

屏東縣第66屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：小王子奇遇—轉角遇見一朵玫瑰

關 鍵 詞： n 轉、最佳摺翼比例、正多邊形分割

編號：A1020

小王子奇遇—轉角遇見一朵玫瑰

摘要

- 一、隨著 n 增加， n 轉旋轉翼以中垂線兩側 $\frac{1}{8}$ 摺最適合花瓣獨立成瓣。
- 二、川崎 n 轉後是角對邊；佐藤 n 轉結果是角對角。
- 三、川崎 4 轉的中心正方形面積變化有 $\frac{1}{2^2}$ 摺線翼是 $1:2^3$ ； $\frac{1}{2^3}$ 摺線翼是 $1:2^5$ ；
 $\frac{1}{2^4}$ 摺線翼是 $1:2^7$ 。
- 四、川崎五瓣玫瑰摺線圖由等腰三角形、正方形、長方形、平行四邊形和梯型組合而成。
- 五、川崎五瓣玫瑰由平行四邊形、梯形、鳶形、等腰三角形、直角三角形組合而成。

壹、研究動機

四年級上學期時老師給我們看一張圖，讓我們挑戰用圓規、尺作出同樣的圖，這是我們第一次動手畫正六邊形。除了畫出指定形狀，我們還依樣將圖形分割為幾個小單位呈現出直角三角形和梯形的組合。接下來更有趣的挑戰是把平面的紙張做成立體的花朵，玩著玩著，我們就想探討平面到立體有哪些奧妙，成為這次探究主軸。

貳、研究目的

- 一、從立體鑲嵌找出 n 轉的方法。摺出立體花朵的方法。
- 二、以多邊形組合方式川崎玫瑰的方法。

叁、研究設備與材料

- 一、摺紙用紙張：A4 和全開牛皮紙、雲彩紙、A4 白紙、色紙。
- 二、紀錄用紙張、筆記本。
- 三、尺規作圖：圓規、量角器、尺、筆等。
- 四、數位作圖：利用 GeoGebra 製作正 n 邊形。

本研究使用之照片及圖片皆由研究者自行拍攝繪製

肆、研究過程

一、文獻分析

(一)網路資料

我們從網路上[5]找到川崎玫瑰摺法，依步驟完成後分析，發現有摺法卻沒有分析，即使摺法簡化還是難以理解。

(二)摺紙書

玫瑰摺紙[2] [3]這本書因為有簡體中文版，所以先參考中文版。但是在繁複的摺法中，很難找到規律，所以進一步找日文版。我們雖然看不懂日文，但是利用網路翻譯軟體比對，找出原文版本的細節後製作。

中日文比對之後，我們挑了日文版**新現代玫瑰**(56-58 頁，簡體版闕漏)，因其線條單純利於分析。由於這本書和我們一開始找到的玫瑰摺法不同，是參考佐藤玫瑰的作法調整而來，線條較川崎玫瑰少，屬於簡約的花朵作法。因此我們討論之後決定以**川崎玫瑰為主，佐藤玫瑰為輔**，比較兩者在幾何中可以觀察到的現象和規律。

(三)歷屆科展作品

瞭解鑲嵌 3D 化之後，我們從虛實之間旋轉乾坤[1]找到鑲嵌與 **n 轉** 的關係，確定 **n 轉是立體化的基本步驟**。瞭解 n 轉的作法之後，進一步用來分析佐藤玫瑰和川崎玫瑰的共同性和殊異性。

(四)數學研究網站

從老師提供的 *Cruz* 數學期刊資料，發現正六邊形可以分割為多種 **n 邊形**，包含正三角形、等腰直角三角形、不規則四邊形和五邊形等，也看到大大小小的相似形，圖形變得複雜卻有規律。

(五)研究架構

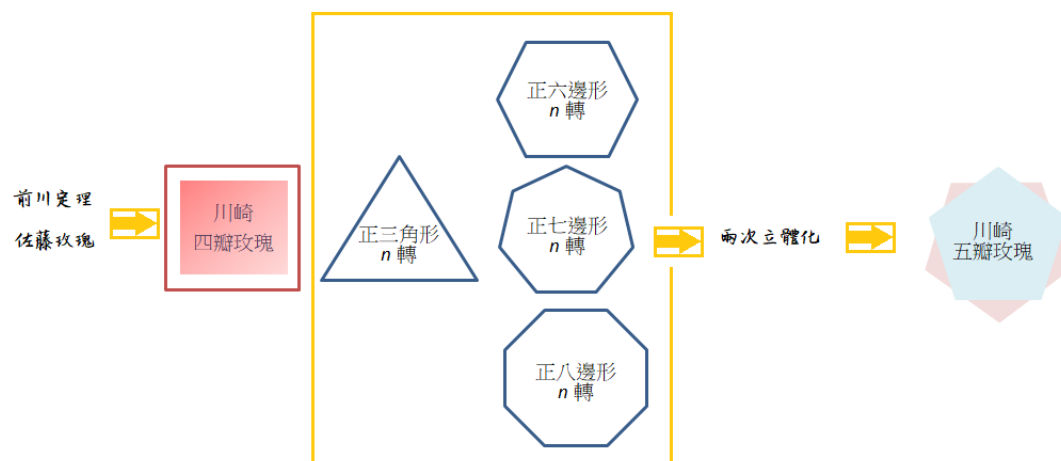
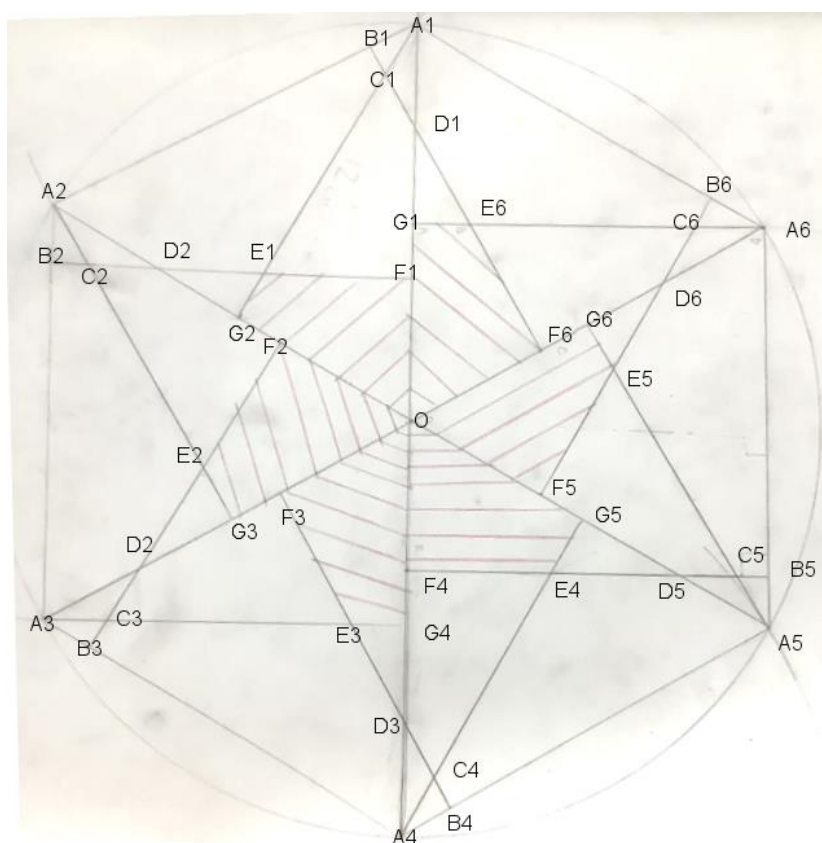


圖 1
正六邊形作圖與分割



本研究特點

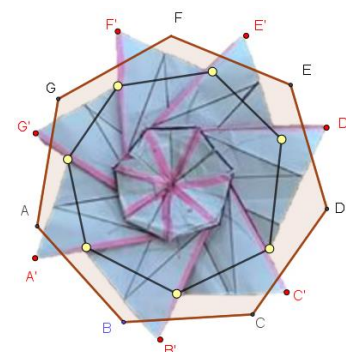
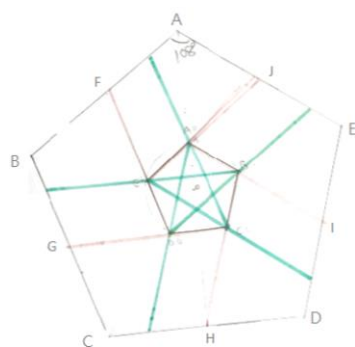
利用正多邊形 **n 轉**、正多邊形分割、幾何主題中的相似形等概念，透過將平面圖形多次立體化做出生活中具體可見的物品。

二、名詞解釋

本研究使用之多邊形

1. **n 轉**：紙上繪出正多邊形，取各邊中點摺為山線，再於各頂點上朝同一方向旋轉後將紙張壓平。

圖 2
n 轉

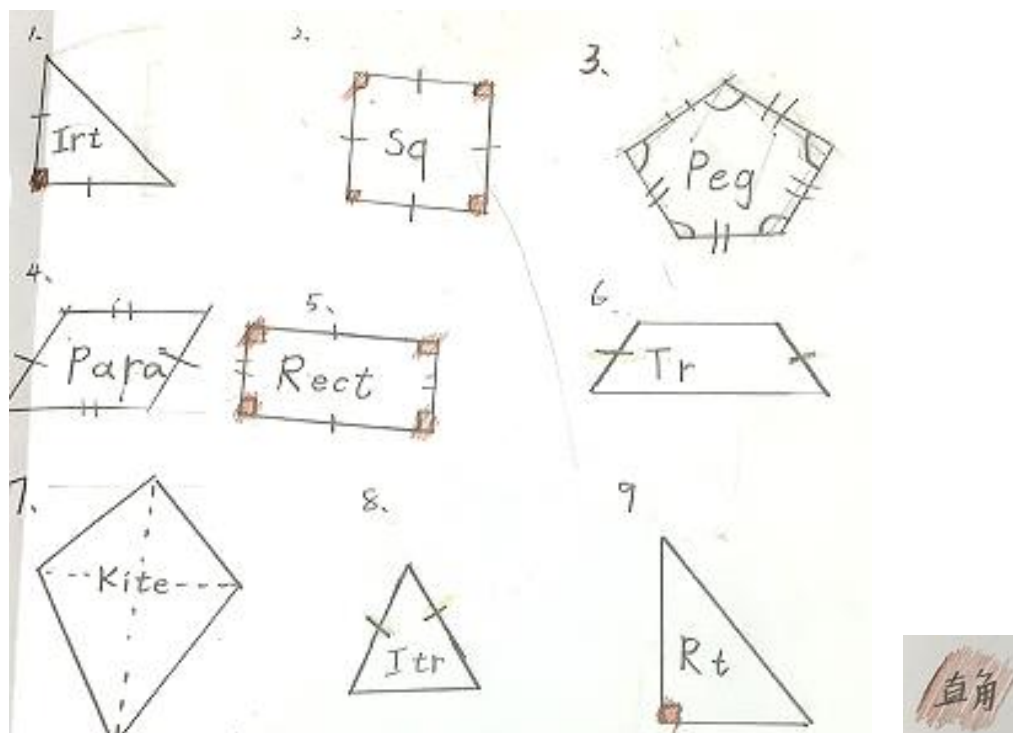


2. θ_i : 正多邊形 n 轉後旋轉角度。
3. 翼 : 第一次立體化使用的山谷線形組，標示 n 轉後形狀改變。

三、分析採用之幾何形

圖 3
形狀與編碼縮寫

正方形	平行四邊形	等腰三角形	正五邊形	鳶形	長方形	梯形
<i>Sq.</i>	<i>Para.</i>	<i>Itr.</i>	<i>Peg.</i>	<i>Kite</i>	<i>Rect.</i>	<i>Tr.</i>



四、比較分析 n 轉使用之多邊形

(一)正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形製作：我們利用尺規作圖、Geogebra 完成需要的圖和板模，板模可以當作後續分析持續繪製的參考。

(二)正七邊形的製作：我們利用尺規作圖、Geogebra 和固定長度紙條製作正七邊形，取頂點和對邊畫出至少兩條中垂線後，找出圓心，再以不同長度的半徑劃分出需要的範圍，板模功能同(一)。

圖 4
繪製裁減正多邊形

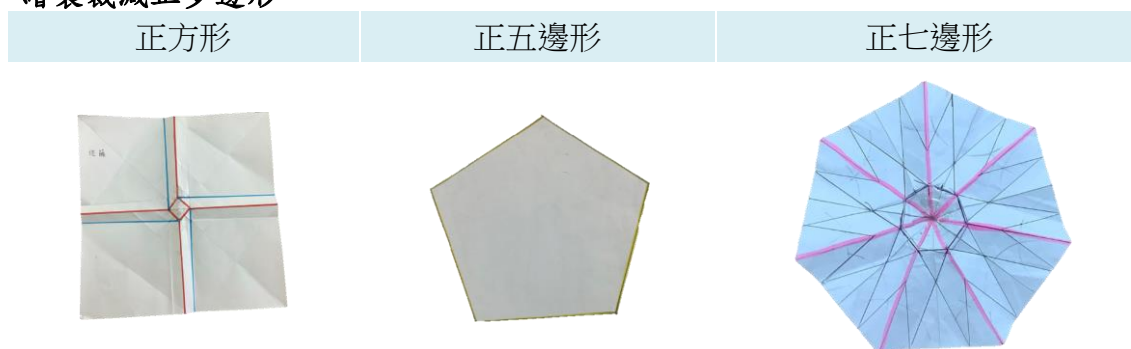
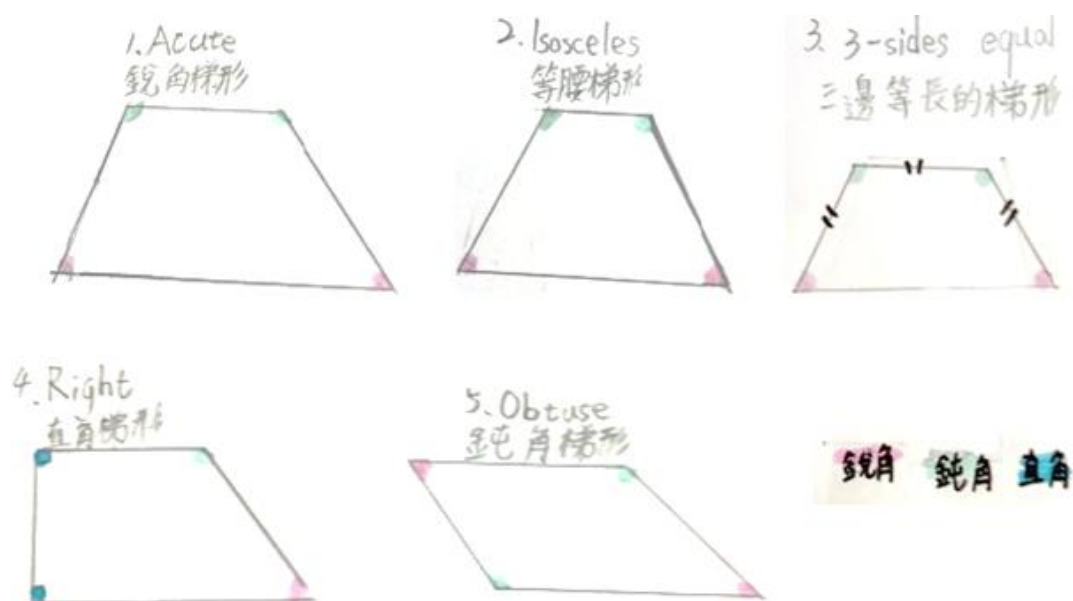


圖 5
分析用之梯形種類



五、實作分析

(一) 鑲嵌立體化

根據「前川定理」，3D 鑲嵌可壓平，則山線(Mountain folds, M)與谷線(Valley folds, V)數量差 2。以此分析不同單位立體鑲嵌的山線谷線差異。

圖 6
動手摺立體鑲嵌

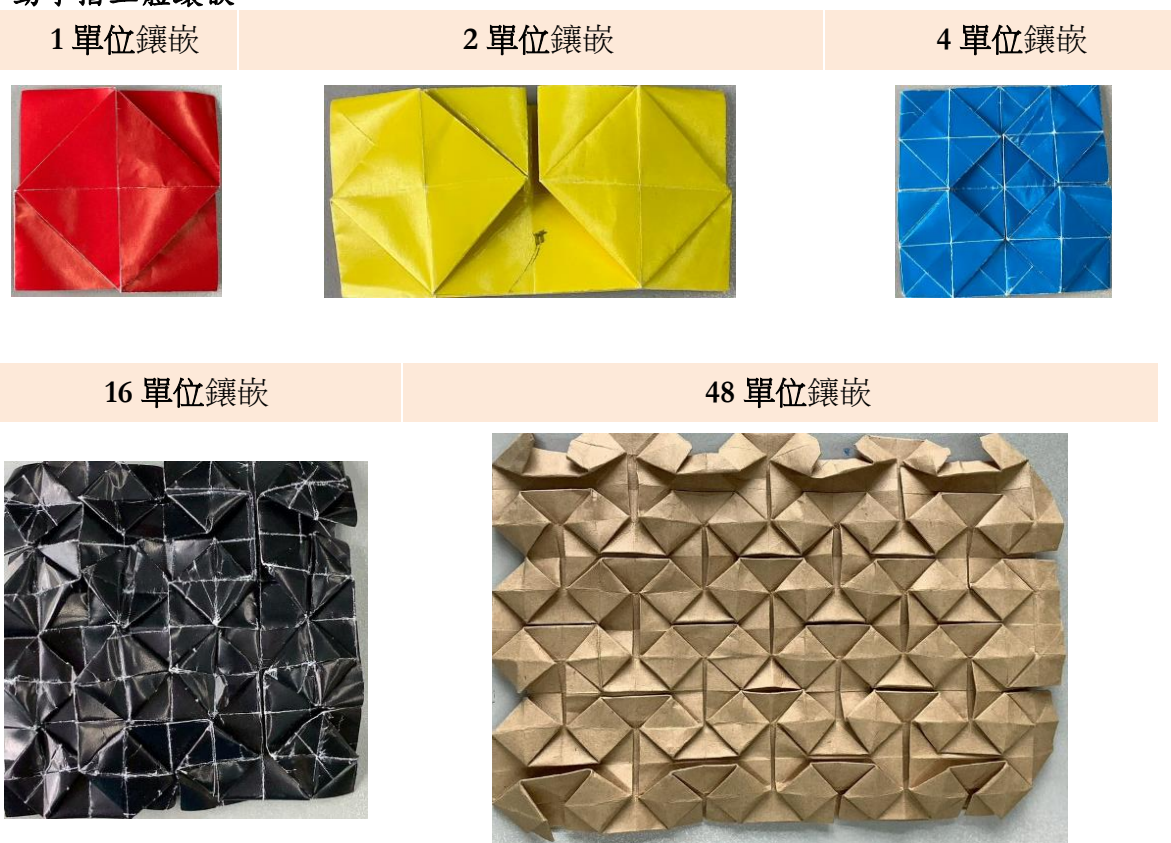


表 1
山線谷線統計

3D 鑲嵌	1 單位	2 單位	4 單位	9 單位	16 單位	25 單位	48 單位
山線 M	8	15	29	64	113	176	337
谷線 V	4	8	16	36	64	100	192

【討論】實作結果發現，並不是立體鑲嵌單純的倍數增加，形成特殊變化。

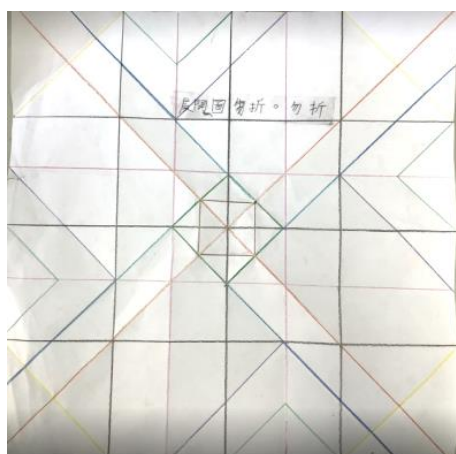
(二) 利用正方形創作 4 瓣川崎玫瑰

1. 透過 4 轉將正方形立體化

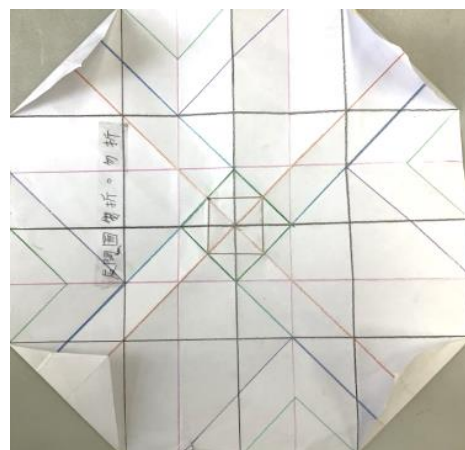
圖 7

逐步分析探討作法

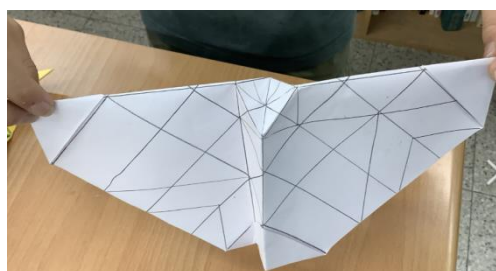
展開圖



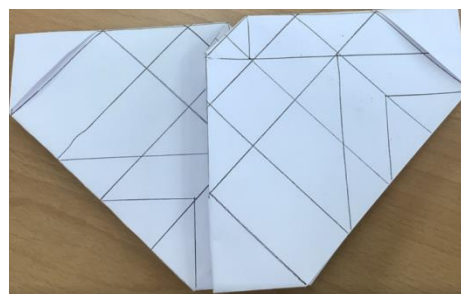
將四個角向內摺



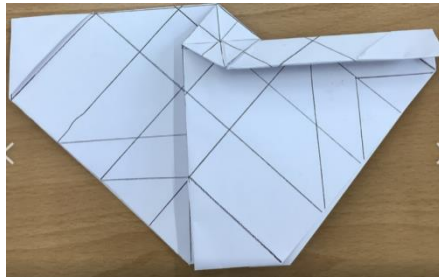
抓住兩端摺瓣，中央的正方形內凹



小正方形摺半重疊

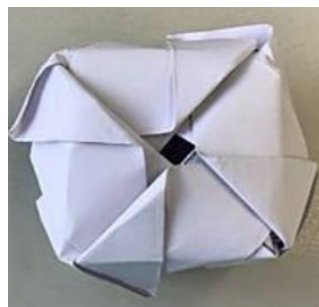
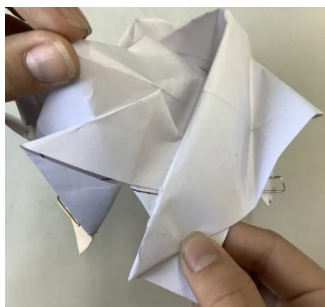
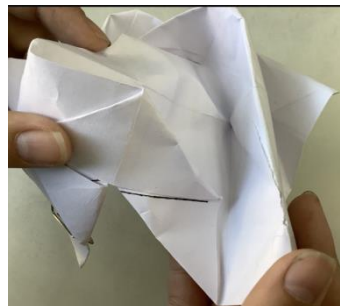
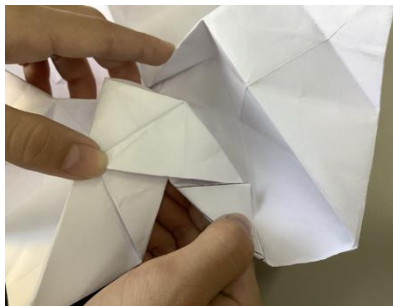
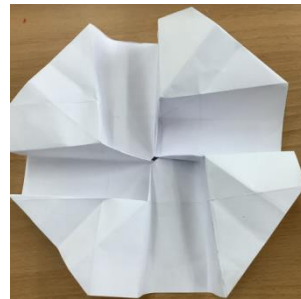
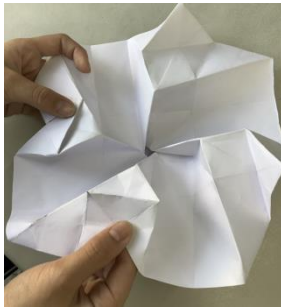


正方形 4 轉成形



2. 整理花瓣：整理花瓣是二次立體化，將等腰三角形整理後成為第二層為底座，花托完成，翻轉後的底座也是正方形。

圖 8
花瓣整理順序





【討論】由於網路參考資料步驟複雜相當，我們認為將步驟簡化為 4 個大項度概念有利於操作者理解。

步驟 1 做出正 n 邊形

步驟 2 分析內外相似形， n 轉會依據旋轉角度而有「角對邊」或「角對角」差異。

步驟 3 將正 n 多邊形做出 $\frac{1}{n}$ 等分。

步驟 4 n 轉：把邊長作出 $\frac{1}{8}$ 摺分線，第一次立體化以等腰三角形製作。

圖 9

n 轉結果

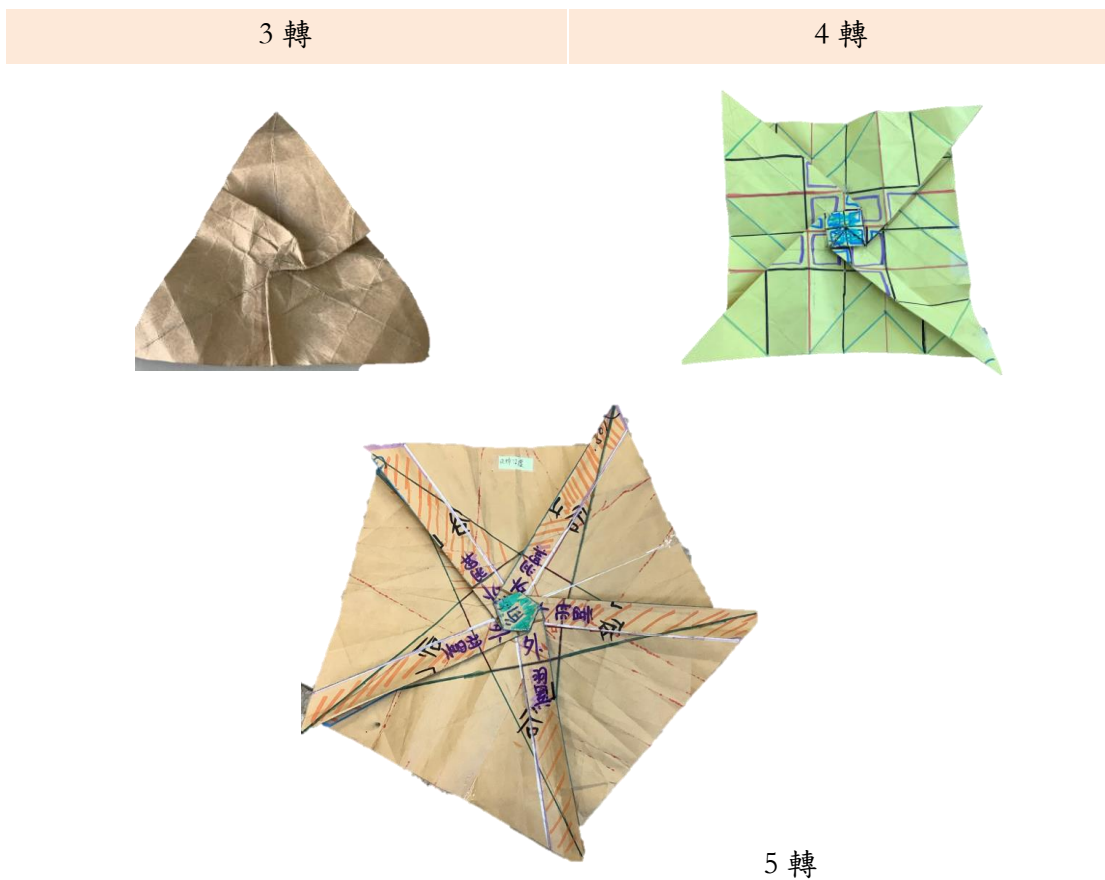
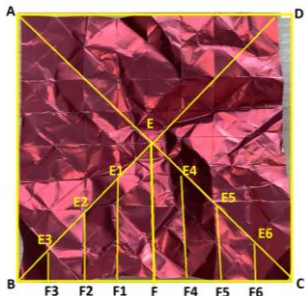


圖 10
翼的作法與分析

以正方形為例	細分步驟
	1.將正方形摺成 4 等分=等腰直角三角形。
	2.做出 $\overline{EF}$ 中垂線後依序將邊長摺出 8 等分。
	3. $\overline{FF1} = \overline{F1F2} = \overline{F2F3} = \overline{F3B}$, $\overline{FF4} = \overline{F4F5} = \overline{F5F6} = \overline{F6C}$
	4. $\overline{EF} \parallel \overline{E3F3} \parallel \overline{E2F2} \parallel \overline{E1F1} \dots \parallel \overline{E6F6}$ 。

【討論】以中垂線為準做出的每一分翼在 n 轉之前是梯形， n 轉之後旋轉 45° 底座邊長與翼呈平行四邊形。

步驟 5 翻轉呈底：第二次立體化。

圖 11

底部呈現正 n 邊形

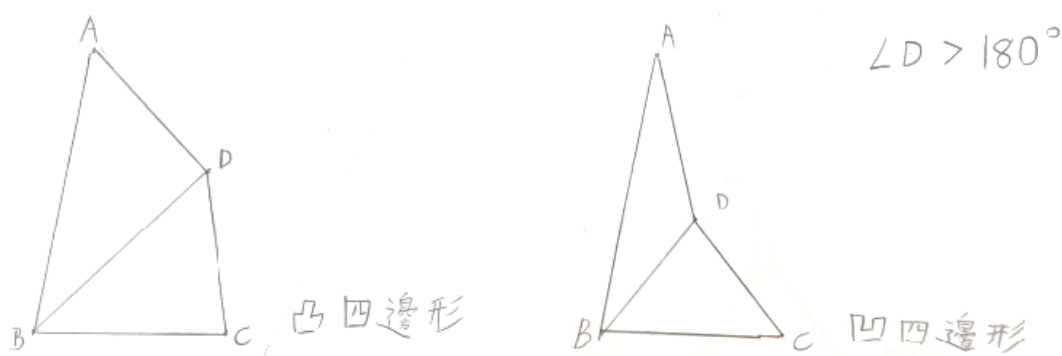


(三)分析前的準備—瞭解多邊形

打開摺線圖之後，我們討論是否要分析繁複的圖形，卻發現形狀多變，一張大圖中藏著各種形狀，分析形中形需要更多知識，所以查找多邊形資料，發現有凹多邊形這樣的圖形，內角至少有一個大於 180° 。

圖 12

多邊形變化與條件





(四)嘗試與比較：以正五邊形創作 5 瓣玫瑰

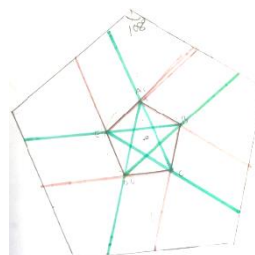
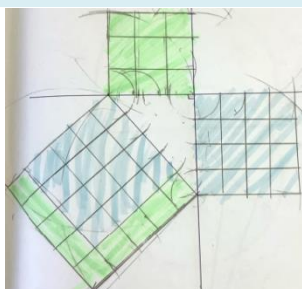
我們搜尋書本和網路資料，發現有另外一種摺法叫做**佐藤玫瑰**，主要是五片花瓣。但川崎玫瑰卻沒有五瓣的摺法。為了比較兩者的差異，我們手繪製正五邊形來嘗試 5 轉並分析旋轉角度，並參考平行花瓣紋絡，改採 $\frac{1}{16}$ ，發現佐藤玫瑰單瓣面積不如川崎玫瑰容易成形的理由。

圖 13

繪製正五邊形的方法

正五邊形的邊長比 3:4:5

內角 108°



展開圖

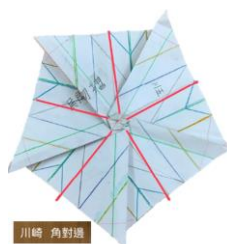
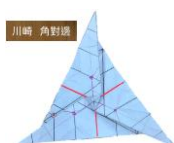


【小結】

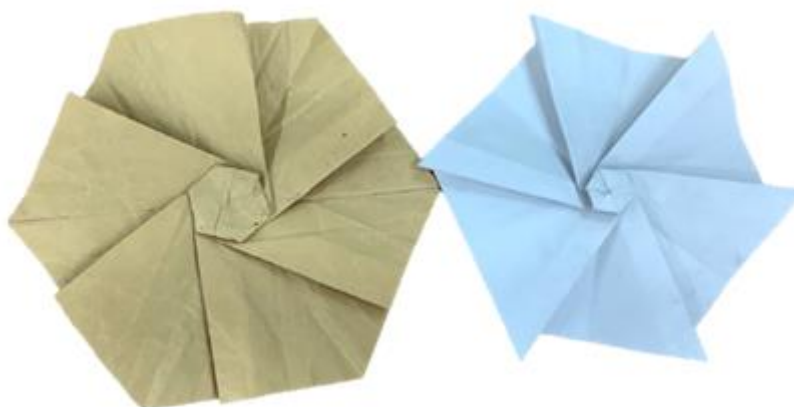
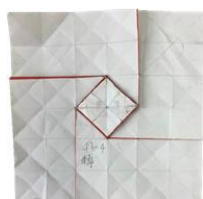
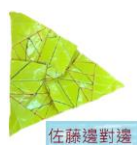
用於製作川崎玫瑰或佐藤玫瑰的 3 轉 $\theta = 30^\circ$ ，4 轉 $\theta = 45^\circ$ ，5 轉 $\theta = 54^\circ$ ，
n 轉後的角度變化是正多邊形內角的 $\frac{1}{2}$ 。

【討論】關於 n 轉形

川崎 3 轉	川 4 轉	川崎 5 轉	川崎 6 轉
--------	-------	--------	--------



佐藤 3 轉	佐藤 4 轉	川崎 5 轉	川崎 6 轉
--------	--------	--------	--------



伍、研究結果與討論

一、n 轉摺線選擇對最大面積的影響

選擇不同比例摺線，雖然中央面積大，但花瓣無法獨立就不像花形。如果我們希望花形是獨立成瓣，理想的數值是多少呢？我們比較 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ 摺線 n 轉後面積，發現底座面積過大會影響花瓣獨立呈形，底座面積過小則因為各單位面接近，一樣影響獨立成形。因此 n 轉旋轉翼以中垂線兩側 $\frac{1}{8}$ 摺最適合。

圖 14
不同翼寬 n 轉後面積比較

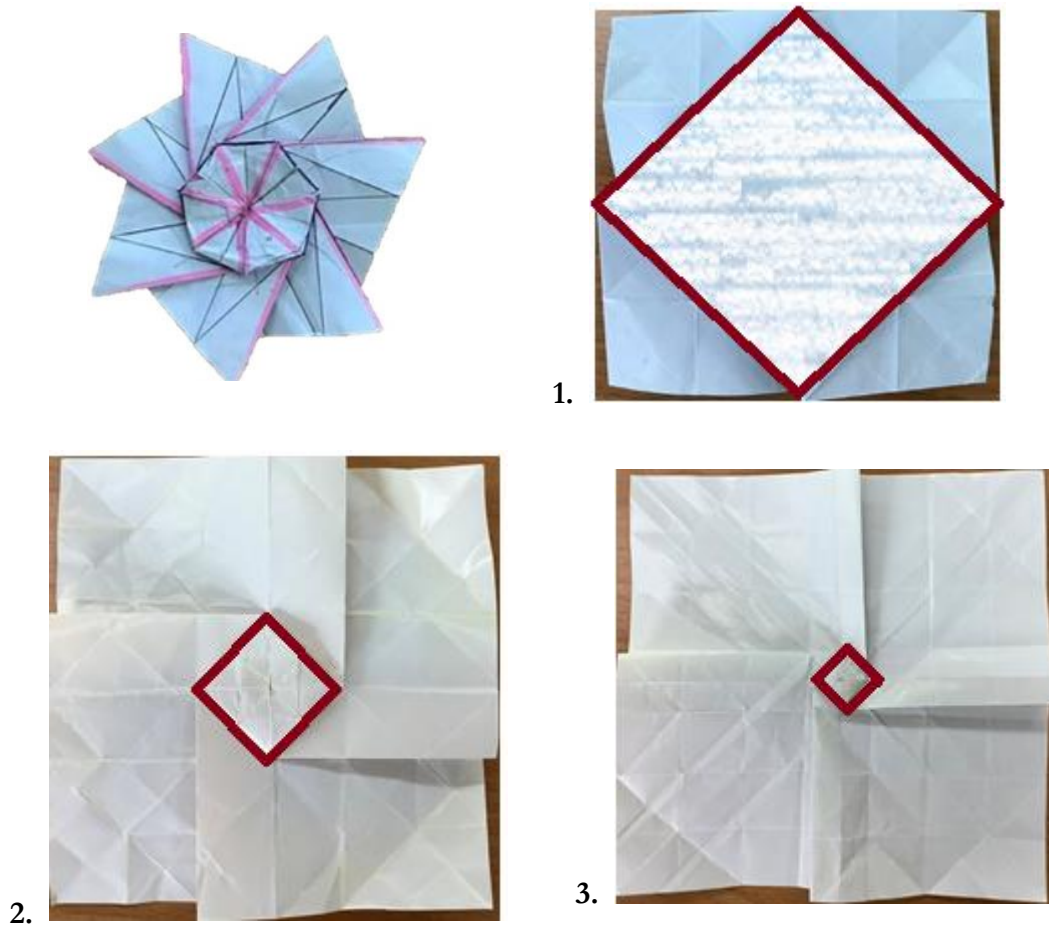


表 2

川崎 4 轉的中心正方形面積變化

摺線翼	1. $\frac{1}{4}$ 摺線翼	2. $\frac{1}{8}$ 摺線翼	3. $\frac{1}{16}$ 摺線翼
底面積(單位 ²)	$4 \times 4 = 16$	$8 \times 8 = 64$	$16 \times 16 = 256$
內藏翼面積(單位 ²)	$0.5 \times 4 = 22$	$2.5 \times 4 = 10$	$6.5 \times 4 = 26$
n 轉：底面積比	1 : 8	1 : 32	1 : 128

二、以川崎玫瑰分析多邊形的組合方法

(一) 四瓣玫瑰_正方形分割組合

圖 15

川崎四瓣玫瑰的分割單位

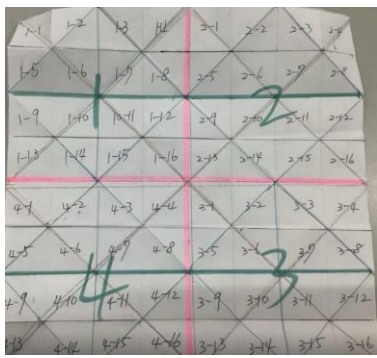
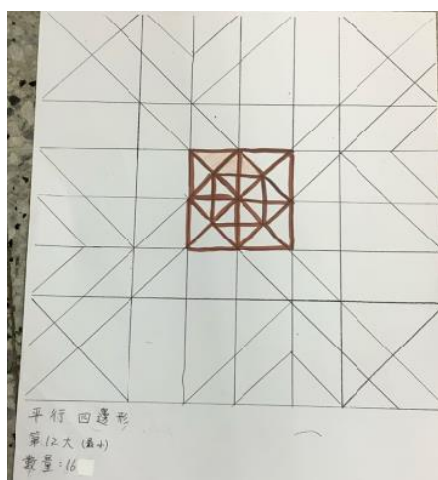
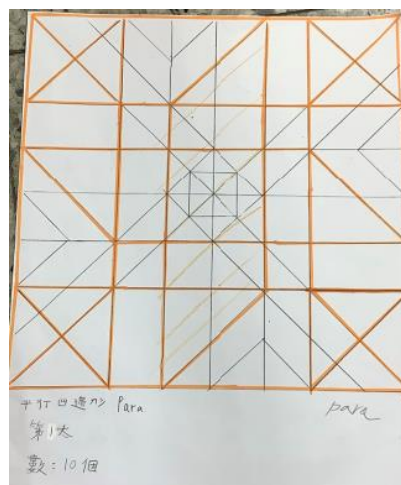
正方形分割為可操作單位	初步編碼分割為四等份
	
	摺痕分析分析 $M\ folds$ 和 $V\ folds$

圖 16
川崎四瓣玫瑰的平行四邊形組合

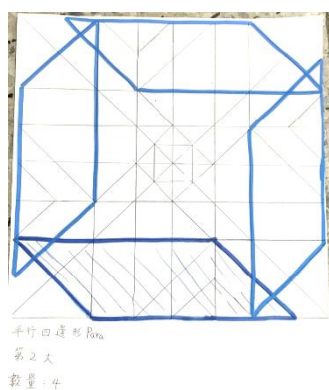
最小單位 Para.



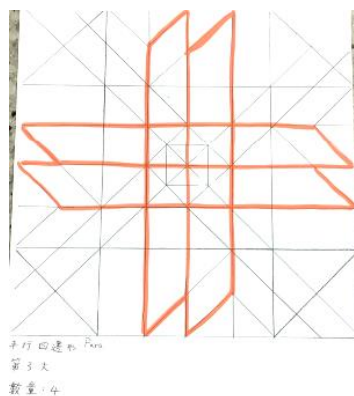
Para.第1大



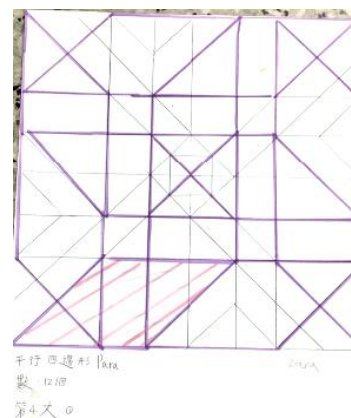
Para.第2大



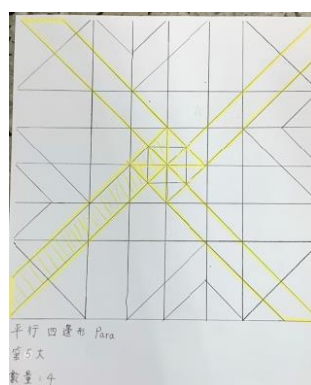
Para.第3大



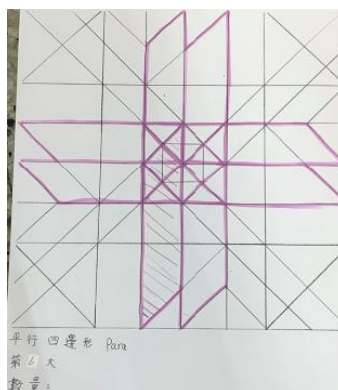
Para.第4大



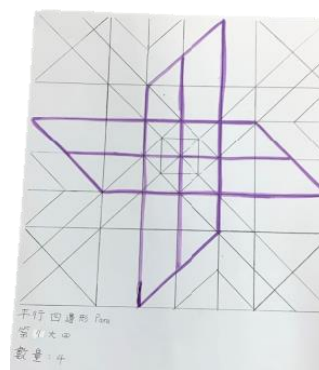
Para.第5大



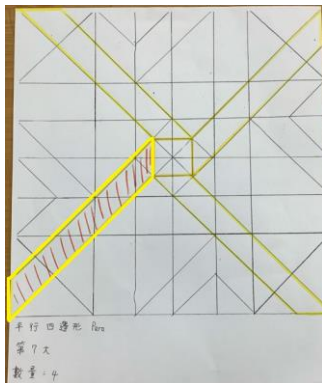
Para.第6大



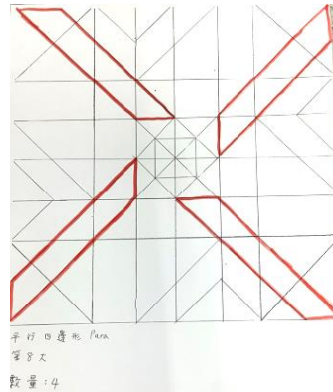
Para.7-1



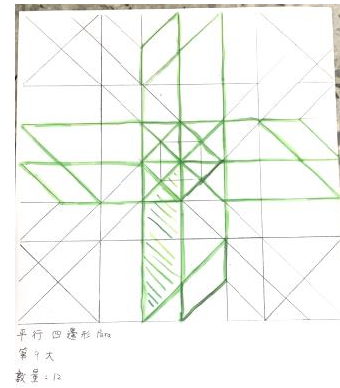
Para.7-2



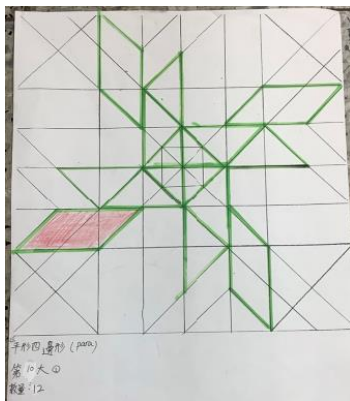
Para.第8大



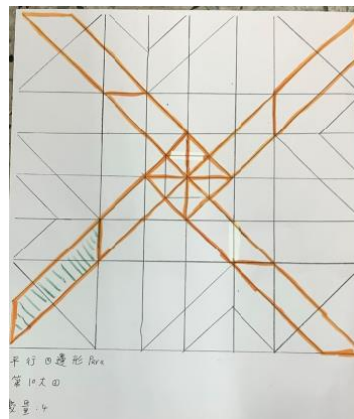
Para.第9大



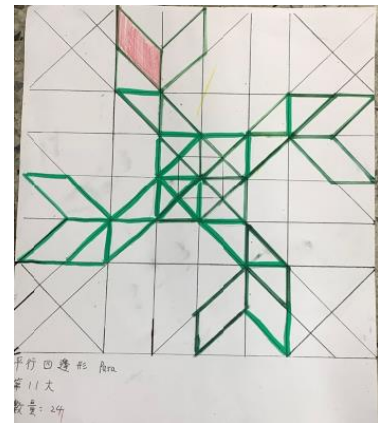
Para.第10大



Para.第10大-2



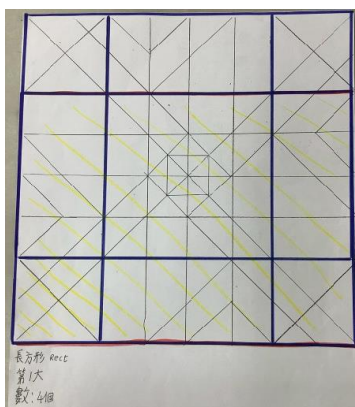
Para.第11大



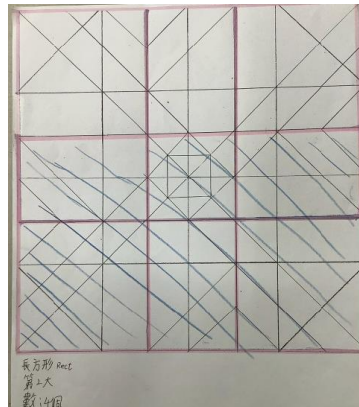
(詳見現場資料)

圖 17
川崎四瓣玫瑰的長方形組合

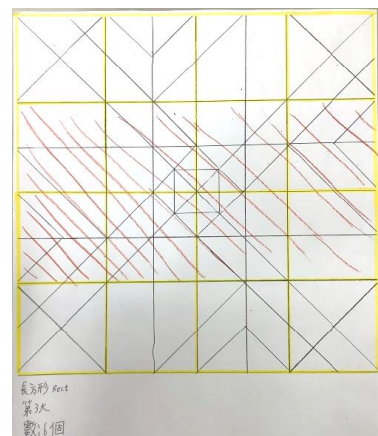
Rect. 第1大



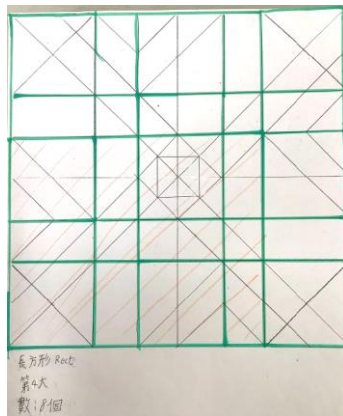
Rect. 第2大



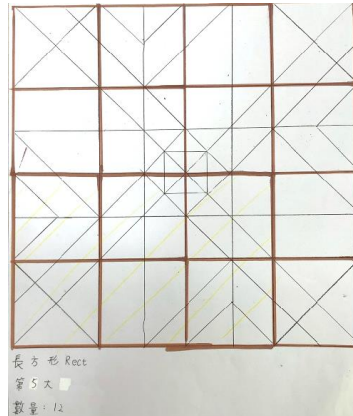
Rect. 第3大



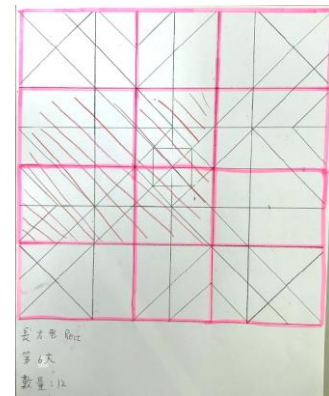
Rect. 第4大



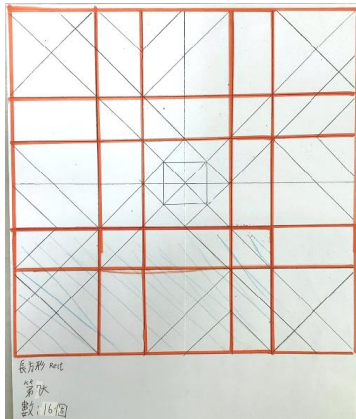
Rect. 第5大



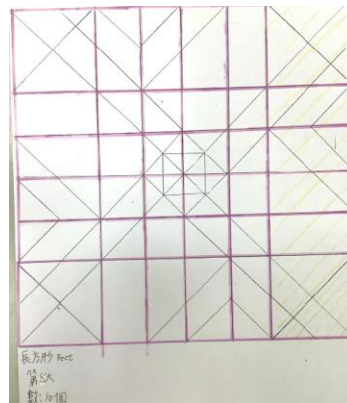
Rect. 第6大



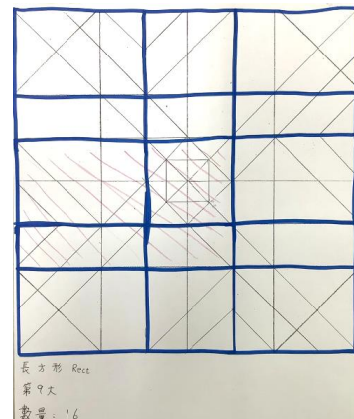
Rect. 第7大



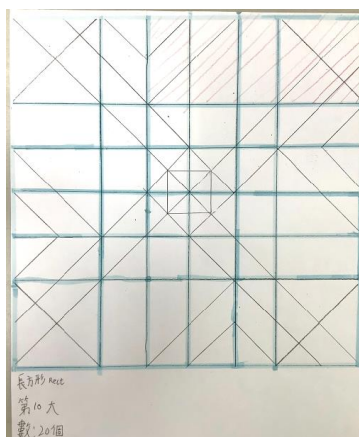
Rect. 第8大



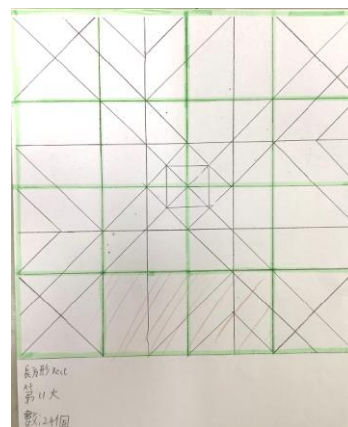
Rect. 第9大



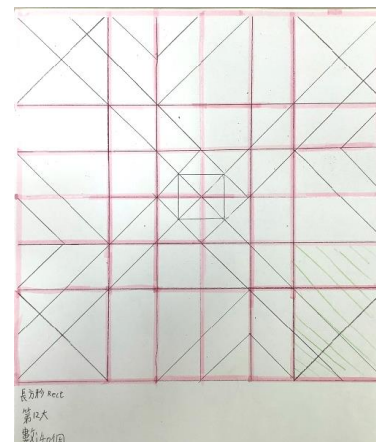
Rect. 第10大



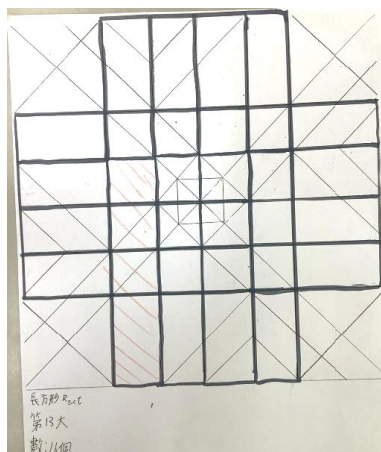
Rect. 第11大



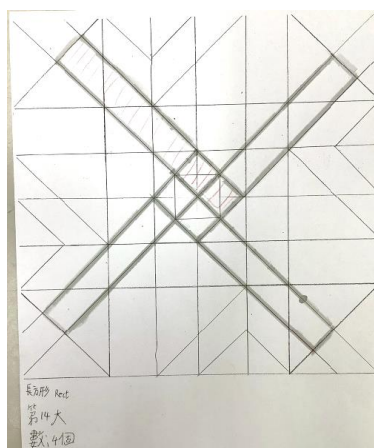
Rect. 第12大



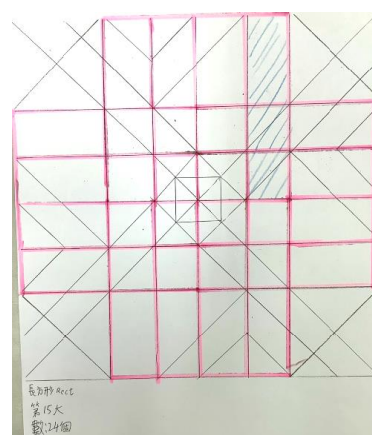
Rect. 第13大



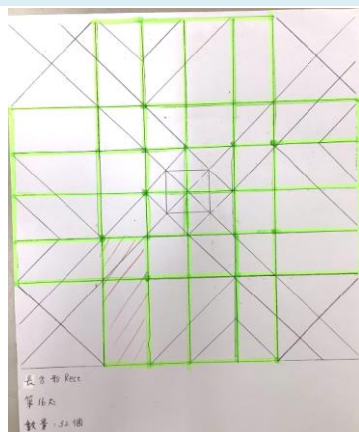
Rect. 第14大



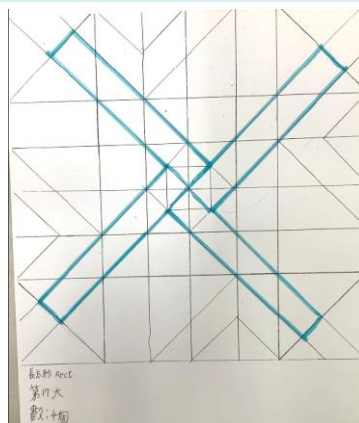
Rect. 第15大



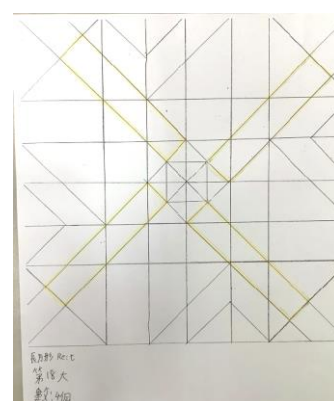
Rect. 第16大



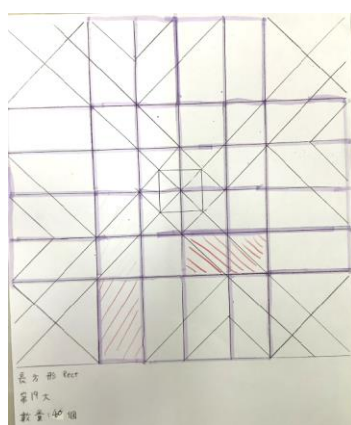
Rect. 第17大



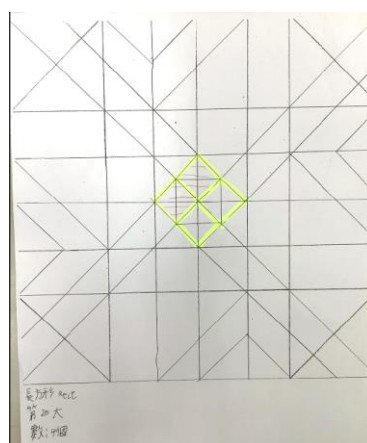
Rect. 第18大



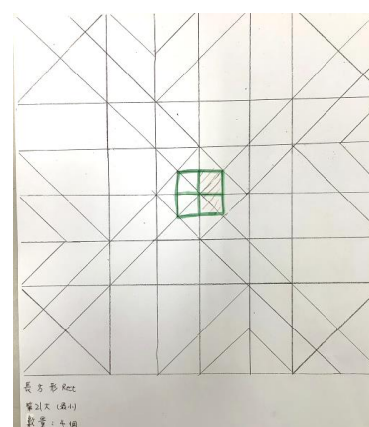
Rect. 第19大



Rect. 第20大



Rect. 第21大



(詳見現場資料)

表 3

川崎四瓣玫瑰多邊形組合類型統計

形狀	正方形 <i>Sq.</i>	平行四邊形 <i>Para.</i>	等腰三角形 <i>Irt.</i>	長方形 <i>Rect.</i>	梯形 <i>Tr.</i>	合計
數量	47	102	196	340	224	909

圖 18

川崎四瓣玫瑰

平行四邊形綜合分析

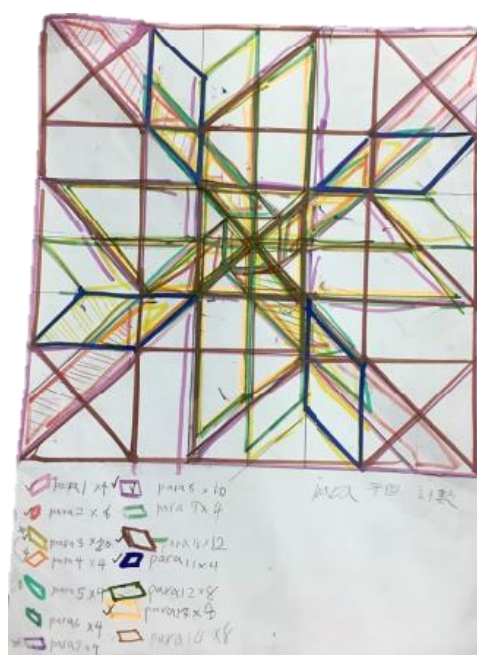
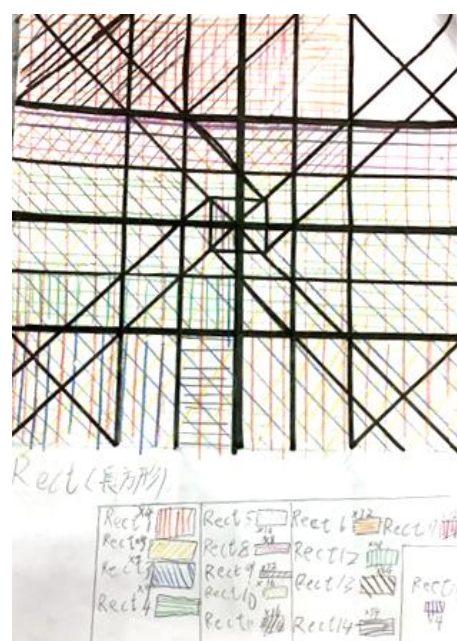


圖 19

川崎四瓣玫瑰

長方形綜合分析

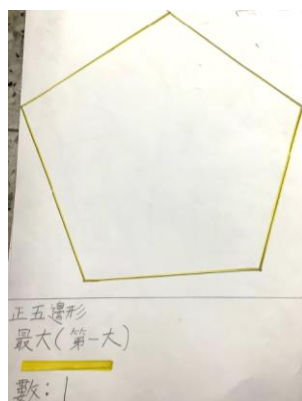


(二) 五瓣玫瑰_正五邊形分割組合

圖 20

川崎五瓣玫瑰幾何圖形組合—正五邊形

Peg. 第 1 大



Peg. 第 2 大

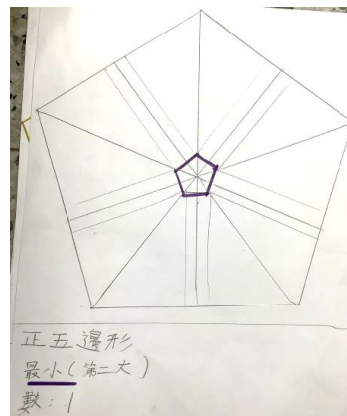
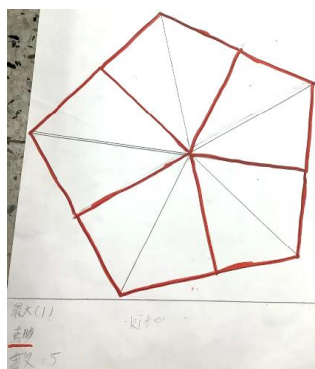


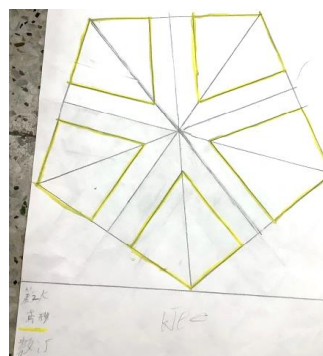
圖 21

五瓣川崎玫瑰幾何圖形組合—鳶形

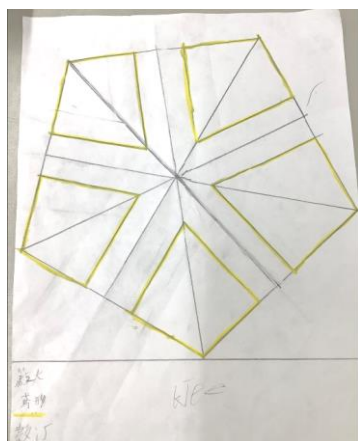
Kite 第 1 大



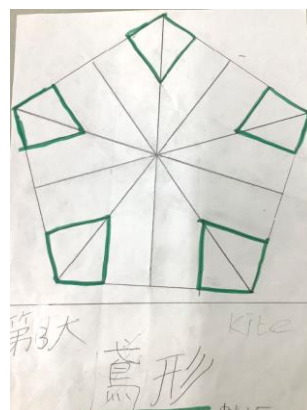
Kite 第 2 大



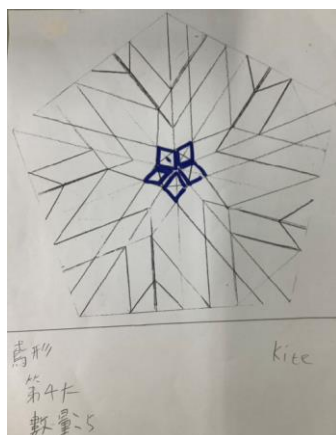
Kite 第 3 大



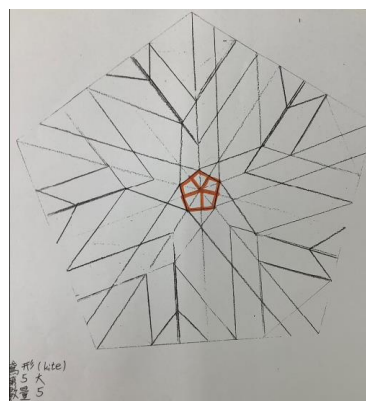
Kite 第 4 大



Kite 第 5 大



Kite 第 6 大

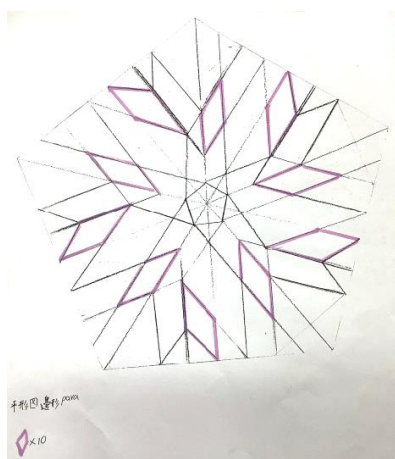


(詳見現場資料)

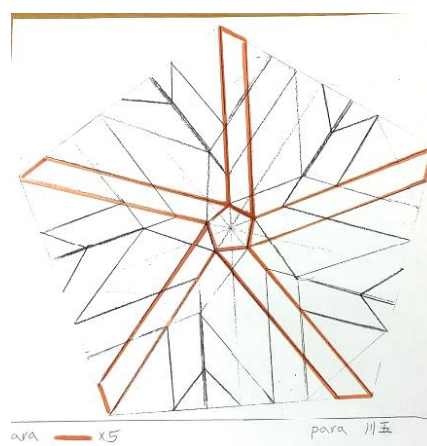
圖 22

川崎五瓣玫瑰幾何圖形組合—平行四邊形

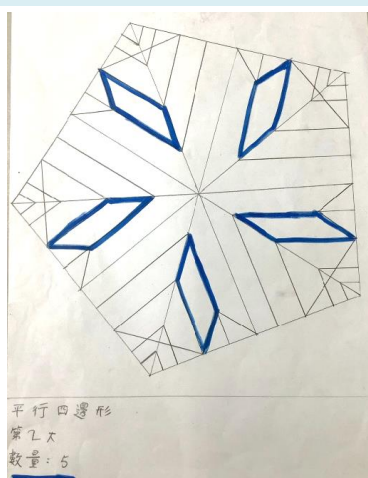
Para. 第 1 大



Para. 第 2 大



Para. 第 3 大



Para. 綜合分析

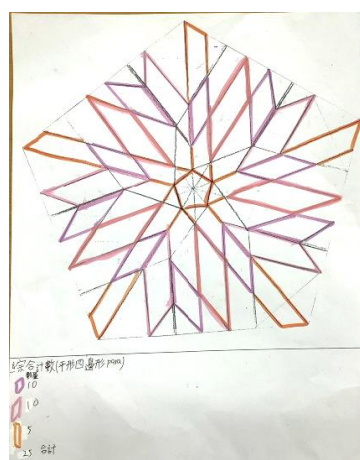
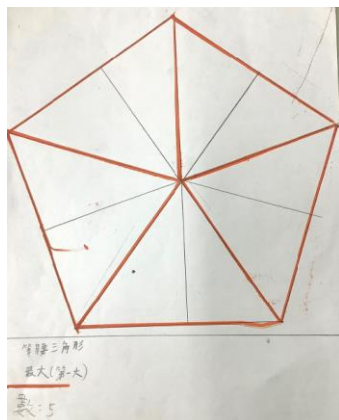


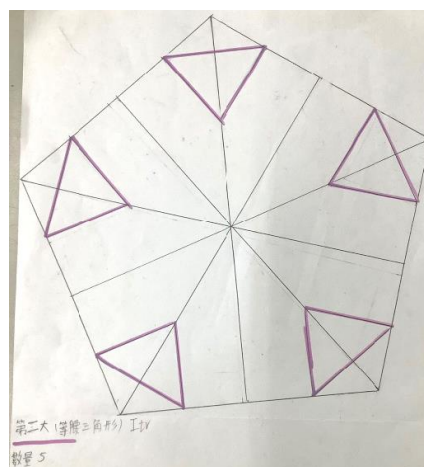
圖 23

川崎五瓣玫瑰幾何圖形組合——等腰三角形

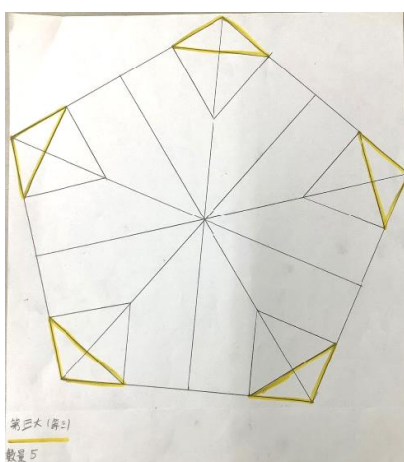
Itr.第 1 大



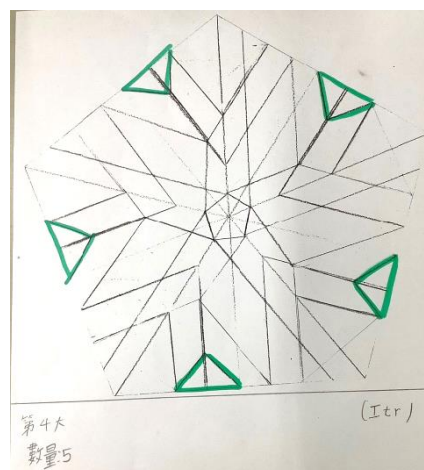
Itr.第 2 大



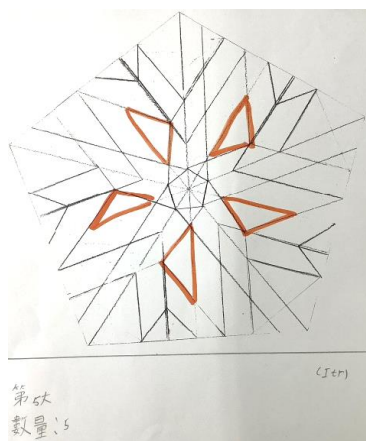
Itr.第 3 大



Itr.第 4 大



Itr.第 5 大



Itr.第 6 大

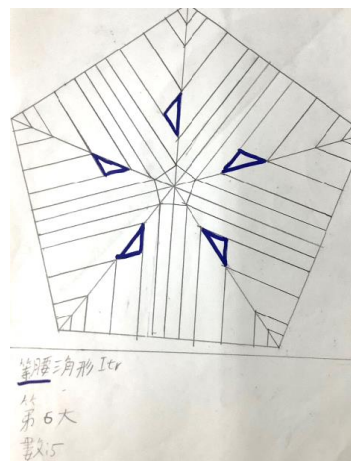


表 4

川崎五瓣玫瑰多邊形組合類型統計

形狀	正五邊形 Peg	平行四邊形 Para.	梯形 Tr.	合計
數量	2	20	30	
形狀	鳶形 Kite	等腰三角形 Itr.	直角三角形 Rt.	202
數量	25	40	85	

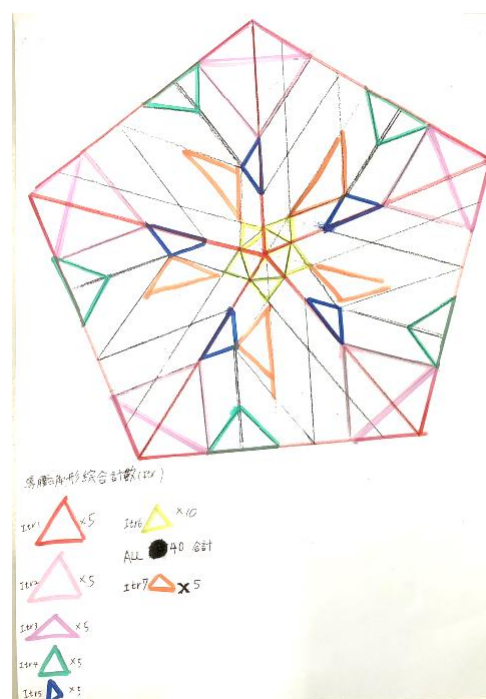
圖 24

川崎五瓣玫瑰鳶形分析



圖 25

川崎五瓣玫瑰等腰三角形分析



陸、研究結論

- 一、隨著 n 增加， n 轉旋轉翼以中垂線兩側 $\frac{1}{8}$ 摺最適合花瓣獨立成瓣。
- 二、川崎 n 轉後是角對邊；佐藤 n 轉結果是角對角。
- 三、川崎 4 轉的中心正方形面積變化有 $\frac{1}{2^2}$ 摺線翼是 $1:2^3$ ； $\frac{1}{2^3}$ 摺線翼是 $1:2^5$ ；
 $\frac{1}{2^4}$ 摺線翼是 $1:2^7$ 。
- 四、川崎五瓣玫瑰摺線圖由等腰三角形、正方形、長方形、平行四邊形和梯型組合而成。
- 五、川崎五瓣玫瑰由平行四邊形、梯形、鳶形、等腰三角形、直角三角形組合而成。

柒、參考文獻

一、書本文獻

- [1] 陳宣叡、陳柏廷等(2020)。虛實之間旋轉乾坤。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品說明書。
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-080405.pdf?105>
- [2] 佐藤直幹(2023)。佐藤直幹美麗玫瑰造型摺紙手藝工作集。日本東京：東京印書館。
- [3] 甄冬梅(2018)譯。原著者：佐藤直干。一張紙即可完成玫瑰折紙。河南科學技術出版社。

二、英文期刊資料

- [4] Wares, A.(2025). Problems and Solutions no.4986. **Crux**, pp.196, online edition. Canadian Mathematics Society. retrieved from
https://cms.math.ca/wp-content/uploads/2025/04/Wholeissue_51_4-1.pdf
<https://publications.cms.math.ca/cruxbox/>

三、數位資料

- [5] 瘋小貓(2025)。摺紙教學川崎玫瑰
<https://crazycat1130.pixnet.net/blog/posts/1345495>