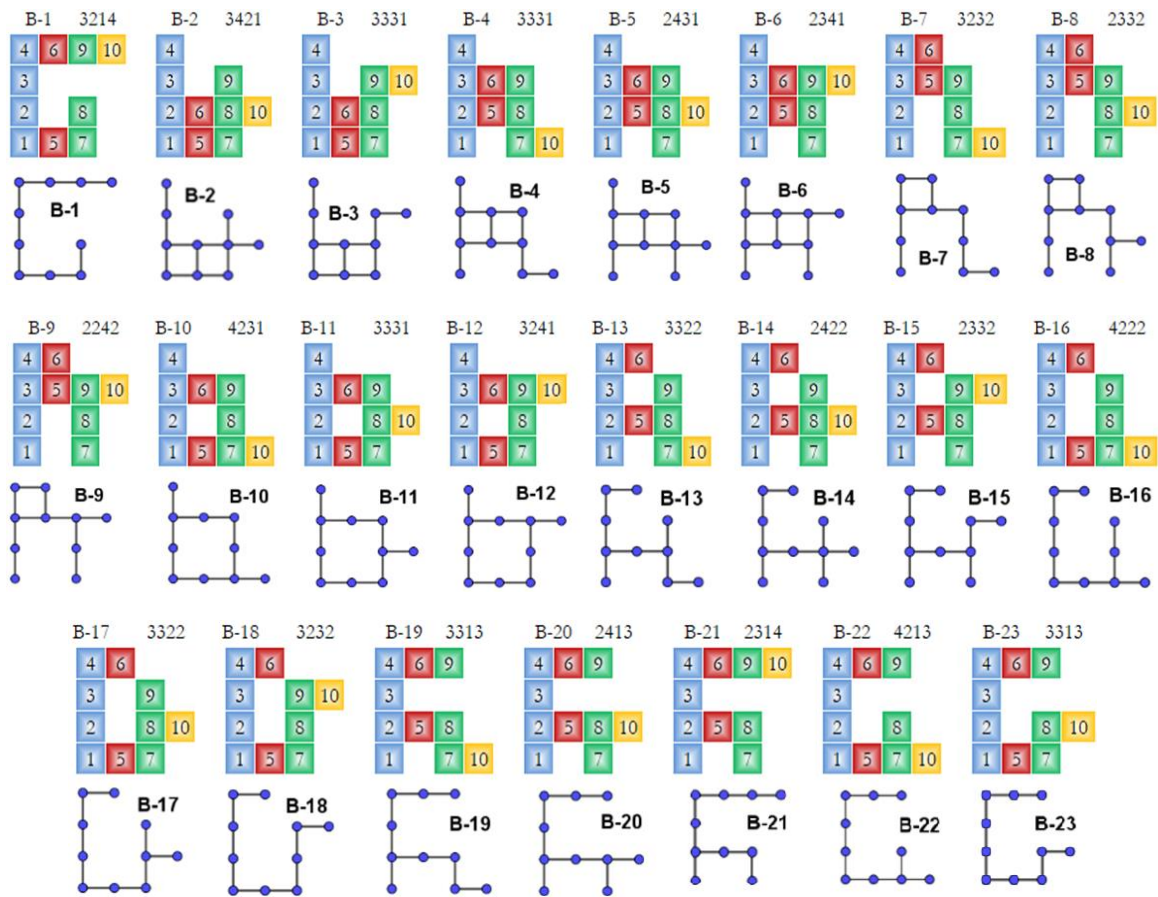


表 8
B 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)							Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	
B 1	0	x	x	x	x	x	x	x	0
B 2	6	1,2,5,6	5,6,7,8	x	1,2,5,6,7,8	x	x	4	x
B 3	6	1,2,5,6	5,6,7,9	x	1,2,5,6,7,8	x	x	4	x
B 4	6	2,3,5,6	5,6,8,9	x	2,3,5,6,8,9	x	x	5	x
B 5	6	2,3,5,6	5,6,8,9	x	2,3,5,6,8,9	x	x	5	x
B 6	6	2,3,5,6	5,6,8,9	x	2,3,5,6,8,9	x	x	6	x
B 7	4	3,4,5,6	x	x	x	x	x	2	x

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)								Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	B^T	
B 8	4	3,4,5,6	x	x	x	x	x	3	x	x
B 9	4	3,4,5,6	x	x	x	x	x	3	x	x
B 10	8	x	x	x	x	x	1,2,3,5,6,7,8,9	2	x	x
B 11	8	x	x	x	x	x	1,2,3,5,6,7,8,9	2	x	x
B 12	8	x	x	x	x	x	1,2,3,5,6,7,8,9	2	x	x
B 13	0	x	x	x	x	x	x	x	2,8	
B 14	0	x	x	x	x	x	x	x	2,8	
B 15	0	x	x	x	x	x	x	x	2,8	
B 16	0	x	x	x	x	x	x	x	7	
B 17	0	x	x	x	x	x	x	x	8	
B 18	0	x	x	x	x	x	x	x	0	
B 19	0	x	x	x	x	x	x	x	2	
B 20	0	x	x	x	x	x	x	x	2,8	
B 21	0	x	x	x	x	x	x	x	2	
B 22	0	x	x	x	x	x	x	x	7	
B 23	0	x	x	x	x	x	x	x	0	

C 類【4-312】總組合數，符合十連方組塊有 8 種。

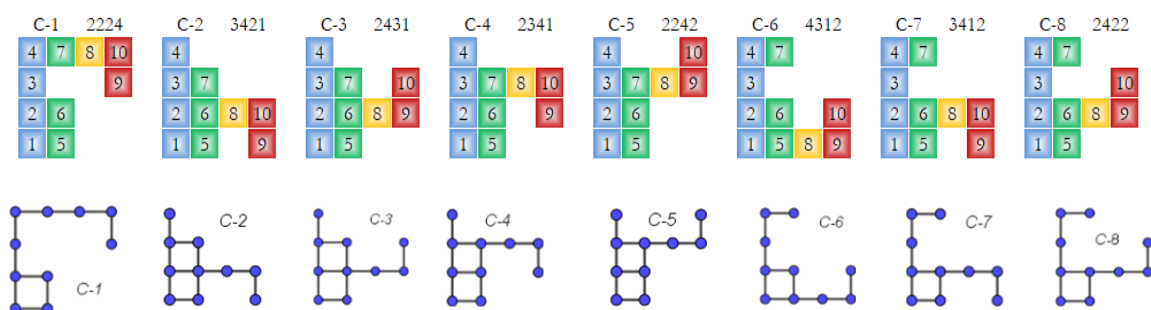


表 9
C 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)								Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	B^T	
C 1	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	1	x	x
C 2	6	1,2,5,6	2,3,6,7		1,2,3,5,6,7	x	x	3	x	x
C 3	6	1,2,5,6	2,3,6,7		1,2,3,5,6,7	x	x	3	x	x
C 4	6	1,2,5,6	2,3,6,7	x	1,2,3,5,6,7	x	x	4	x	x
C 5	6	1,2,5,6	2,3,6,7	x	1,2,3,5,6,7	x	x	4	x	x
C 6	6	1,2,5,6	x	x	x	x	x	2	x	x
C 7	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	2	x	x

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)								Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	B^T	
C 8	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	2	x	

第 4 類【4-213】總組合數，符合十連方組塊有 7 種。

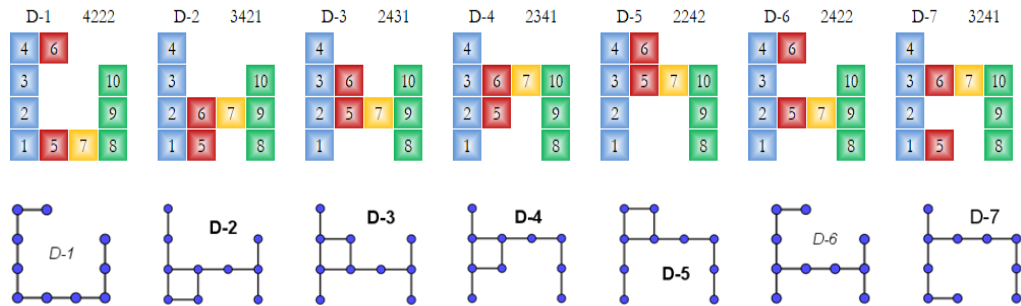


表 10
D 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)								Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	B^T	
D 1	0	x	x	x	x	x	x	x	0	
D 2	4	1,2,5,6	x	x	x	x	x	3	x	
D 3	4	2,3,5,6	x	x	x	x	x	4	x	
D 4	4	2,3,5,6	x	x	x	x	x	3	x	
D 5	4	3,4,5,6	x	x	x	x	x	2	x	
D 6	0	x	x	x	x	x	x	x	2,9	
D 7	0	x	x	x	x	x	x	x	3	

第 5 類【4-123】總組合數，符合十連方組塊有 6 種。

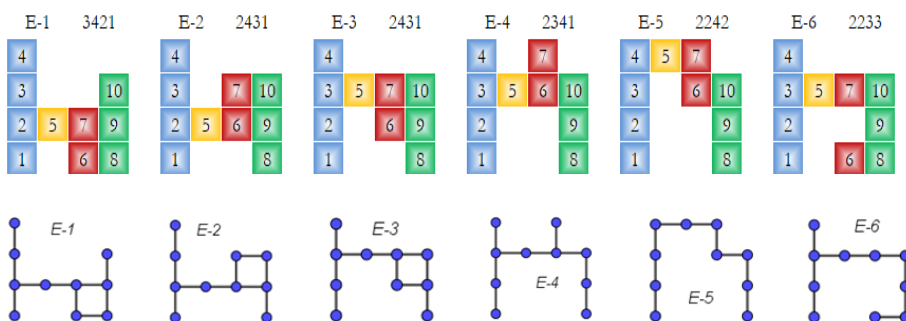


表 11
E 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)								Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	B^T	
E 1	4	6,7,8,9	x	x	x	x	x	3	x	
E 2	4	6,7,9,10	x	x	x	x	x	3	x	
E 3	4	6,7,9,10	x	x	x	x	x	3	x	

E	4	0	X	X	X	X	X	X	X	3,6
E	5	0	X	X	X	X	X	X	X	0
E	6	0	X	X	X	X	X	X	X	3

第 6 類【4-132】總組合數，符合十連方組塊有 10 種。

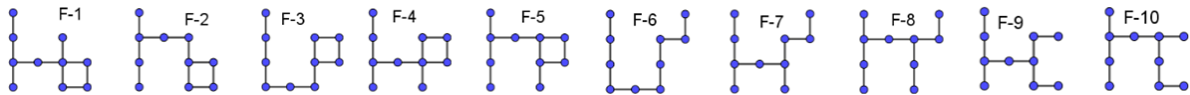


表 12
F 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)							Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	B^T
F 1	4	6,7,9,10	X	X	X	X	X	2	X
F 2	4	6,7,9,10	X	X	X	X	X	2	X
F 3	4	7,8,9,10	X	X	X	X	X	2	X
F 4	4	7,8,9,10	X	X	X	X	X	2	X
F 5	4	7,8,9,10	X	X	X	X	X	3	X
F 6	0	X	X	X	X	X	X	X	0
F 7	0	X	X	X	X	X	X	X	2,7
F 8	0	X	X	X	X	X	X	X	3,8
F 9	0	X	X	X	X	X	X	X	2,7
F 10	0	X	X	X	X	X	X	X	3,8

第 7 類【3-421】總組合數，符合十連方組塊有 18 種。

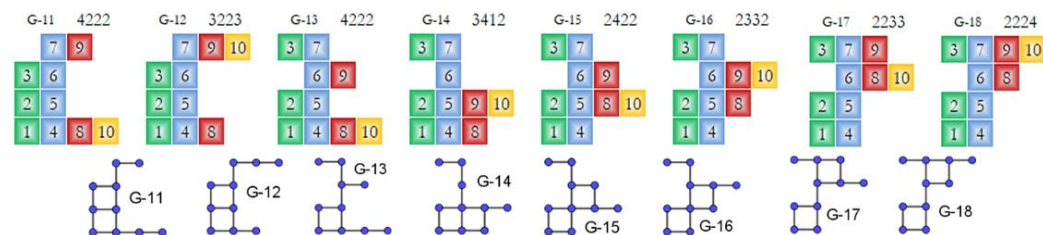
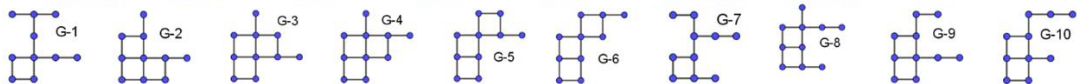


表 13
G 組 BRS 圖特徵

BRS 編號		V_c^{max}	n Circle(s)							Tree
			V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_{ℓ}	B^T
G	1	4	1,2,4,5	x	x	x	x	x	2	x
G	2	8	1,2,4,5	2,3,5,6	4,5,8,9	1,2,3,4,5,6	1,2,4,5,8,9	1,2,3,4,5,6,8,9	5	x
G	3	8	1,2,4,5	2,3,5,6	5,6,8,9	1,2,3,4,5,6	2,3,5,6,8,9	1,2,3,4,5,6,8,9	4	x
G	4	8	1,2,4,5	2,3,5,6	5,6,8,9	1,2,3,4,5,6	2,3,5,6,8,9	1,2,3,4,5,6,8,9	4	x
G	5	6	1,2,4,5	2,3,5,6	6,7,8,9	1,2,3,4,5,6	x	x	4	x
G	6	6	1,2,4,5	2,3,5,6	6,7,8,9	1,2,3,4,5,6	x	x	4	x
G	7	4	1,2,4,5	x	x	x	x	x	3	x
G	8	6	1,2,4,5	2,3,5,6	x	1,2,3,4,5,6	x	x	4	x
G	9	6	1,2,4,5	2,3,5,6	x	1,2,3,4,5,6	x	x	3	x
G	10	6	1,2,4,5	2,3,5,6	x	1,2,3,4,5,6	x	x	3	x
G	11	6	1,2,4,5	2,3,5,6	x	1,2,3,4,5,6	x	x	4	x
G	12	6	1,2,4,5	2,3,5,6	x	1,2,3,4,5,6	x	x	4	x
G	13	4	1,2,4,5	x	x	x	x	x	3	x
G	14	6	1,2,4,5	5,6,8,9	x	1,2,4,5,8,9	x	x	3	x
G	15	4	1,2,4,5	5,6,8,9	x	x	x	x	3	x
G	16	4	1,2,4,5	5,6,8,9	x	x	x	x	3	x
G	17	4	1,2,4,5	6,7,8,9	x	x	x	x	4	x
G	18	4	1,2,4,5	6,7,8,9	x	x	x	x	4	x

第 8 類【3-412】總組合數，符合十連方組塊有 9 種。

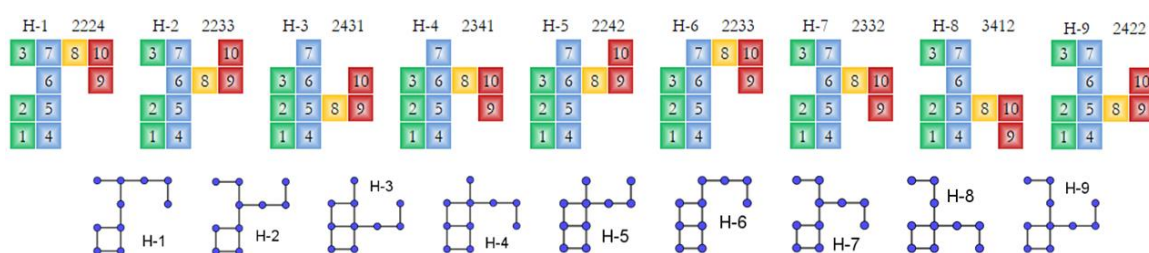


表 14
H 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)								Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	$V_{\#}$	B^T	
H 1	4	1,2,4, 5	x	x	x	x	x	2	x	
H 2	4	1,2,4, 5	x	x	x	x	x	2	x	
H 3	6	1,2,4,5	2,3,5,6	x	1,2,3,4,5,6	x	x	3	x	
H 4	6	1,2,4,5	2,3,5,6	x	1,2,3,4,5,6	x	x	3	x	

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)								Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	B^T	
H 5	6	1,2,4,5	2,3,5,6	x	1,2,3,4,5,6	x	x	3	x	
H 6	6	1,2,4,5	2,3,5,6	x	1,2,3,4,5,6	x	x	3	x	
H 7	4	1,2,4,5	x	x	x	x	x	2	x	
H 8	4	1,2,4,5	x	x	x	x	x	1	x	
H 9	4	1,2,4,5	x	x	x	x	x	1	x	

I 類【3-241】總組合數，符合十連方組塊有 26 種。

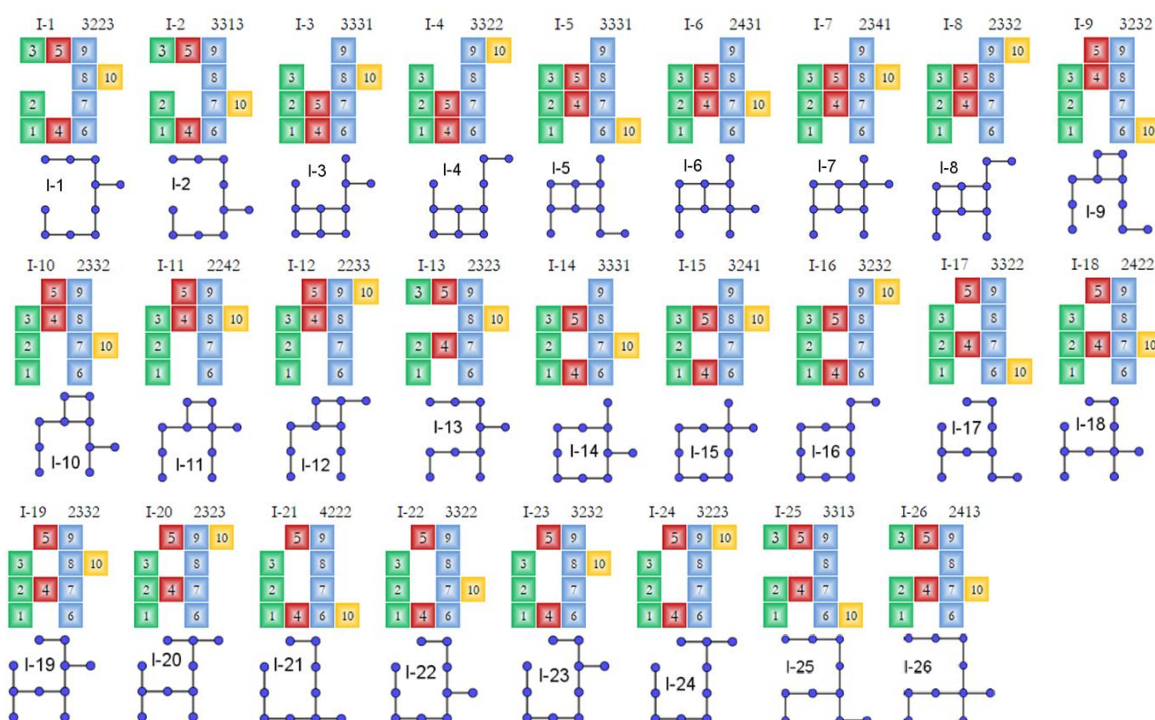


表 15
I 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)								Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	B^T	
I 1	0	x	x	x	x	x	x	x	8	
I 2	0	x	x	x	x	x	x	x	7	
I 3	6	1,2,4,5	4,5,6,7	x	1,2,4,5,6,7	x	x	5	x	
I 4	6	1,2,4,5	4,5,6,7	x	1,2,4,5,6,7	x	x	4	x	
I 5	6	2,3,4,5	4,5,7,8	x	2,3,4,5,7,8	x	x	5	x	
I 6	6	2,3,4,5	4,5,7,8	x	2,3,4,5,7,8	x	x	5	x	
I 7	6	2,3,4,5	4,5,7,8	x	2,3,4,5,7,8	x	x	5	x	
I 8	6	2,3,4,5	4,5,7,8	x	2,3,4,5,7,8	x	x	5	x	
I 9	4	4,5,8,9	x	x	x	x	x	2	x	
I 10	4	4,5,8,9	x	x	x	x	x	3	x	

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)							Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	$V_{\#}$	
I 11	4	4,5,8,9	x	x	x	x	x	2	x
I 12	4	4,5,8,9	x	x	x	x	x	3	x
I 13	0	x	x	x	x	x	x	x	7,8
I 14	8	x	x	x	x	x	1,2,3,4,5,6,7,8	2	x
I 15	8	x	x	x	x	x	1,2,3,4,5,6,7,8	1	x
I 16	8	x	x	x	x	x	1,2,3,4,5,6,7,8	1	x
I 17	0	x	x	x	x	x	x	x	2,7
I 18	0	x	x	x	x	x	x	x	2,7
I 19	0	x	x	x	x	x	x	x	2,7,8
I 20	0	x	x	x	x	x	x	x	2,7,9
I 21	0	x	x	x	x	x	x	x	6
I 22	0	x	x	x	x	x	x	x	7
I 23	0	x	x	x	x	x	x	x	8
I 24	0	x	x	x	x	x	x	x	9
I 25	0	x	x	x	x	x	x	x	7
I 26	0	x	x	x	x	x	x	x	7

J 類【2-431】總組合數，符合十連方組塊有 27 種。

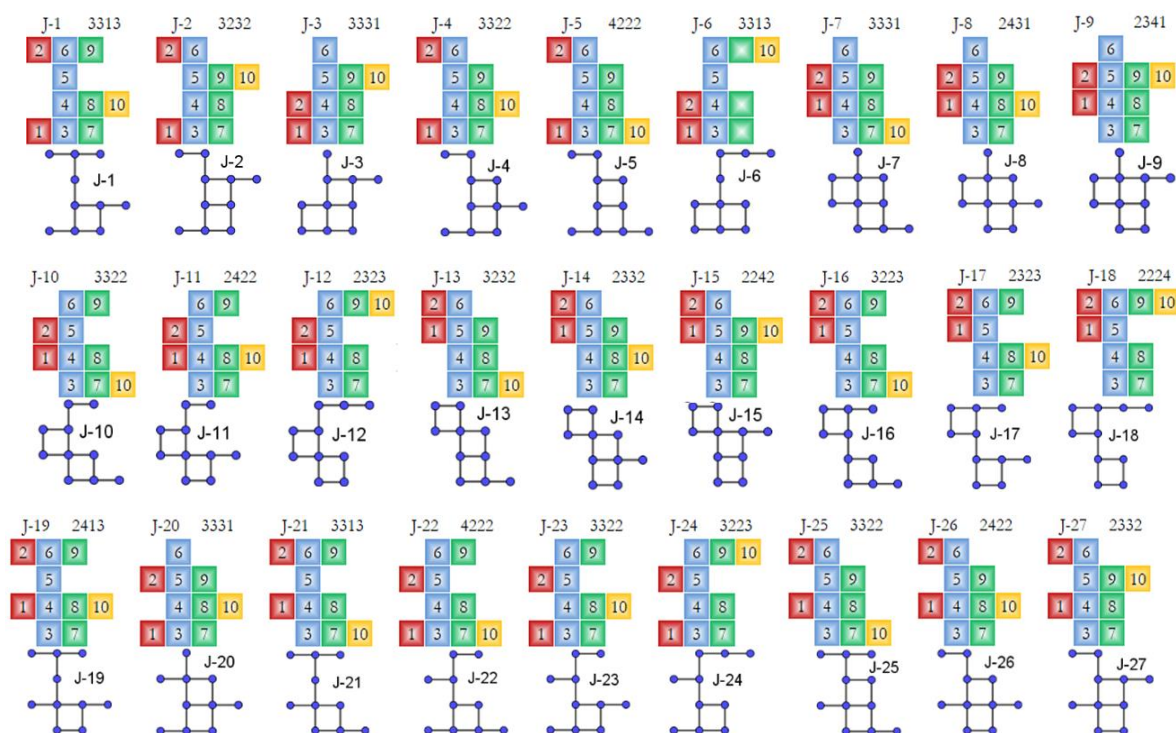
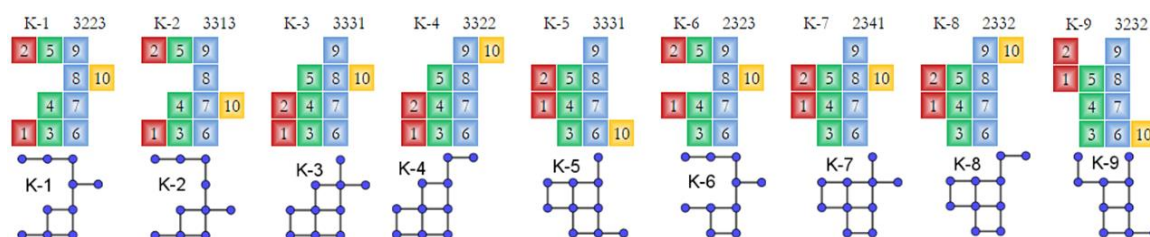


表 16
J 組 BRS 圖特徵

BRS 編號		V_c^{max}	n Circle(s)							Tree
			V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	B^T
J	1	4	3,4,7,8	x	x	x	x	x	3	x
J	2	6	3,4,7,8	4,5,8,9	x	3,4,5,7,8,9	x	x	5	x
J	3	8	1,2,3,4	3,4,7,8	4,5,8,9	1,2,3,4,7,8	3,4,5,7,8,9	1,2,3,4,5,7,8,9	5	x
J	4	6	3,4,7,8	4,5,8,9		3,4,5,7,8,9	x	x	4	x
J	5	6	3,4,7,8	4,5,8,9	x	3,4,5,7,8,9	x	x	5	x
J	6	6	1,2,3,4	3,4,7,8	x	1,2,3,4,7,8	x	x	2	x
J	7	8	1,2,4,5	3,4,7,8	4,5,8,9	1,2,4,5,8,9	3,4,5,7,8,9	1,2,3,4,5,7,8,9	4	x
J	8	8	1,2,4,5	3,4,7,8	4,5,8,9	1,2,4,5,8,9	3,4,5,7,8,9	1,2,3,4,5,7,8,9	3	x
J	9	8	1,2,4,5	3,4,7,8	4,5,8,9	1,2,4,5,8,9	3,4,5,7,8,9	1,2,3,4,5,7,8,9	4	x
J	10	4	1,2,4,5	3,4,7,8	x	x	x	x	3	x
J	11	4	1,2,4,5	3,4,7,8	x	x	x	x	3	x
J	12	4	1,2,4,5	3,4,7,8	x	x	x	x	2	x
J	13	6	1,2,5,6	3,4,7,8	4,5,8,9	3,4,5,7,8,9	x	x	4	x
J	14	6	1,2,5,6	3,4,7,8	4,5,8,9	3,4,5,7,8,9	x	x	3	x
J	15	6	1,2,5,6	3,4,7,8	4,5,8,9	3,4,5,7,8,9	x	x	4	x
J	16	4	1,2,5,6	3,4,7,8	x	x	x	x	4	x
J	17	4	1,2,5,6	3,4,7,8	x	x	x	x	4	x
J	18	4	1,2,5,6	3,4,7,8	x	x	x	x	3	x
J	19	4	3,4,7,8	x	x	x	x	x	3	x
J	20	6	3,4,7,8	4,5,8,9	x	3,4,5,7,8,9	x	x	4	x
J	21	4	3,4,7,8	x	x	x	x	x	3	x
J	22	4	3,4,7,8	x	x	x	x	x	4	x
J	23	4	3,4,7,8	x	x	x	x	x	4	x
J	24	4	3,4,7,8	x	x	x	x	x	3	x
J	25	6	3,4,7,8	4,5,8,9	x	3,4,5,7,8,9	x	x	5	x
J	26	6	3,4,7,8	4,5,8,9	x	3,4,5,7,8,9	x	x	3	x
J	27	6	3,4,7,8	4,5,8,9	x	3,4,5,7,8,9	x	x	4	x

K 類【2-341】總組合數，符合十連方組塊有 26 種。



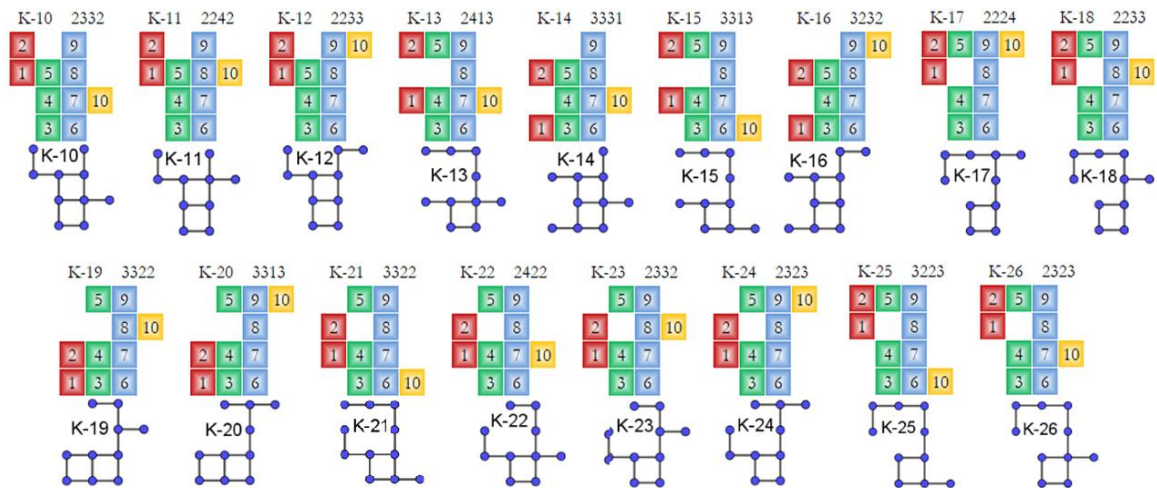


表 17
K 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)							Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_{ℓ}	
K 1	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	3	x
K 2	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	2	x
K 3	8	3,4,6,7	1,2,3,4	4,5,7,8	1,2,3,4,6,7	3,4,5,6,7,8	1,2,3,4,5,6,7,8	4	x
K 4	8	3,4,6,7	1,2,3,4	4,5,7,8	1,2,3,4,6,7	3,4,5,6,7,8	1,2,3,4,5,6,7,8	4	x
K 5	8	3,4,6,7	1,2,4,5	4,5,7,8	1,2,4,5,7,8	3,4,5,6,7,8	1,2,3,4,5,6,7,8	5	x
K 6	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	3	x
K 7	8	3,4,6,7	1,2,4,5	4,5,7,8	1,2,4,5,7,8	3,4,5,6,7,8	1,2,3,4,5,6,7,8	4	x
K 8	8	3,4,6,7	1,2,4,5	4,5,7,8	1,2,4,5,7,8	3,4,5,6,7,8	1,2,3,4,5,6,7,8	4	x
K 9	6	3,4,6,7	4,5,7,8	x	3,4,5,6,7,8	x	x	5	x
K 10	6	3,4,6,7	4,5,7,8	x	3,4,5,6,7,8	x	x	4	x
K 11	6	3,4,6,7	4,5,7,8	x	3,4,5,6,7,8	x	x	4	x
K 12	6	3,4,6,7	4,5,7,8	x	3,4,5,6,7,8	x	x	4	x
K 13	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	2	x
K 14	6	3,4,6,7	4,5,7,8	x	3,4,5,6,7,8	x	x	5	x
K 15	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	3	x
K 16	6	3,4,6,7	4,5,7,8	x	3,4,5,6,7,8	x	x	5	x
K 17	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	2	x
K 18	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	2	x
K 19	6	3,4,6,7	1,2,3,4	x	1,2,3,4,6,7	x	x	4	x
K 20	6	3,4,6,7	1,2,3,4	x	1,2,3,4,6,7	x	x	4	x
K 21	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	3	x
K 22	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	2	x
K 23	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	3	x
K 24	4	3,4,6,7	x	x	x	x	x	3	x

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)							Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	
K 25	4	3,4, 6,7	x	x	x	x	x	2	x
K 26	4	3,4, 6,7	x	x	x	x	x	2	x

L 類【2-413】總組合數，符合十連方組塊有 12 種

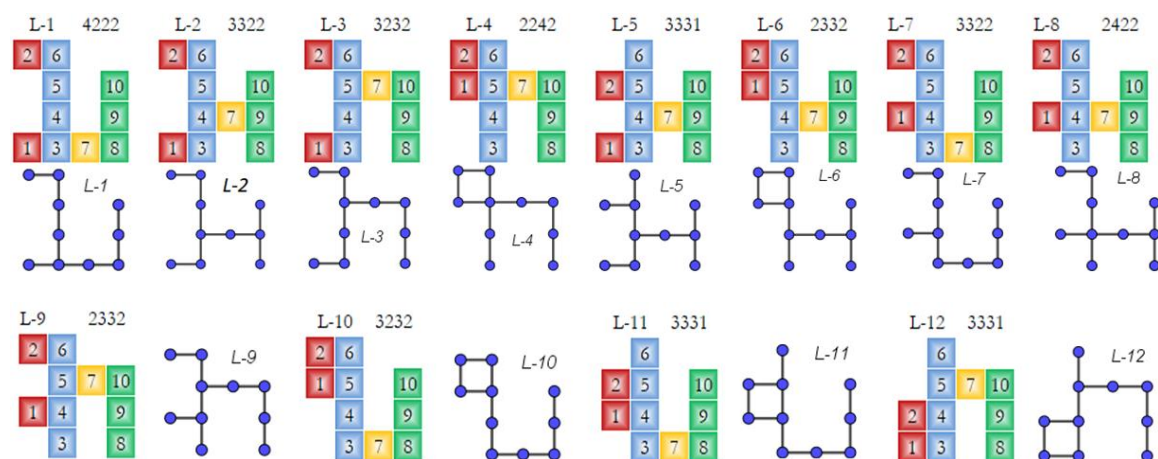


表 18
L 組 BRS 圖特徵

BRS 編號	V_c^{max}	n Circle(s)							Tree
		V_c^4	V_c^4	V_c^4	V_c^6	V_c^6	V_c^8	V_k	
L 1	0	x	x	x	x	x	x	x	3
L 2	0	x	x	x	x	x	x	x	4,9
L 3	0	x	x	x	x	x	x	x	5
L 4	4	1,2, 5,6	x	x	x	x	x	1	x
L 5	0	x	x	x	x	x	x	x	4,5,9
L 6	4	1,2, 5,6	x	x	x	x	x	3	x
L 7	0	x	x	x	x	x	x	x	4
L 8	0	x	x	x	x	x	x	x	4,9
L 9	0	x	x	x	x	x	x	x	4,5
L 10	4	1,2, 5,6	x	x	x	x	x	1	x
L 11	4	1,2, 4,5	x	x	x	x	x	2	x
L 12	4	1,2,3, 4	x	x	x	x	x	2	x

陸、研究結果

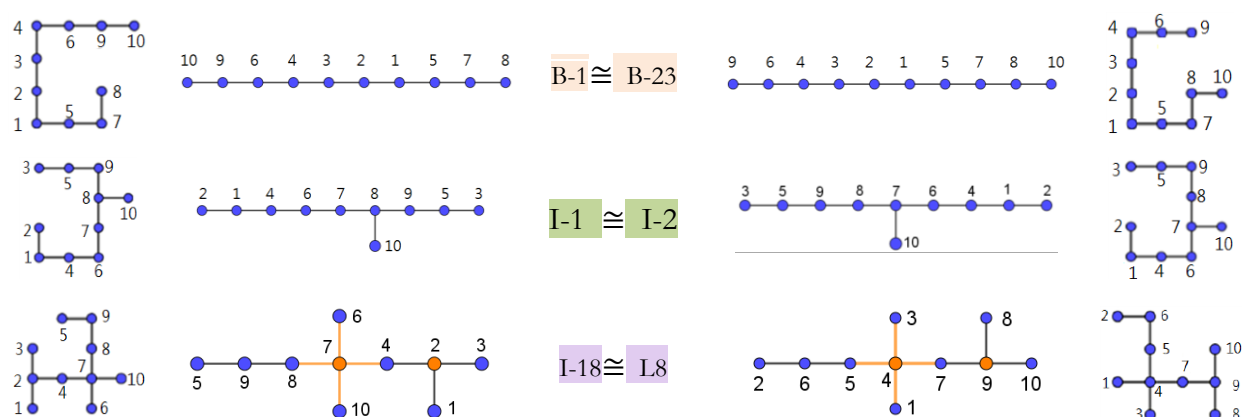
一、圖特徵分析

(一)圖同構

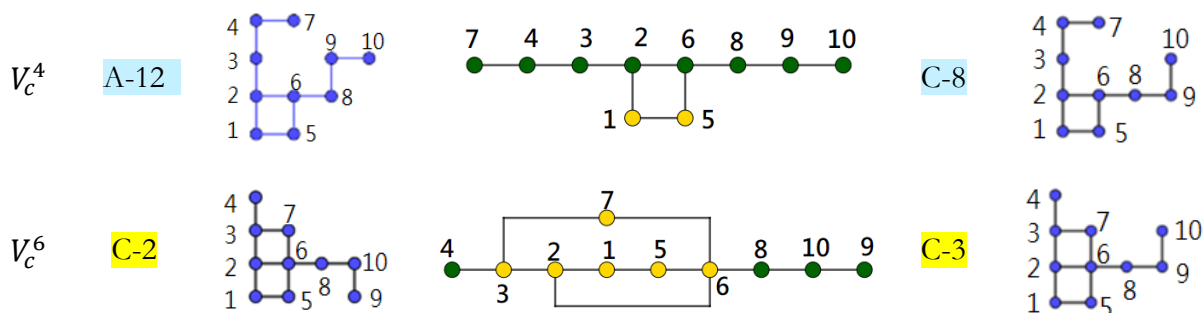
1.無環圖：將 BRS 扁平化後有明顯主幹，點之間的關係更清楚，以 B^T 分岔點之有無判斷，例如 $B^T = 0$ 有 1 組 5 張 BRS 同構：B-1 $\cong$ B-18 $\cong$ B-23 $\cong$ D-1 $\cong$ F-6，
B-17 $\cong$ B-20 $\cong$ E-5， $B^T = 1$ 有 1 組 5 張同構：B19 $\cong$ I-1 $\cong$ I-2 $\cong$ I21 $\cong$ I22，I-18 $\cong$ L2 $\cong$ L8，
如下。

圖 9

無環圖同構



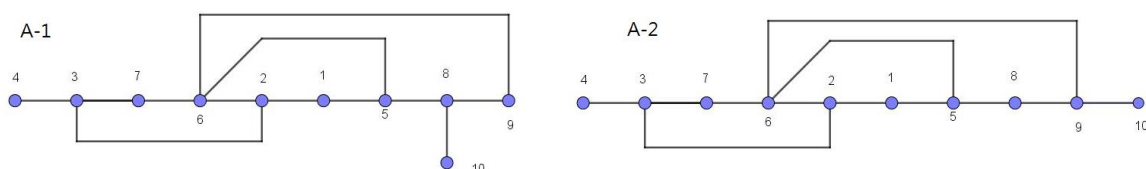
2.有環圖同構： V_c^4 、 V_c^6

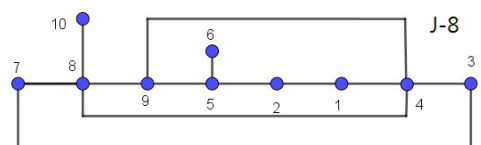
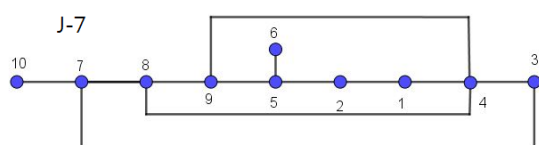
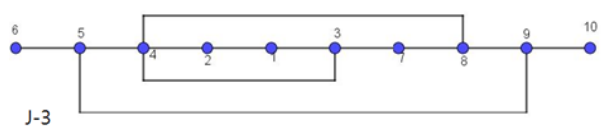
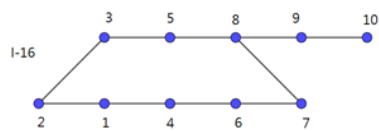
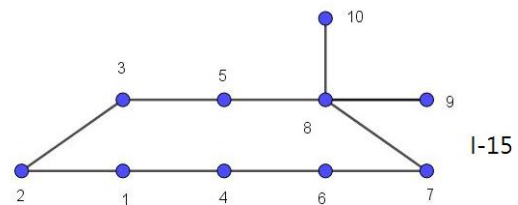
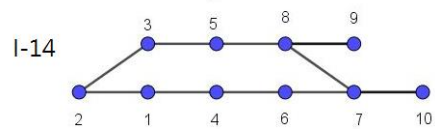
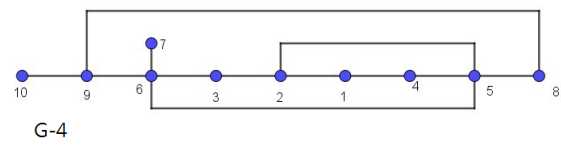
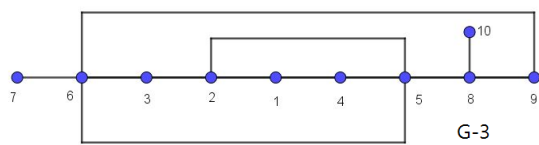
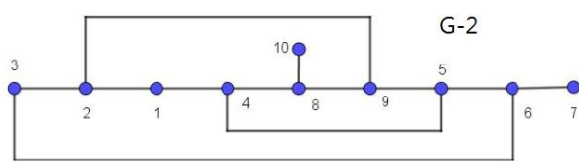
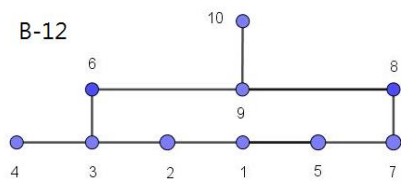
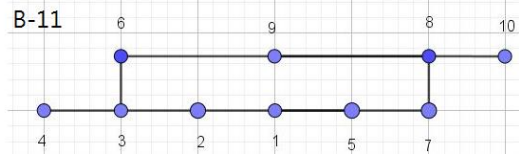
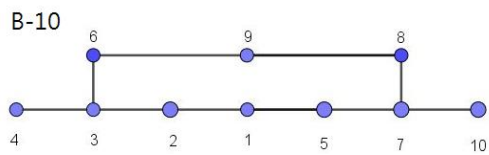
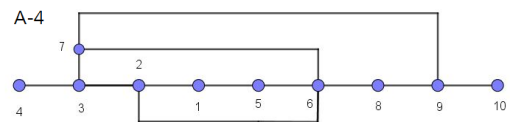
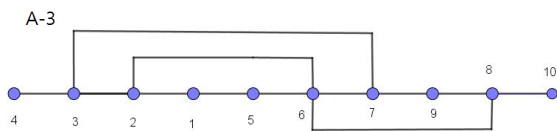


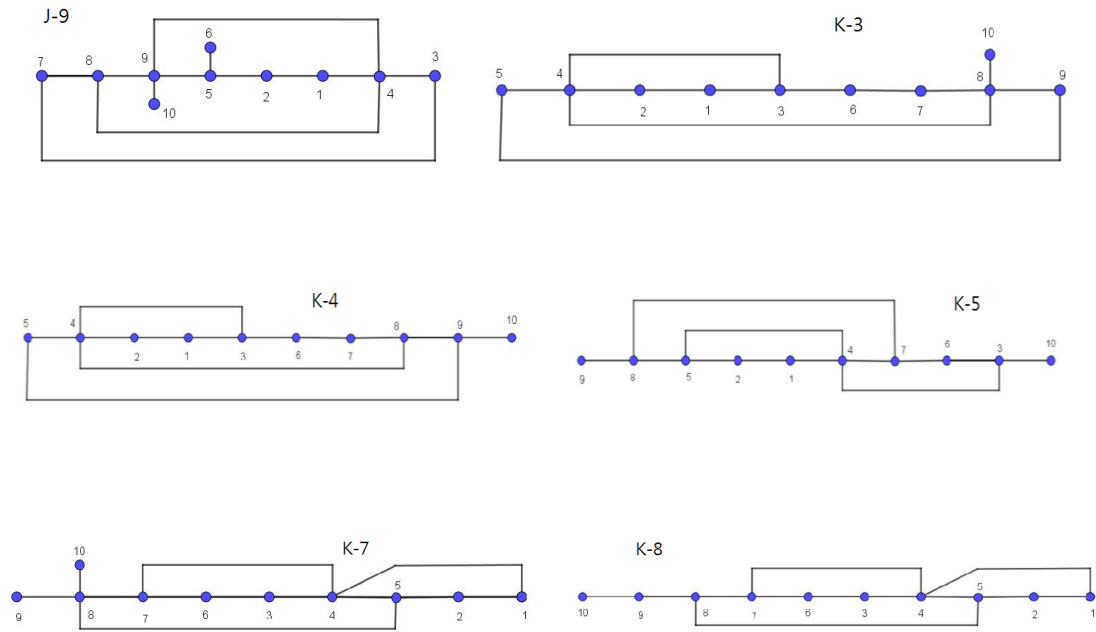
3.有環圖： V_c^8 有 22 張，皆異構圖。

圖 10

V_c^8 異構圖

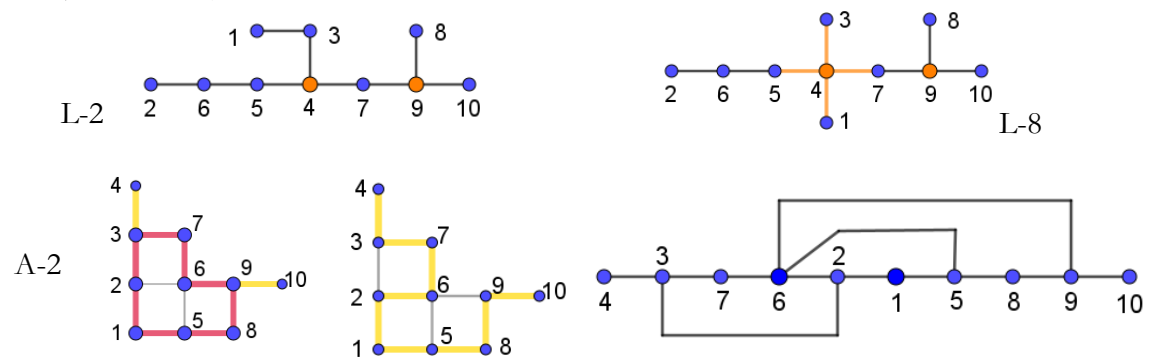






(二)凸顯圖特徵方式：以主幹抓取分枝，無環圖分岔點 B^T 型態以 L2, L8 皆是 $B^T = 2$ ，BRS 改以主幹 **2-6-5-4-1-7-9-10** 表示，L8 多出十字型。

圖 11
圖特徵差異比較



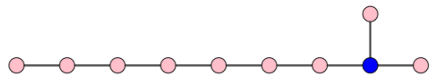
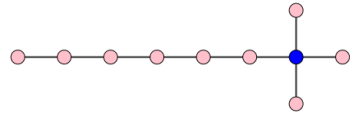
有環圖除了最大環點值之外，分岔點 V_{ℓ} 型態： V_c^8 外加(1,1)或2； V_c^6 外加(1,1,1,1)、(1,1,2)、(2,2)三種， V_c^4 以環外有無分岔又分為 $V_{\ell} = 0, 1, 2$ ，環外 6 點呈直線、分岔為(1,5)、(1,1,4)、(1,1,1,3)、(2,4)。

二、度序列規律

(一)無環圖

主幹 T 衍生有 $B^T = 3$ 、 $B^T = 4$ 兩種狀況， $DS = 18$ 。

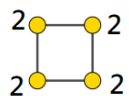
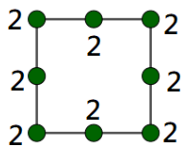
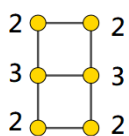
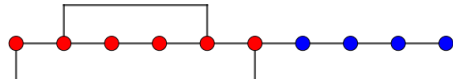
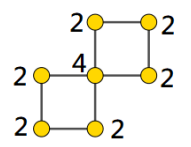
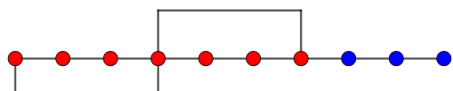
表 19
圖特徵差異比較

T 與 B^T 的關係	DS 變化
$2 \times 8 + 1 \times 2 = 16 + 2 = 18$	 (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1)
$3 \times B^T + 2 \times (8 - 2 \times B^T) + 1$ $\times (2 + B^T)$ $= 3B^T + 16 - 4B^T + 2 + B^T = 18$	 (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 1)
$4 \times B^T + 2 \times (8 - 3 \times B^T) + 1$ $\times (2 + 2 \times B^T)$ $= 4B^T + 16 - 6B^T + 2 + 2B^T = 18$	 (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 1, 1)

(二)有環圖

以任意點起始之最大環規律依據環圖主結構度序列總和來判斷。

表 20
有環圖 V_c^m 與 V_h 的關係

編號	Σ of DS	V_c^m 與 V_h 的關係	DS 變化
1 8		$8 + (10 - 4) \times 2$ $= 18 + 2 \times 1$ $= 20$	
2 16		$16 + (10 - 8) \times 2$ $= 18 + 2 \times 1$ $= 20$	
3 14		$14 + (10 - 6) \times 2$ $= 18 + 2 \times 2$ $= 22$	
4 16		$16 + (10 - 7) \times 2$ $= 18 + 2 \times 2$ $= 22$	

編號	Σ of DS	V_c^m 與 V_k 的關係	DS 變化
5	20	$20 + (10 - 8) \times 2$ $= 18 + 2 \times 3$ $= 24$	
6	20	$20 + (10 - 8) \times 2$ $= 18 + 2 \times 3$ $= 24$	
7	18	$18 + (10 - 8) \times 2$ $= 18 + 2 \times 2$ $= 22$	
8	20	$20 + (10 - 9) \times 2$ $= 18 + 2 \times 2$ $= 22$	
9	22	$22 + (10 - 9) \times 2$ $= 18 + 2 \times 3$ $= 24$	
10	24	$24 + (10 - 10) \times 2$ $= 18 + 2 \times 3$ $= 24$	
11	24	$24 + (10 - 10) \times 2$ $= 18 + 2 \times 3$ $= 24$	

柒、交換圖討論

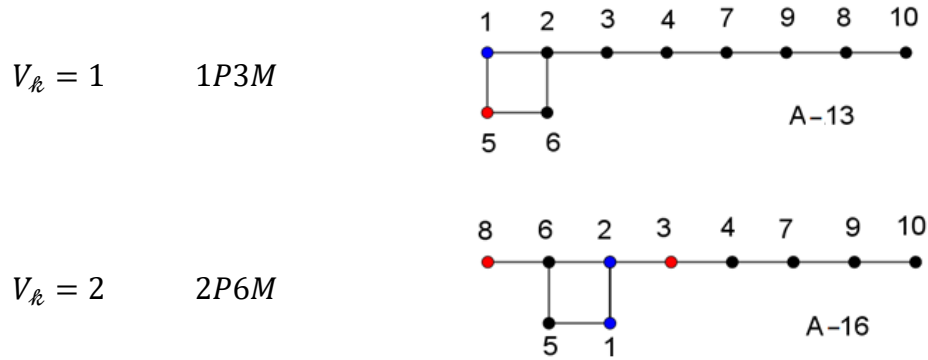
本節以同一基底說明不躍子、躍子交換和雙防三種交換完成條件及結果。

一、不躍子的交換 *NC Swap*：考慮有環圖之分岔點與無環圖之分岔點。

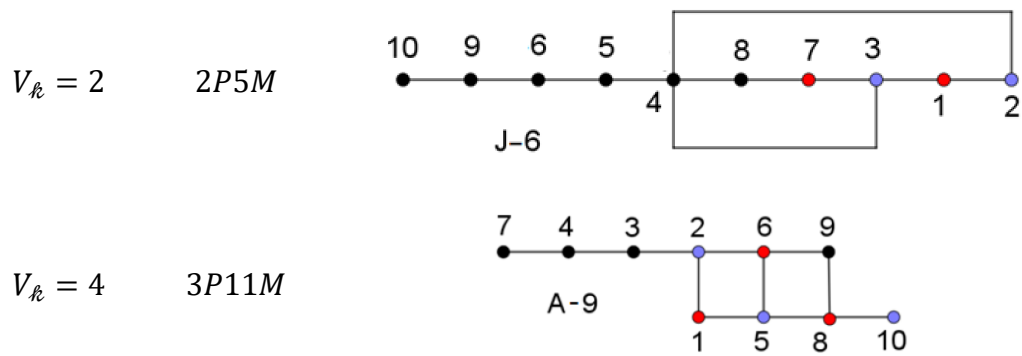
圖 12

環圖交換結果

V_c^4



V_c^6



V_c^8

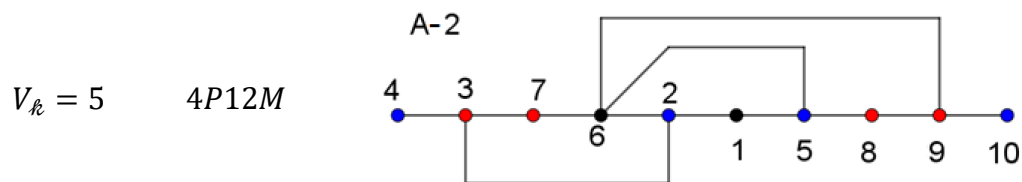
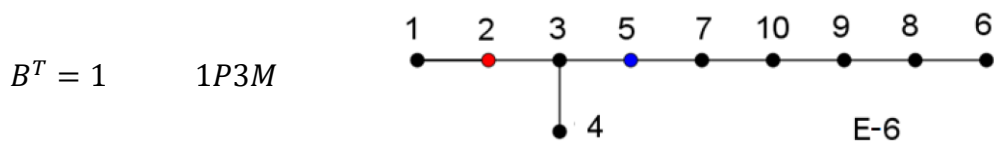
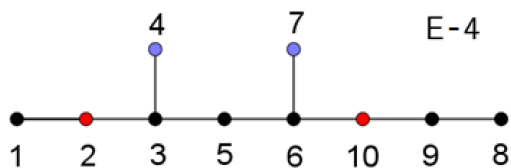


圖 13

無環圖交換結果



$$B^T = 2 \quad 2P6M$$

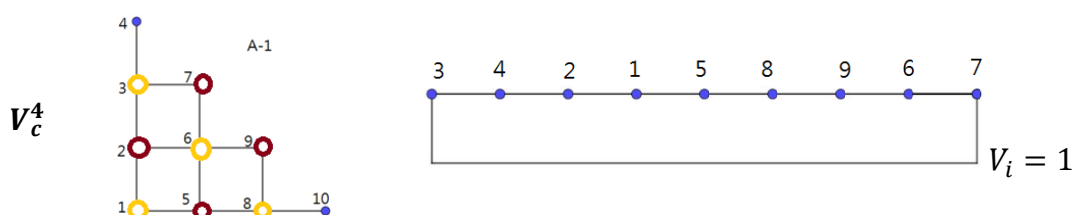


二、躍子的交換 Crossing Swap

躍子的交換不管有環圖或無環圖，最多對數之最少步數一定是 4 對 9 步。交換徒特徵在於出現孤立點，BRS 出現不佔位虛格。

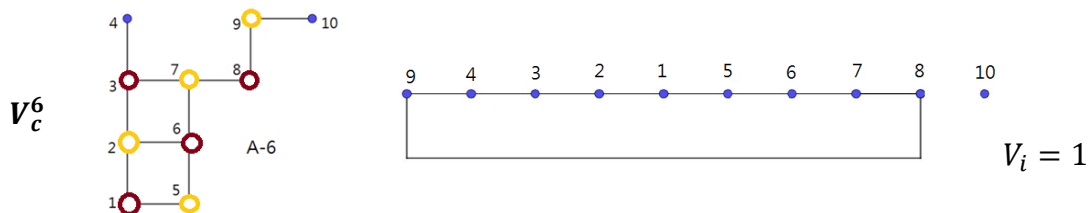
圖 14

躍子交換路徑圖與 BRS 對照



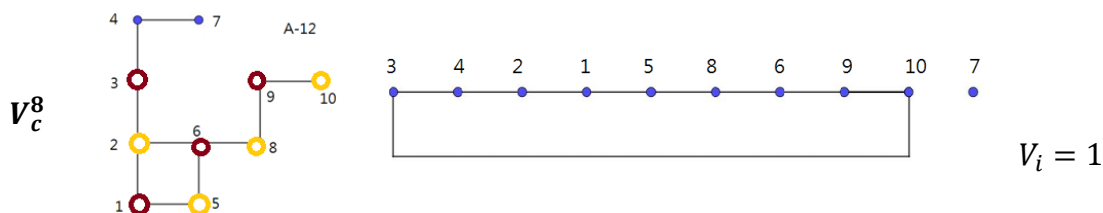
交換路徑

$\boxed{W2} \ 3 \rightarrow 4$, $\boxed{B3} \ 7 \rightarrow 3$, $\boxed{W3} \ 6 \rightarrow 7$, $\boxed{B4} \ 9 \rightarrow 6$, $\boxed{W4} \ 8 \rightarrow 9$, $\boxed{B2} \ 5 \rightarrow 8$,
 $\boxed{W1} \ 1 \rightarrow 5$, $\boxed{B1} \ 2 \rightarrow 1$, $\boxed{W2} \ 4 \rightarrow 2$



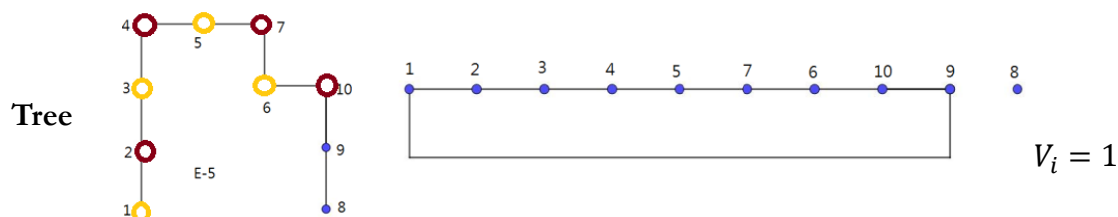
交換路徑

$\boxed{W4} \ 9 \rightarrow 4$, $\boxed{B4} \ 8 \rightarrow 9$, $\boxed{W3} \ 7 \rightarrow 8$, $\boxed{B3} \ 6 \rightarrow 7$, $\boxed{W2} \ 5 \rightarrow 6$, $\boxed{B1} \ 1 \rightarrow 5$,
 $\boxed{W1} \ 2 \rightarrow 1$, $\boxed{B2} \ 3 \rightarrow 2$, $\boxed{W4} \ 4 \rightarrow 3$



交換路徑

$\boxed{B2} \ 3 \rightarrow 4$, $\boxed{W4} \ 10 \rightarrow 3$, $\boxed{B4} \ 9 \rightarrow 10$, $\boxed{W3} \ 8 \rightarrow 9$, $\boxed{B3} \ 6 \rightarrow 8$, $\boxed{W2} \ 5 \rightarrow 6$,
 $\boxed{B1} \ 1 \rightarrow 5$, $\boxed{W1} \ 2 \rightarrow 1$, $\boxed{B2} \ 4 \rightarrow 2$



交換路徑

$\boxed{B4} 10 \rightarrow 9$, $\boxed{W4} 6 \rightarrow 10$, $\boxed{B3} 7 \rightarrow 6$, $\boxed{W3} 5 \rightarrow 7$, $\boxed{B2} 4 \rightarrow 5$, $\boxed{W2} 3 \rightarrow 4$,
 $\boxed{B1} 2 \rightarrow 3$, $\boxed{W1} 1 \rightarrow 2$, $\boxed{B4} 9 \rightarrow 1$

【結論】躍子的特徵是產生孤立點， $1 \leq V_i \leq 4$ ，最大環點數是 9。

圖 15

BRS- J18 以躍子規則交換之路徑示意

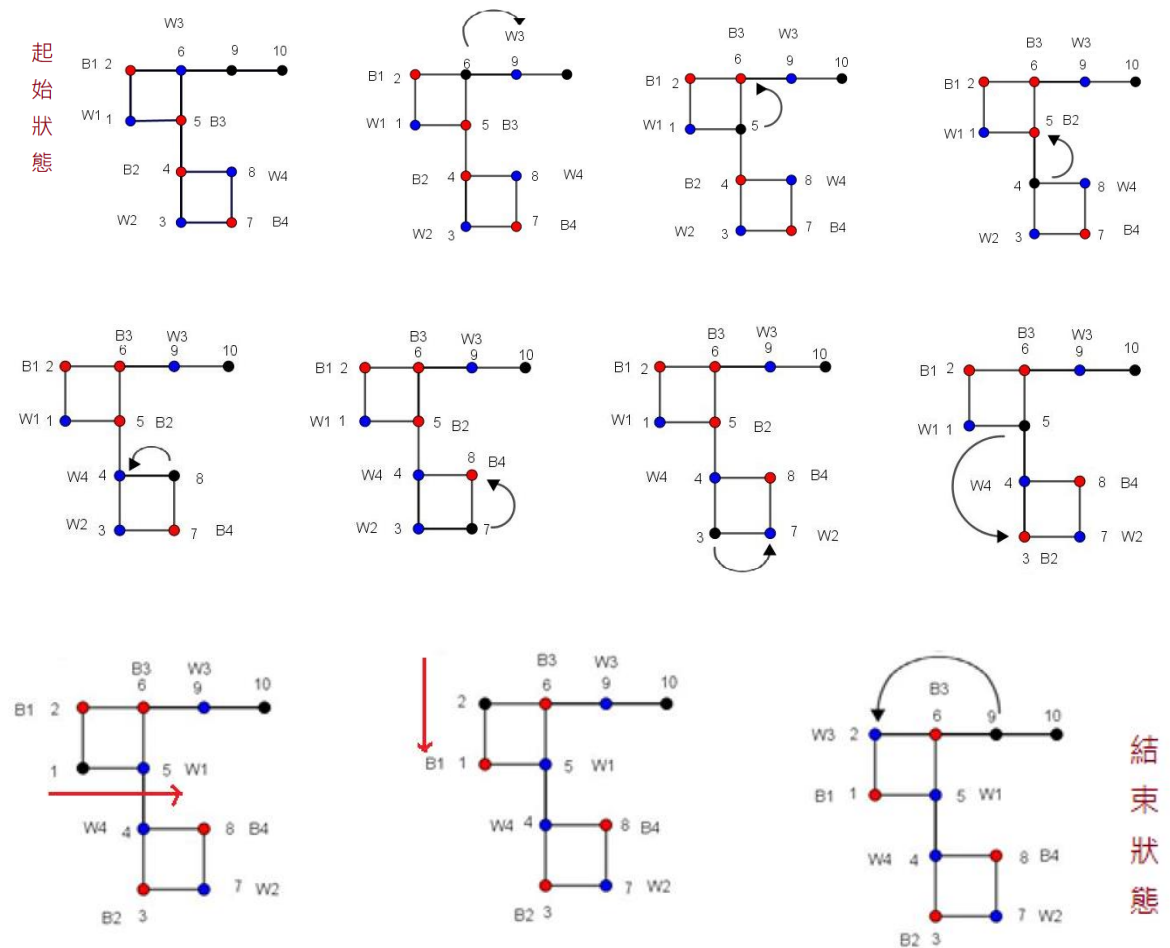
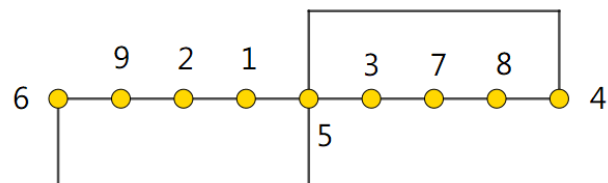


圖 16

BRS- J18 躍子交換交換路徑圖

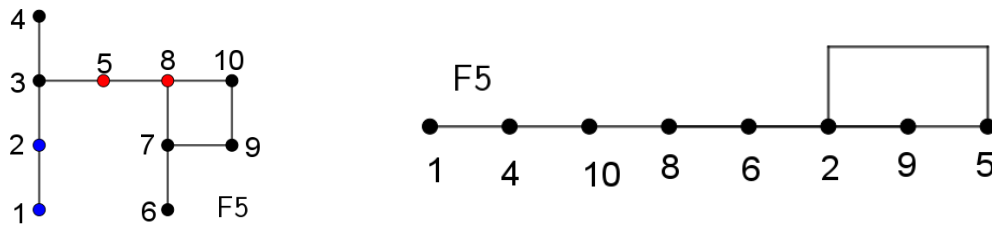


$W3 6 \rightarrow 9$; $B3 5 \rightarrow 6$; $B2 4 \rightarrow 5$; $W4 8 \rightarrow 4$; $B4 7 \rightarrow 8$;
 $W2 3 \rightarrow 7$; $B2 5 \rightarrow 3$; $W1 1 \rightarrow 5$; $B1 2 \rightarrow 1$; $W3 9 \rightarrow 2$ 。

三、雙防路徑 *Non-Attacking Swap*

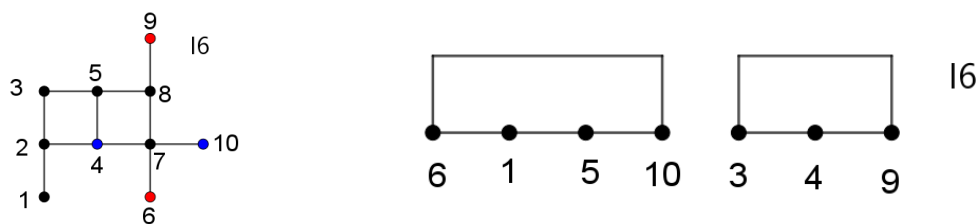
1. 有環圖 V_c^4 的 2P8M

圖 17



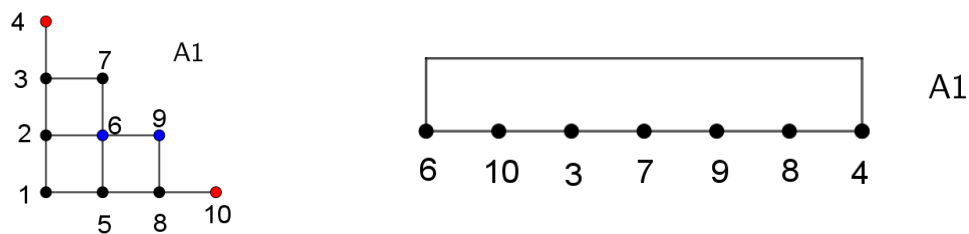
2. 有環圖 V_c^6 的 2P7M

圖 18



3. 有環圖 V_c^8 的 2P7M

圖 19



4. 2P7M 在無環圖條件下結果

圖 20

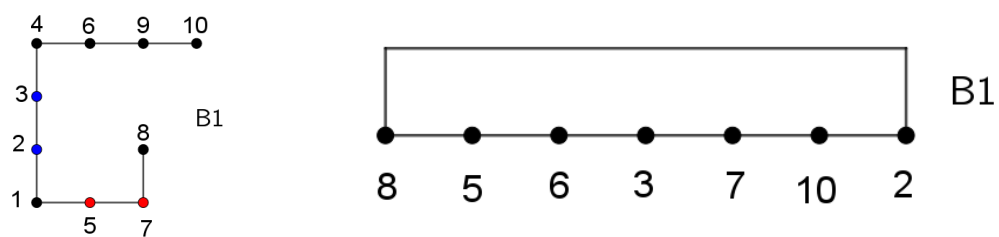


圖 21

BRS-A1 以雙防規則 NA 交換之路徑示意

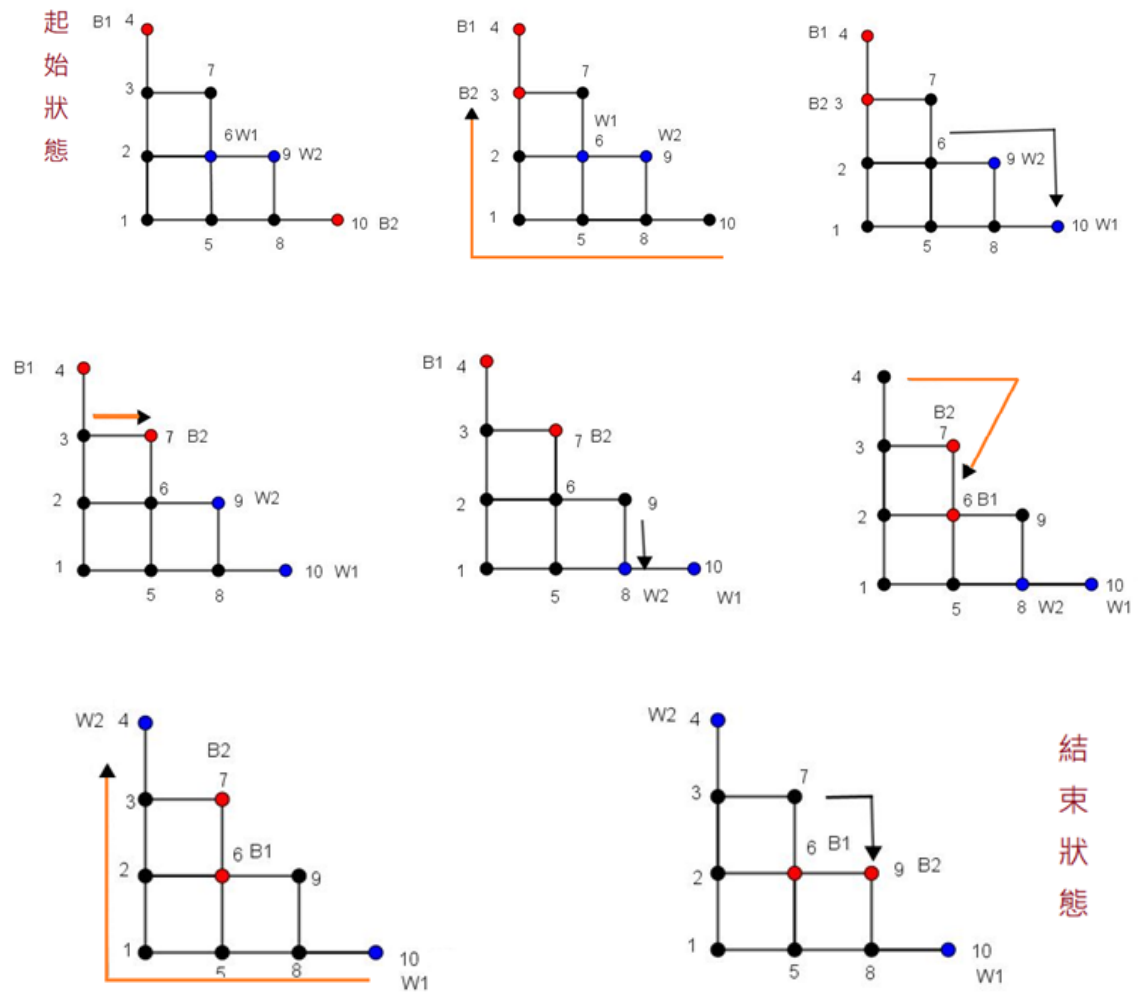
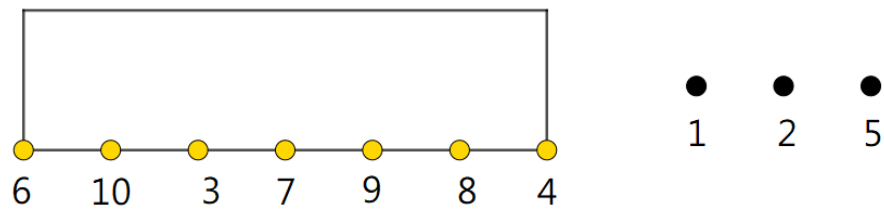


圖 22

BRS-J18 雙防 2 對 7 步交換交換路徑圖



B1 10→3 ; W1 6→10 ; B1 3→7 ; W2 9→8 ; B2 4→6 ; W2 8→4 ; B1 7→9 。

捌、結 論

- 一、本研究自創十連方基底計有 12 組 190 種結果。
- 二、以 V_k 和 B^T 檢同構圖方法有環圖、無環圖異構圖有 166 張。
- 三、不躍子設計 NC 有 12 組基底，最多 4 對數最少步數 12，3 對數最少步數 7，2 對數最少步數 5，1 對數最少步數 3。
- 四、全部 BRS 都可以採用躍子方式完成，會有第二階的躍子交換圖。
- 五、躍子設計 C 一定會產生孤立點， $V_i = 1$ ，最大環點數是 9。
- 六、躍子設計最多對數之最少步數一定是 4 對 9 步。
- 七、雙防設計 NA 會產生孤立點， $1 \leq V_i \leq 4$ ，雙防可躍子，無環圖性質改變，全部 BRS 都具有環特徵， $3 \leq V_c^{max} \leq 9$ 。
- 八、BRS 設計係 4×4 範圍，行列最多只能配置 2 對，雙防路徑 1 對 3 步，最多 2 對時最少步數是 7 步。

玖、參考文獻

- [1] Anonymous. *Bishops and Rooks*. <https://potatodie.nl/lab/bishops-and-rooks/>
- [2] 黃楷宸、林子濠等(2020)。Crazy Knights。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品說明書。取自 <https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-080401.pdf?81>
- [3] 黃英綺、余采臻(2016)。十字軍「斜」爭。中華民國第 57 屆中小學科學展覽會作品說明書。取自 <https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/57/pdf/030423.pdf>
- [4] 黃品翰、陳毓笙(2008)。當「月曆縱橫刪」遇上「八皇后棋」。中華民國第 48 屆中小學科學展覽會作品說明書。取自 <https://www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx?a=21&cat=80&sid=3325>
- [5] Petković, M (1997). *Mathematics and Chess*. Dover: New York.
- [6] 張鎮華(2017)。演算法觀點的圖論，第一版。臺北：台大出版中心出版。