

屏東縣第66屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：「馬」上有解： $n \times n$ 方陣中馬的置放極值規律與博弈必勝策略探究

關 鍵 詞：日字型規律、公平賽局、AI 輔助研究

編號：A1023

目錄

摘 要	3
壹、前言	4
一、研究動機	4
二、研究目的	4
三、文獻回顧	5
貳、研究設備及器材	6
一、軟體工具	6
二、硬體設備	6
三、輔助紀錄	6
參、研究過程或方法	7
一、研究架構	7
二、研究階段與方法詳述	7
肆、研究結果	9
一、 $n \times n$ 方陣中馬的最大化配置探索過程	9
二、 $n \times n$ 方陣中馬的最小化配置探索過程	10
三、雙馬對弈之必勝策略分析	14
伍、分析與討論	15
一、攻擊重疊性與置換效率的邏輯轉向	15
二、解開「 $9 \times 9 < 8 \times 8$ 」的覆蓋效率之謎	15
三、對稱性在極值挑戰中的限制與突破	16
四、對弈策略中的「空間奇偶平衡」	16
陸、結論與應用	16
一、研究結論	16
二、研究應用與未來展望	17
柒、參考資料	18
參考資料：	18

摘要

本研究旨在探究象棋中「馬」(Knight) 在 $n \times n$ 方陣中的置放極值與博弈規律。馬以特殊的「日」字型跳躍移動，在方陣中形成複雜的非線性路徑，我們針對「最大化置放量」、「最小化覆蓋量」及「雙人對弈策略」三個維度展開深入探究。

在研究方法上，我們突破傳統手算限制，與 AI 工具 Gemini (Canvas) 協作開發專屬的「象棋馬步累加器」與「對弈模擬器」。透過這套數位工具，我們能即時標示攻擊範圍（打 X）並進行大數據紀錄與動態回溯驗證，確保實驗數據的極致性與嚴謹度。

研究結果顯示：

- 馬匹數量最大化配置值：**我們成功歸納出 1×1 至 10×10 的一般化公式。

當 n 為偶數時：最大值 $M = \frac{n^2}{2}$ ；

當 n 為奇數時：最大值 $M = \frac{n^2 + 1}{2}$ 。

同時發現 2×2 方陣因空間限制無法形成攻擊，其最大值為 4 匹，不符合上述公式規律。

- 馬匹數量最小化配置值：**我們定義了田字、凸字、十字、一字、三角形等五大核心馬陣模式。實驗中發現一個顯著的反常遞減現象： 9×9 的最小值（14 顆）竟低於 8×8 的最小值（15 顆）。經分析，這是由於「日」字步跨度與 3 的倍數邊長產生幾何契合，減少了邊界死角浪費所致。

- 博弈策略：**在「最後落子者勝」的規則下，我們證實了「點對稱策略」的必勝性。奇數方陣先手搶佔中心點後透過對稱回應必勝；偶數方陣則由後手採取模仿對稱策略確保勝利。

本研究的發現未來可應用於城市基地台布點優化與自動化物流路徑管理。未來我們將進一步挑戰 12×12 規模的規律驗證，並嘗試將對稱邏輯推廣至非規則幾何棋盤的賽局模型中。

壹、前言

一、研究動機

在一次接觸桌上遊戲的過程中，我們對「空間佔領」與「路徑限制」的博弈邏輯產生了濃厚興趣。我們觀察到，許多經典遊戲（如：西洋棋）的魅力在於棋子特殊的移動規則所形成的攻擊網絡。其中，「馬」(Knight) 以「日」字型跳躍的移動方式，與一般棋子直線或斜線的路徑截然不同，這種非線性的攻擊範圍在 $n \times n$ 的方陣中形成了複雜且有趣的幾何連結。

我們思考：若將馬的走法獨立出來，在不同大小的方格中限制馬與馬之間不能互相攻擊，那麼一個方陣中最多能放置多少匹馬而不產生衝突？又或者是，最少需要放幾匹馬，就能讓棋盤上剩餘的空格皆處於馬的攻擊範圍內（即達成全面覆蓋）？

此外，我們進一步將此規則演變成一種具備「先手」與「後手」的雙人對弈遊戲，其勝負關鍵在於誰能下出最後一顆棋子。為了找出不同規模棋盤下的必勝法則，我們決定結合現代資訊技術，利用 AI 工具輔助開發一款專屬的模擬 APP。透過程式的快速運算與模擬，我們希望能驗證手算規律的正確性，並試圖找出馬在方陣中的置放規律與博弈必勝策略。

二、研究目的

本研究旨在透過實際操作、程式模擬與數學分析，探討馬在 $n \times n$ 方陣中的置放規律與博弈策略，具體目標如下：

- (一) **最大化配置值研究**：探討在 1×1 至 10×10 的方陣中，彼此互不攻擊的「馬」所能放置的最大數量，並試著歸納其數學規律。
- (二) **最小化配置值研究**：探討在 $n \times n$ 方陣中，以最少數量的「馬」達成「攻擊或佔據」全數方格，且馬與馬之間互不攻擊的置放方式。
- (三) **博弈必勝策略分析**：研究在雙人對弈模式下（最後放子者勝），分析不同棋盤規模（ n 為奇數或偶數）下，先手或後手的必勝邏輯與對稱規律。
- (四) **數位化研究工具應用**：利用 AI 輔助開發之應用程式（APP）進行大量數據模擬，驗證人工推導的規律，並觀察方陣規模擴大時的數據趨勢。

三、文獻回顧

(一) 國小數學教材中的規律與對稱

在國小五、六年級「數列與規律」單元中，我們學習了如何從觀察中找出圖形排列的規律。此外，六年級的「線對稱圖形」課程讓我們理解到，在一個對稱的方格空間中，若能善用對稱性質，往往能將複雜的問題簡化。這啟發了我們在研究馬的置放位置時，應優先觀察棋盤的中心與四個角落是否存在對稱關係。

(二) 棋盤空間的劃分與關聯性

參考相關數學遊戲書，棋盤可以被視為一個由座標 (x, y) 組成的集合。當一個棋子放在特定位置時，它會與周圍的格子產生「連結」或「排他」關係。馬 (Knight) 的跳躍路徑具有特殊的「日」字型規則，這種非線性的路徑會導致棋盤可用空間的快速縮減。我們利用這種空間劃分的觀念，思考如何將棋盤格子進行分類，以便研究馬在移動時，哪些格子會互相影響。

(三) 公平賽局與尼姆遊戲 (Nim Game) 的邏輯

本研究的第二階段——「雙馬對弈」，在數學上屬於「公平賽局」。這類遊戲的特點是：雙方可使用的規則完全相同，且勝負僅取決於置放的先後順序。

我們參考了著名的「尼姆遊戲 (Nim Game)」，這是一種輪流取走物品的經典賽局。尼姆遊戲告訴我們，在一個有限的規則下，必然存在「必勝位置」與「必敗位置」。只要掌握了「最後一手」的變數，並透過「逆向追蹤」的方法，就能推論出先手或後手是否具備必勝策略。這啟發我們去思考：在 $n \times n$ 的方陣中，是否也存在某些「關鍵格」，只要搶先佔領就能立於不敗之地。

(四) 資訊科技在數學探究中的角色

參考過往獲獎作品，我們發現研究者常利用程式工具來模擬繁瑣的實驗過程。這讓我們決定嘗試使用 AI 輔助開發工具 (Gemini)，將抽象的數學規則轉化為可操作的數位實驗環境 (Canvas 模擬器)。這不僅能提高實驗的準確度，還能讓我們在處理如 10×10 以上的大型棋盤時，依然能精確記錄每一匹馬的覆蓋範圍與對弈過程。

貳、研究設備及器材

在研究過程中，我們沒有撰寫複雜的程式碼，而是利用 AI 助理與筆記型電腦作為主要的實驗工具。

一、軟體工具

(一) Gemini (Canvas 模式)：這是我們的主要研究平台。我們像和老師聊天一樣，用中文告訴 Gemini 我們的數學規則，它就會在畫布 (Canvas) 上直接呈現出可操作的棋盤遊戲。

(二) AI 對話與修正：當我們發現規則不符時 (例如馬跳錯格子)，我們會直接對 Gemini 下指令要求修改。例如：

- 「請幫我們把標記受攻擊位置的功能。」
- 「請把原本單人操作的介面，修改成適合兩個人輪流下棋的『對弈模式』。」



圖 2-1 單馬



圖 2-2 雙馬對弈

(三) Google Chrome 瀏覽器：用來開啟並執行 Gemini 產生的互動遊戲視窗。

(四) Google 試算表：用來記錄我們在不同棋盤大小 (1x1 至 10x10) 下測試出的數據。

二、硬體設備

(一) 筆記型電腦：用來與 AI 討論、執行模擬程式，並撰寫研究報告。

(二) 滑鼠：在 nxn 的方陣中精確地點選格子，進行最大值測試與博弈對戰。

三、輔助紀錄

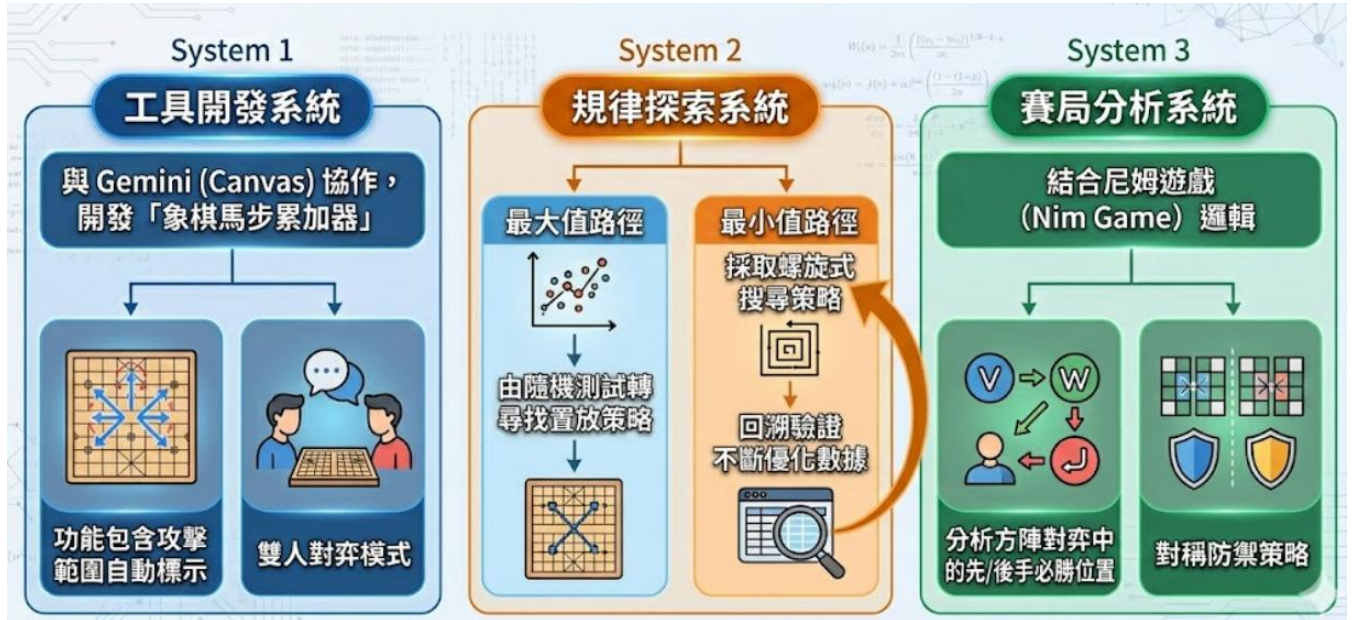
(一) AI 對話紀錄：我們保留了與 Gemini 的所有對話，這紀錄了我們如何從原本只會「跳日字」的程式，一步步修改成具有「雙人勝負判定」功能的過程。

(二) 實驗草稿：在與 AI 討論前，我們會先在紙上簡單勾勒出希望程式呈現的樣子。

參、研究過程或方法

一、研究架構

本研究之執行流程分為「工具建立」、「策略探究」與「賽局分析」三大系統，架構如下圖所示：



二、研究階段與方法詳述

(一) 第一階段：最大化配置探索策略

在尋找 $n \times n$ 方陣中馬的最大置放量時，我們經歷了以下四個重要的思維轉折：

1. 盲測與碰撞階段：隨機嘗試

初期，我們在 APP 上進行隨機點選，試圖塞入最多的馬。我們發現，如果沒有計畫地亂點，馬所產生的「受攻擊點」會迅速且雜亂地佔滿棋盤。這讓我們意識到，必須找到一種「減少攻擊重疊」的置放方式。

2. 邊角優先策略：角落出發的優勢

我們觀察到：馬若放在棋盤中間，最多會產生 8 個「紅格」；但若放在角落，產生的「紅格」最少（僅 2 個）。

(1) 發現 1：如圖 3-1 從角落開始排馬，能有效降低攻擊點對剩餘空格的封鎖，保留更多可置放的空間。

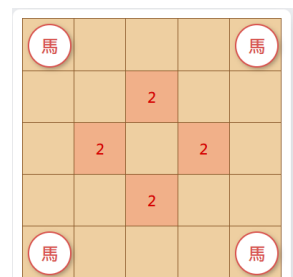


圖 3-1

(2) 發現 2：這種「從邊緣向中心推進」的方式，能讓棋盤中心的利用率達到最高。

3. 對角線佈局與干擾排除

接著，我們嘗試從棋盤的四個角落同時沿著「對角線」方向向中心排列。

- (1) 關鍵觀察：我們發現，當我們從一個角落沿對角線規律排列時，剩餘的空格分布似乎呈現出一種獨立性，不會被另一個角落延伸過來的馬匹所干擾(如圖 3-2、圖 3-3)。這代表方陣中存在著某種對稱的平衡點，只要找對起始位置，就能讓馬匹之間完美避開。

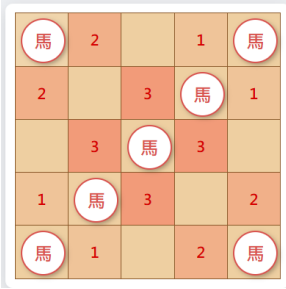


圖 3-2

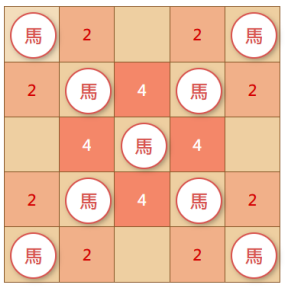


圖 3-3

4. 空一格排列法：規律的終極發現

最後，我們檢查整體的排列圖形，發現了一個驚人的簡單規律：

- (1) 核心策略：只要採取「控一格（跳一格）」的方式進行棋盤式排列，就能達到互不攻擊的極限。這就像是把所有馬都放在棋盤的「同色格」中（如圖 3-4）。



圖 3-4

- (2) 研究推導：這個規律讓我們從繁瑣的手動測試中解脫，並開始思考如何將這種規律轉化為不論棋盤多大都能適用的數學公式。

(二) 第二階段：最小化配置探索策

在尋找最小值的過程中，我們發展出三套核心方法來確保數據的精確性：

1. 螺旋式搜索：

由於棋盤邊緣與角落的格子受限較多，由中心開始可以覆蓋的格子較多，所以我們設定從棋盤中心開始置放馬匹，逐步向外圍推進。這種「由內而外」的策略能確保每一個角落都被有效覆蓋。

2. 模式化歸納：

在實驗過程中，我們不只是記錄數字，更觀察馬匹排列的「形狀」。每當在某一規模的方陣中發現具備高覆蓋效率的排列組合時，我們會將其「模式化 (Patternization)」，作為後續大型棋盤擴充時的基礎元件。

3. 動態回溯驗證：

這是本研究最重要的修正機制。每當我們在較大的方陣（如 $n=6$ ）中歸納出高效率的排列模式後，我們會「逆向操作」，將該模式套回較小的方陣（如 $n=4, n=5$ ），檢驗是否能打破之前的紀錄。這是一種「用未來的發現來修正過去結果」的嚴謹科學方法。

（三）第三階段：雙馬對弈賽局策略分析

1. 尼姆遊戲邏輯轉換：我們將棋盤上的「可置放空格」視為尼姆遊戲中的資源，研究每一步放子後「可用空間（可用物件）」的遞減狀態。
2. 對稱點鎖定法：分析在偶數與奇數方陣中，先手是否能透過佔領特定位置（如中心點），結合對稱策略，讓後手陷入無子可放的必敗位置。

肆、研究結果

一、 $n \times n$ 方陣中馬的最大化配置探索過程

透過上述的研究過程，我們總結出在 $n \times n$ 方陣中，馬的最大置放量 M 具有高度的數學規律性：

（一）對稱策略的應用結果

當我們採用「控一格排列法」時，棋盤會被切分為兩組互不干擾的集合。置放結果呈現完美的對稱性，確保了每一匹馬的「日字型」攻擊點都剛好落在空格上，而不會誤擊另一匹馬。

（二） 最大值一般化公式

我們分析 1x1 至 10x10 的實驗數據（如下表），並根據方陣的奇偶數歸納出以下公式：

n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
1	4	5	8	13	18	25	32	41	49

1. 當 n 為偶數時：最大值 $M=\frac{n^2}{2}$

○ 解釋：偶數方陣的黑白格數相等，最大值剛好佔據總格數的一半。

2. 當 n 為奇數時：最大值 $M=\frac{n^2+1}{2}$

○ 解釋：奇數方陣中，某一種顏色的格子會比另一種多一格，將馬全部置於較多格數的顏色中，即為最大值。

（三） 特殊案例分析：2x2 方陣

在研究過程中，我們發現 2x2 方陣是一個有趣的例外，因為 2x2 棋盤空間不足以讓馬完成「日字型」跳躍，因此在這種極小規模下，4 匹馬彼此完全無法互相攻擊。

二、nxn 方陣中馬的最小化配置探索過程

本階段目標為：以最少數量的馬，達成全場所有空格皆處於馬的攻擊範圍（打 X）或被馬佔據的「完封」狀態。我們採取「重疊最大化」原則，由中心向外擴張搜尋。

（一） 3x3 至 10x10 最小值的演進發現過程

1. 3x3 至 4x4：初始模式建立

(1) 3x3 探究：由中心點開始排列，發現將馬排成 2x2 的正方形（田字馬），可得到最小值為 4 顆。座標：(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)。(圖 4-1)

(2) 4x4 探究：延續田字馬策略，發現置放於棋盤中心的 (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) 亦能完封全場，最小值為 4 顆。(圖 4-2)



圖 4-1



圖 4-2

2. 5x5：十字馬與一字馬的出現

- (1) 從 3x3 至 4x4 發現田字馬的覆蓋效果很好，因此使用田字馬並在角落補上一顆馬，共使用 5 顆完成覆蓋，座標：(2,2), (2,4), (3,2), (3,3), (5,5)。(圖 4-2)
- (2) 當我們從中心點開始放馬，以求最大覆蓋面積時，自然的形成向四方輻射的「十字馬」，共使用 5 顆完成覆蓋，座標：(3,3), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)。(圖 4-3)
- (3) 隨後發現將三顆馬置於中心位置(2,3), (3,3), (4,3)，左右兩側在(1,3), (5,3)補位形成的「一字馬」同樣僅需 5 顆馬即可完封(圖 4-4)。我們回溯到 4x4 使用「一字馬」排列，也可得到僅使用 4 顆馬完成覆蓋。(圖 4-5)

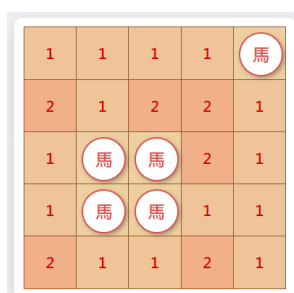


圖 4-2

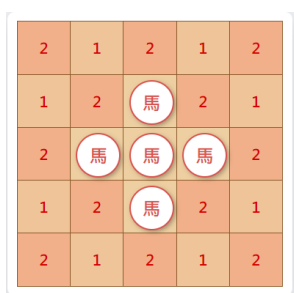


圖 4-3

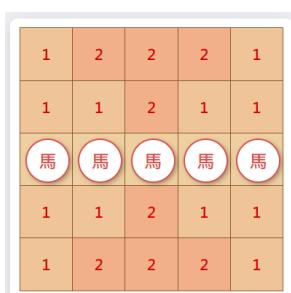


圖 4-4



圖 4-5

3. 6x6 與 7x7：組合技的運用

- (1) 6x6：嘗試多種模式後，發現「田字馬搭配角落補強」效率最高，最小值為 8 顆。此時我們推論田字消除空格的效率最優。(圖 4-6，圖 4-7)
- (2) 7x7：初步利用田字配角落達到 13 顆。接著研發出「組合技」：將「一字馬」與「凸字馬」結合，發現移除下方一字馬(圖 4-8) (2,2), (6,2)的兩個馬後產生的空格可用單馬填在(1,4)去補足(圖 4-9)，同樣達成 13 顆。

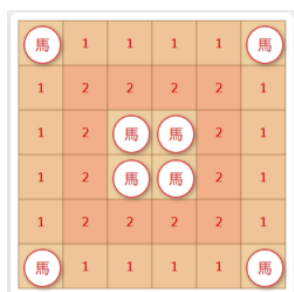


圖 4-6

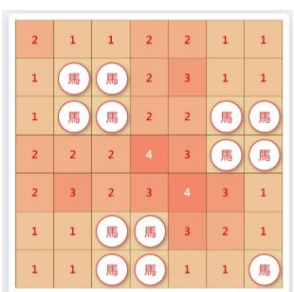


圖 4-7

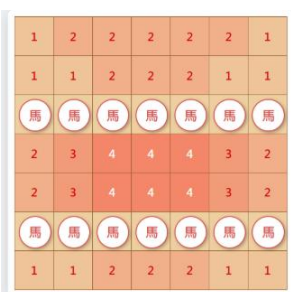


圖 4-8

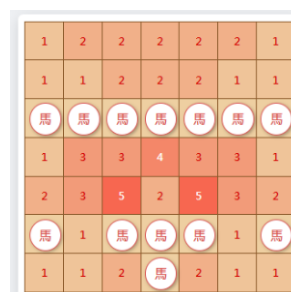


圖 4-9

4. 8x8 與 9x9：三角形馬的突破與遞減

- (1) 8x8：透過多種模式嘗試，我們發現利用 7x7 使用的移動、移除方式改變馬匹，能將原本的 16 顆(圖 4-10)優化至 15 顆。(圖 4-11)

(2) 9×9：核心發現！初步利用田字馬排列達到 16 顆(圖 4-12)。接著，從 8×8 發想用三角形馬的排列方式驚覺，最小值竟然只需要 14 顆(圖 4-13)，數量反而比 8×8 的 15 顆還少。

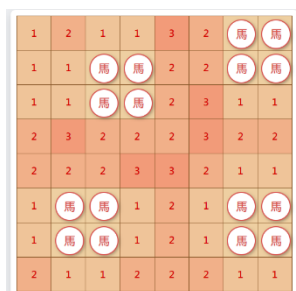


圖 4-10

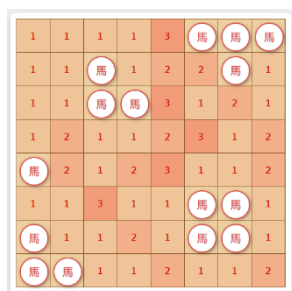


圖 4-11

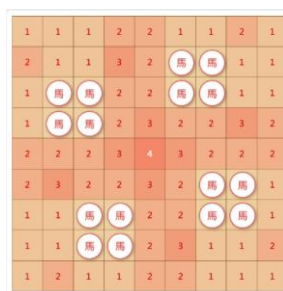


圖 4-12

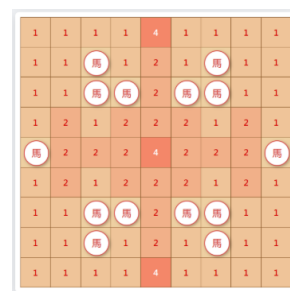


圖 4-13

5. 10×10：極限挑戰

(1) 利用的 8×8 組合技發想得到的最小值原為 18 顆(圖 4-14)，但回到最根本的田字馬反而成功下修至 16 顆(圖 4-15)。

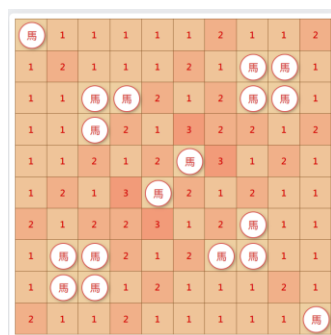


圖 4-15

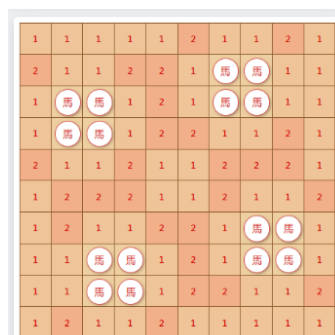


圖 4-16

(二) 螺旋回溯驗證：用後期智慧修正前期數據

我們在研究過程中並非單向進行，每當在較大棋盤發現高效模式時，便啟動「螺旋回溯」機制：

1. 凸字馬回溯：在 4×4 發現「凸字馬」的高覆蓋率後，我們回頭驗證 3×3 棋盤，確認凸字馬亦能達成 4 顆的最小值。
2. 一字馬回溯：在 5×5 發現「一字馬」後，我們將此概念套回 4×4。雖然一字形在 4×4 也能達成 4 顆，但經過螺旋檢測，發現受限於 4×4 邊界，一字馬無法讓馬的顆數低於 4 顆。
3. 模式優化回溯：當 8×8 與 9×9 研發出「三角形馬」後，我們回頭檢視 7×7 棋盤，確認在較小規模下，原本的「田字+角落」仍是最佳解，從而確保了數列的嚴謹性。

（三）統計數據與對稱觀察

我們整理 1x1 至 10x10 的最終數據與對稱特性如下表：

方陣規模(n×n)	最小值 (顆)	達成模式	對稱特性觀察
3×3	4	田字、凸字	線對稱
4×4	4	凸字、一字	線對稱
5×5	5	十字、一字	線對稱
6 ×6	8	田字組合技	線對稱
7×7	13	組合技	線對稱
8×8	15	三角形馬	非對稱
9×9	14	三角形馬	線對稱
10×10	16	綜合組合技	線對稱

觀察小結：我們發現除了 8x8 以外，其餘規模的最小值皆呈現線對稱圖形。這顯示在大多數方陣中，對稱性有助於提高覆蓋效率；唯獨 8x8 在追求極小值時，非對稱的佈置反而能避開物理死角。

（四）分析發現

1. 重疊性與數量的反比關係：

我們證實了：最大值的邏輯是「減少重疊」以獲取空間；最小值的邏輯則是「增加有效重疊」以減少馬匹。

2. 反常遞減之謎 (9×9 < 8×8)：

通常棋盤越大馬越多，但 9×9 卻打破此常規。我們分析由於馬步的攻擊範圍屬「日」字型（跨度為 3 格），9×9 棋盤作為 3 的倍數，能讓「三角形馬」的覆蓋範圍與棋盤邊界完美契合，減少了因邊界截斷而產生的覆蓋浪費。

3. 數列的變動特徵：

最小值的數列並非單調上升。在 9×9 時數量變小，而 10×10 又回升。這代表在特定規模下，馬步規律會與棋盤邊界產生「最佳契合」，達成特殊的極值點。

三、雙馬對弈之必勝策略分析

本階段目標為探究在 $n \times n$ 方陣中，紅馬（先手）與藍馬（後手）在「下最後一子者勝」的規則下，是否存在保證獲勝的邏輯。

（一）盤面空間的奇偶性與獨立空格

在初期隨機下棋的過程中，我們觀察到勝負與棋盤剩餘「可用空格」的數量與分布密切相關：

1. 關鍵發現：若能透過置放馬匹，使棋盤上剩下彼此「互不相關（不互相攻擊）」且數量為偶數的空格留給對手，則該玩家具備極大的勝算。
2. 邏輯推論：這符合尼姆遊戲的特性，當可用資源被劃分為成對的對稱狀態時，後手操作者可以透過維持「成對」的消耗，確保自己能下到最後一子。

（二）點對稱策略（Point Symmetry Strategy）的運用

透過 APP 的大量對弈測試，我們歸納出針對不同規模方陣的必勝演算法：

1. 當 n 為奇數時（紅馬先手必勝）：

- (1) 關鍵點：奇數方陣具備唯一的中心座標。
- (2) 策略：紅馬第一手必須先佔領中心點。此時，剩餘的可用格子呈現完美的點對稱分布。
- (3) 執行：隨後無論藍馬下在任何位置，紅馬只需在中心對稱的位置（即與藍馬位置相距中心點等距且方向相反處）跟進下子。
- (4) 結果：只要藍馬有格子下，紅馬必定有對稱格可下，故紅馬必勝。



2. 當 n 為偶數時（藍馬後手必勝）：

- (1) 關鍵點：偶數方陣沒有單一中心點，盤面初始狀態即為點對稱。
- (2) 策略：藍馬採取「模仿者」策略。
- (3) 執行：當紅馬下在座標 (x, y) 時，藍馬立即下在與其點對稱的座標 $(n-x+1, n-y+1)$ 。
- (4) 結果：由於棋盤邊長為偶數，所有格子皆能成對匹配，藍馬確保了自己永遠是每一對對稱空格的最後置放者，故藍馬必勝。



（三）實測驗證與例外討論

我們利用開發的對弈模式進行 3x3 到 10x10 的實測，證實了對稱策略的有效性。但在實驗中我們也發現：

路徑阻斷現象：雖然點對稱位置存在，但馬的「日字型」攻擊範圍可能會同時封鎖對稱的兩格。然而，由於對稱策略是同時消耗兩格，在大多數情況下，這種「連鎖封鎖」反而加速了賽局向偶數餘項收斂，並不影響上述規律的成立。

伍、分析與討論

一、攻擊重疊性與置換效率的邏輯轉向

在本研究中，我們證實了「重疊（Overlap）」程度是決定馬匹數量的關鍵因子，但其作用方向在最大值與最小值研究中完全相反：

1. 最大值的「省地」邏輯（追求高重疊）：

為了在有限方陣中放入最多的馬，我們必須讓每一匹馬產生的「X（攻擊點）」盡可能地重疊在少數特定的格子上。透過「角落出發」與「控一格排列」，我們成功減少了被封鎖的總格數，從而騰出更多空間置放馬匹。

2. 最小值的「擴張」邏輯（追求低重疊）：

反之，在尋找最小值時，目標是「一匹馬當三匹馬用」。因此，我們必須讓馬的攻擊點盡量不重疊，讓每一發「紅格」都能蓋到原本沒被蓋過的空格。這也是為什麼我們採取「螺旋式搜尋」與「一字馬」等長距離覆蓋模式的原因。

二、解開「 $9 \times 9 < 8 \times 8$ 」的覆蓋效率之謎

這是本研究最驚人的發現。 9×9 格數較多，但最小值（14 顆）卻比 8×8 （15 顆）更少。我們從「重疊率」的角度分析其原因：

1. 幾何契合度與邊界節約：

馬的「日字步」跨度與 9×9 （3 的倍數）具有極高的幾何契合度。在 9×9 佈置「三角形馬」時，攻擊範圍能像拼圖般精確填滿邊緣，無效重疊極低；而 8×8 為了補足邊界死角，被迫產生許多冗餘的重複攻擊，導致必須增加馬匹數量。

2. 中心輻射的對稱優勢：

9x9 具備唯一的中心點 (5, 5)，使「十字馬」等模式能從軸心進行完美的對稱擴張，最大化了單一馬匹的覆蓋半徑。

三、對稱性在極值挑戰中的限制與突破

我們觀察到最小值數列中，唯獨 8x8 呈現非對稱性。

1. 對稱性的包袱：在 8x8 中，維持對稱佈置雖然美觀，但會導致馬步攻擊範圍在角落產生「覆蓋空隙」。
2. 非對稱的優化：透過實驗發現，放棄對稱改採非對稱的「三角形馬」，能讓馬匹更靈活地避開不必要的重疊，將 16 顆的紀錄成功下修至 15 顆。這證明了在特定的物理邊界下，靈活的非對稱佈局能創造更高的覆蓋效率。

四、對弈策略中的「空間奇偶平衡」

在「雙馬對弈」中，我們發現的點對稱策略本質上是在操控「剩餘資源的數量」。

1. **奇數方陣（紅馬勝）**：先手（紅馬）佔領中心點後，持續採取「點對稱回應策略」即可獲勝。
2. **偶數方陣（藍馬勝）**：後手（藍馬）直接對紅馬進行「點對稱模仿策略」即可獲勝。

陸、結論與應用

一、研究結論

本研究透過「象棋馬步累加器」與「對弈模擬器」，針對 $n \times n$ 方陣中馬的置放規律與賽局策略，得出以下三大結論：

（一）最大置放量的一般化規律（互不攻擊）

1. 重疊優化原則：我們證實了若要塞入最多的馬，必須讓馬匹的攻擊點高度重疊在相同的空格上，以保留更多置放空間。
2. 公式推導：在 $n \times n$ 的方陣中，最大值符合黑白相間的「控一格」佈置規律：

當 n 為偶數時：最大值 $M = \frac{n^2}{2}$ ；

當 n 為奇數時：最大值 $M = \frac{n^2+1}{2}$ 。

3. 特殊案例：2x2 方陣因空間限制無法形成馬步攻擊，其最大值為 4，不受公式限制。

（二） 最小覆蓋量的幾何模式與反常現象（完封棋盤）

1. 模式化策略：我們定義了田字、凸字、十字、一字、三角形五大核心馬陣，並透過「螺旋搜尋」與「動態回溯驗證」優化數據。
2. 9x9 效率突破：本研究最重大發現為 9x9 的最小值（14 顆）低於 8x8（15 顆）。我們認為當棋盤規模與馬步跨度（3 格）產生倍數契合時，能極大化覆蓋效率，減少冗餘重疊。
3. 對稱與非對稱的取捨：除了 8x8 需採用非對稱的「三角形馬」來突破邊界死角外，其餘方陣皆能透過線對稱圖形達成極小值。

（三） 雙馬對弈的必勝策略與尼姆遊戲（Nim Game）理論驗證

1. 公平賽局邏輯轉化：本研究證實雙馬對弈符合尼姆遊戲的特徵。勝負關鍵在於能否透過置放馬匹，將盤面剩餘的「互不相關空格」轉化為偶數平衡態（P-position），使對方始終處於必敗位置。
2. 奇數方陣（紅馬先手必勝）：由於奇數方陣初始為單數資源，紅馬透過佔領中心點拿走唯一的單數項，使盤面進入「點對稱」的偶數平衡狀態，隨後採取跟隨策略即可確保獲勝。
3. 偶數方陣（藍馬後手必勝）：偶數方陣初始即為完全對稱的平衡態，後手（藍馬）只需針對先手的每一手進行「點對稱模仿」，確保每一次空間消耗都是成對抵消，使紅馬始終面對偶數餘項，符合尼姆遊戲後手必勝的邏輯。

二、 研究應用與未來展望

（一） 生活與科學應用

1. 資源覆蓋優化：本研究的「最小覆蓋量」邏輯可應用於城市規劃中的基地台設置或警力巡邏點配置，以最少的設施達成最大的感應範圍。
2. 倉儲路徑管理：在自動化物流中心，可利用「最大不重疊路徑」來設計多台機器人的移動路徑，避免發生碰撞與訊號干擾。

（二） 未來研究方向

本研究在 1x1 至 10x10 的規模內已取得初步成果，未來將朝以下兩個方向延伸：

1. 非方陣棋盤之規律探討

目前研究集中於正方形 ($n \times n$) 方陣，未來將擴展至長方形 ($n \times m$) 矩陣或其他非規則幾何棋盤。我們期待觀察棋盤改變後，原本的「五大馬陣」模式是否仍具備相同的覆蓋效率，以及最大值公式是否能進一步一般化，在雙馬對弈遊戲中，是否能有必勝的布局。

2. 「3 的倍數」契合假說與 12x12 驗證

基於本研究發現 3x3 (3 的倍數) 具備反常高效率覆蓋率的現象，我們提出「馬步幾何契合假說」。未來將挑戰 12x12 方陣的最小值測試，驗證當棋盤規模同樣為 3 的倍數時，是否也會因為與馬步跨度 (3 格) 完美銜接，產生如 9x9 般優於相鄰規模的數據優化現象。這將有助於確認馬步在特定比例空間中的幾何分布規律。

柒、參考資料

參考資料：

Google (2024). Gemini (Canvas) [大型語言模型]. <https://gemini.google.com> (用於輔助開發「象棋馬步累加器」程式與數據邏輯驗證)。

康軒文教機構 (2025a)。國小數學 10 (五年級下學期)。新北市：康軒文教。

康軒文教機構 (2025b)。國小數學 11 (六年級上學期)。新北市：康軒文教。

黃啟軒、顏詠時 (2024)。貓鼠終極戰。中華民國第 64 屆中小學科學展覽會作品說明書 (國小組數學科編號：080415)。新竹市：國立新竹科學園區實驗高級中等學校 (國小部)。

維基百科 (2024)。尼姆遊戲 (Nim Game)。 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/尼姆游戏> (用於博弈策略中 P-position 概念參考)。