

屏東縣第66屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：幾何彩虹:探究圓形彩虹與內(外)接多邊形的面積比規律

關 鍵 詞：圓面積、比與比值、幾何常數

編號：A1024

幾何彩虹:探究圓形彩虹與內(外)接多邊形的面積比規律

摘要

本研究跳脫傳統大氣光學的觀測視角，將自然界的彩虹抽象化為純粹的「圓環幾何」模型。我們將彩虹設定為由外圓與內圓組成的完美圓環，系統性地探究當圓形彩虹與其「外接正方形」及「內接正三角形」重疊時，其「彩虹帶面積」與「多邊形面積」之間是否存在特定的數學規律。

研究過程中，我們運用國小六年級所學的圓面積公式、比與比值概念，並引入「厚度比」作為變因進行代數推導。研究發現：當彩虹帶的厚度與半徑比例固定時，無論彩虹實際尺寸如何縮放，其與多邊形的面積比值均為定值。我們成功推導出一套「幾何比例常數表」，證實了幾何圖形在縮放變換下的面積不變性，並建立出可預測環狀物覆蓋率的數學模型。

壹、前言

一、研究動機：從天空的弧線到幾何的圓

在一次午後雷陣雨後，我們看見了美麗的彩虹。老師告訴我們，其實彩虹在飛機上看起來是一個完整的圓形，這讓我們對「圓形彩虹」產生了極大的好奇。在六年級的數學課中，我們學習了圓周率 π (≈ 3.14)、圓面積公式以及比與比值的概念。我們開始思考：如果這道圓形彩虹像一個「戒指」一樣，剛好套在一個正方形的花圃外，或者剛好鑲嵌在一個正三角形的標誌內，彩虹帶本身的面積與這些多邊形的面積，會不會存在某種神祕的比例關係？

我們想知道，當彩虹變厚或變薄時，這個比例會如何變動？這不需要複雜的光學儀器，只需要運用我們學過的幾何邏輯，就能在方格紙上展開一場「彩虹與多邊形」的數學對話。

二、研究目的：量化彩虹的幾何美學

本研究旨在透過數學推導與模型建立，探討圓環（彩虹）與規則多邊形之間的面積分布規律，具體目標如下：

- (一)、比例常數探究：找出圓形彩虹面積在「外接正方形」與「內接正三角形」情況下，其面積比值的數學表達式。
- (二)、厚度變因分析：探討彩虹帶寬度（厚度）的改變，對整體面積覆蓋率的影響趨勢。
- (三)、模型普適性驗證：驗證當圓環等比例縮放時，其面積比例是否保持不變，並嘗試建立一套適用於任何尺寸圓環的面積預測表。

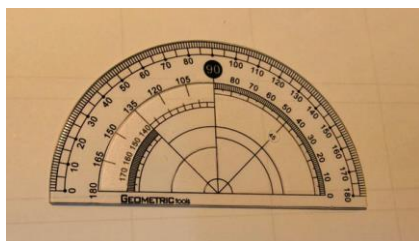
三、文獻回顧：基礎幾何與比例概念

根據教育部國小數學領域課程綱要及相關文獻，本研究所運用的理論基礎如下：

- (一)、**圓面積理論**：圓面積公式為 $\text{Area} = \pi r^2$ 。本研究進一步延伸至「圓環面積」，即大圓面積減去小圓面積 $A = \pi R^2 - \pi r^2$ 。
- (二)、**正多邊形幾何性質**：參考幾何學基礎，正方形面積與其外切圓半徑 R 的關係為 $\text{Area} = (2R)^2$ ；正三角形則可透過分割為六個直角三角形，查詢直角三角形的資料推導出其面積與半徑的函數關係為 $T = (3\frac{\sqrt{3}}{4}) R^2$ 。
- (三)、**比與比值**：延續六年級「比」的單元，我們利用比值來呈現兩個圖形間的空間佔有率，並觀察其是否隨半徑縮放而改變（相似形性質）。

貳、研究設備及器材

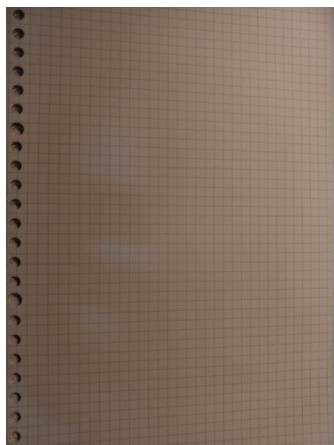
一、幾何繪圖工具（直尺、圓規、量角器）。



二、計算機（處理圓周率多次運算）。



三、方格紙（進行單位圓的面積估算驗證）。



參、研究過程或方法

一、定義數學模型:

(一)、彩虹的外圓半徑為 R ，內圓半徑為 r ，彩虹帶的寬度（厚度） $d = R - r$ 。

(二)、厚度比 $K = d/R$ (其中 $0 < K < 1$)，則內圓半徑 $r = R(1-K)$ 。

(三)、彩虹帶面積 $A = \pi R^2 - \pi r^2$ 。

(四)、外接正方形面積 $S = (2R)^2$ 。

(五)、內接正三角形面積 $T = (3\frac{\sqrt{3}}{4}) R^2$ 。

(六)、彩虹與外接正方形面積比 $L = A/S$ ，彩虹與內接正三角形面積比 $M = A/T$

二、實驗一：彩虹與外接正方形

假設圓形彩虹剛好「鑲嵌」在一個邊長為 $2R$ 的正方形內：

(一)、外接正方形面積 $S = (2R)^2 = 4R^2$ 。

(二)、計算彩虹面積佔正方形的百分比。

(三)、改變厚度 d (例如 $d=0.1R, 0.2R\dots$)，觀察百分比的變化。

三、實驗二：彩虹與內接正三角形

利用六年級學過的圖形分割，將正三角形切割為六個直角三角形，找出其面積與圓半徑

R 的關係 $T = (3\frac{\sqrt{3}}{4}) R^2$ ，($\sqrt{3}\approx 1.732$)進而求出比值。

肆、研究結果（理論計算）

透過純數學推導，因為 $r = R(1-K)$ ，所以彩虹面積 $A = \pi R^2 - \pi [R(1-k)]^2 = \pi R^2 (2k - k^2)$ 。

我們可以算出彩虹面積 A 與外接正方形面積 S 的比值 $L = \frac{\pi}{4}(2k - k^2)$ ，只有和厚度比 K 有

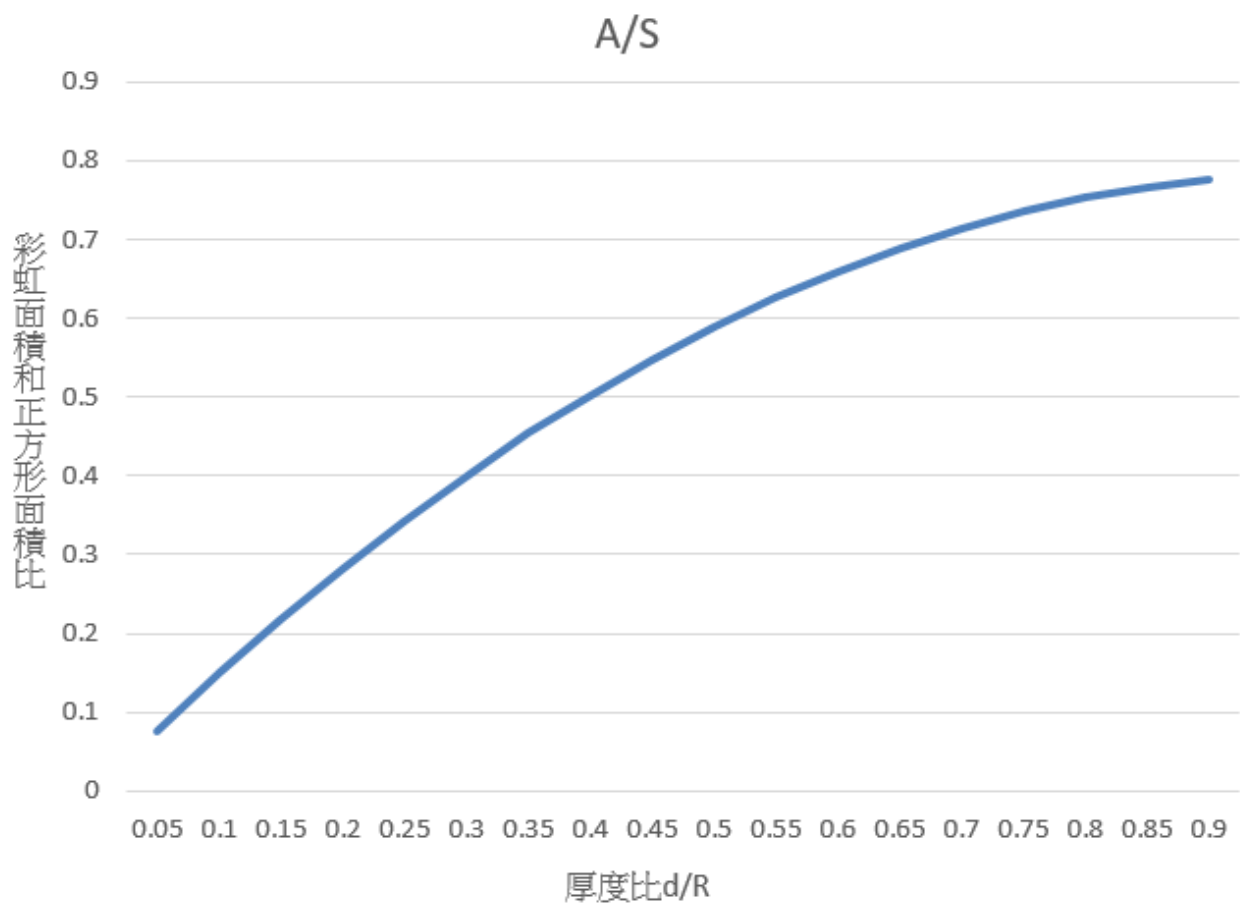
關，也就是只要「厚度與半徑的比值 K 」固定($K = d/R$)，不論彩虹實際大小，彩虹面積與外

框的面積比 $L = \frac{\pi}{4}(2k - k^2)$ 永遠固定。

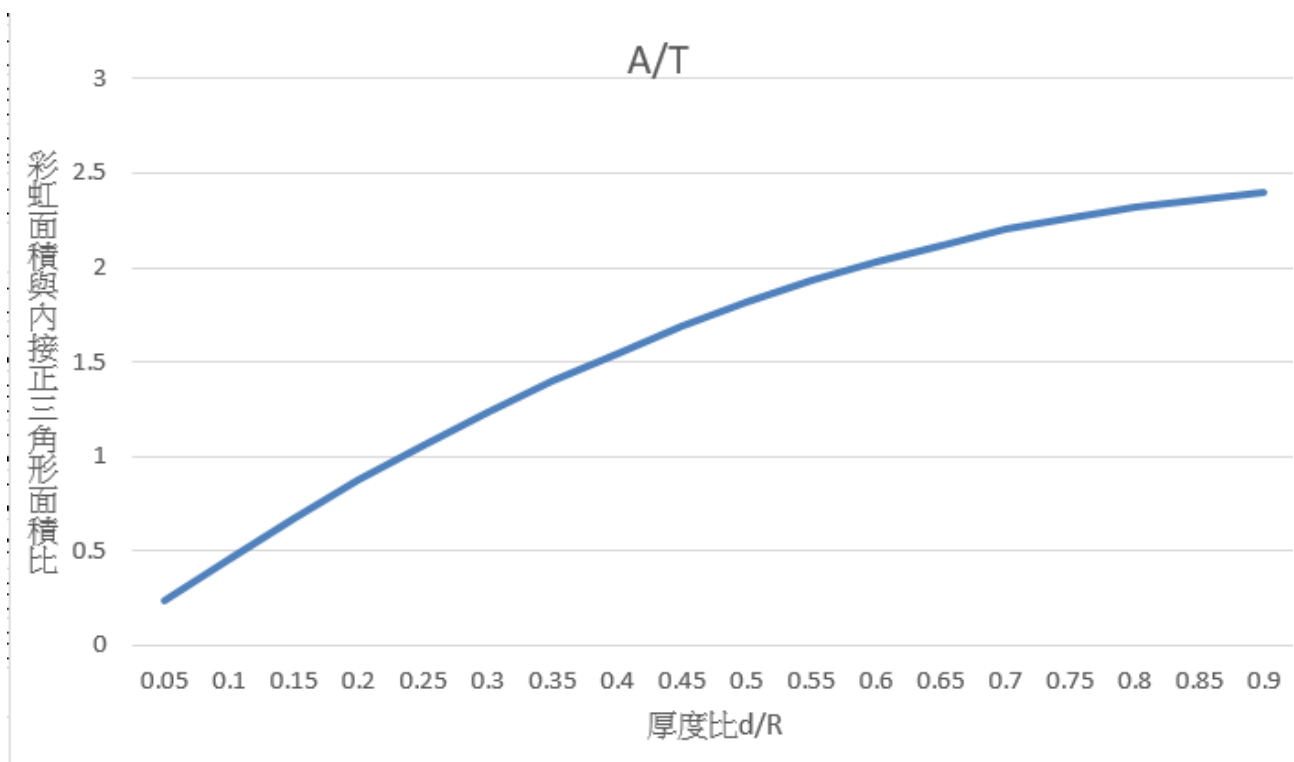
另外，若外接正方形面積 S 為定值之下，彩虹面積 $A = L \cdot S = \frac{\pi}{4}(2k - k^2)S$ 隨厚度比 d 是呈現二次曲線的變化趨勢。

R	r	d=R-r	K=d/R	$A = \pi R^2 - \pi r^2$	$S = 4R^2$	$T = (3\frac{\sqrt{3}}{4}) R^2$	$L = A/S$	$M = A/T$
10	9.5	0.5	0.05	30.62	400	129.9	0.08	0.24
10	9	1	0.1	59.66	400	129.9	0.15	0.46
10	8.5	1.5	0.15	87.14	400	129.9	0.22	0.67
10	8	2	0.2	113.04	400	129.9	0.28	0.87
10	7.6	2.4	0.24	132.63	400	129.9	0.33	1.02
10	7.5	2.5	0.25	137.38	400	129.9	0.34	1.06
10	7	3	0.3	160.14	400	129.9	0.40	1.23
10	6.5	3.5	0.35	181.34	400	129.9	0.45	1.40
10	6	4	0.4	200.96	400	129.9	0.50	1.55
10	5.5	4.5	0.45	219.02	400	129.9	0.55	1.69
10	5	5	0.5	235.50	400	129.9	0.59	1.81
10	4.5	5.5	0.55	250.42	400	129.9	0.63	1.93
10	4	6	0.6	263.76	400	129.9	0.66	2.03
10	3.5	6.5	0.65	275.54	400	129.9	0.69	2.12
10	3	7	0.7	285.74	400	129.9	0.71	2.20
10	2.5	7.5	0.75	294.38	400	129.9	0.74	2.27
10	2	8	0.8	301.44	400	129.9	0.75	2.32
10	1.5	8.5	0.85	306.94	400	129.9	0.77	2.36
10	1	9	0.9	310.86	400	129.9	0.78	2.39

我們發現當 $r = 0.75R$ 時，彩虹的面積快要等於內接正三角形的面積（比值為 1.06），如果代入 $r = 0.76R$ 時，則為最接近剛好等於內接正三角形的面積（比值為 1.02）。



由上面圖表來看，厚度 d 由小變大，彩虹面積和正方形面積比增加的趨勢變緩。



由上圖表來看，厚度 d 由小變大，彩虹面積和正三角形面積比增加的趨勢變緩。

伍、討論

一、極限思考：

當 R 為定值，彩虹厚度 d 極小時，彩虹面積趨近於圓周長 $2\pi R$ 。

二、實際應用：

如果我們知道彩虹佔據了外接正方形框面積的 15%，我們就能反推出這道彩虹的相對厚度約為半徑的 1/10。

R	r	$d=R-r$	$K=d/R$	$A=\pi R^2 - \pi r^2$	$S=4R^2$	$T=(3\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$	$L=A/S$	$M=A/T$
10	9.5	0.5	0.05	30.62	400	129.9	0.08	0.24
10	9	1	0.1	59.66	400	129.9	0.15	0.46

三、模型限制：

本研究假設彩虹為完美圓環，未考慮大氣折射造成的橢圓形變。

四、比例不變性的數學本質：

在本研究中，我們發現無論彩虹的原始半徑 R 是 10 公分還是 10 公里，只要「厚度比」（ $k = d/R$ ）固定，其與外接正方形或內接正三角形的面積比值就永遠固定。這證明了在幾何學中，「相似形」的面積比僅取決於形狀的結構參數，而與絕對尺寸無關。這項發現讓我們能建立一套「通用常數表」，只要目測彩虹的相對厚度，就能推算出它的覆蓋率。

五、厚度增加對比值的影響規律（非線性關係）：

我們觀察到，彩虹面積並不是隨著厚度 d 的增加而「等速」成長。

（一）、初期成長快：

當厚度 d 從 0.1 增加到 0.2 時，面積增加的幅度非常明顯。

(二)、後期趨緩：

隨著內圓 r 越來越小，增加厚度所帶來的面積增量會逐漸減少。

六、內接正三角形的幾何挑戰：

在討論內接正三角形時，我們發現彩虹的「內圓 r 」才是控制三角形面積的關鍵。當彩虹厚度往外擴張時，三角形是被「鎖」在內圓之中的。這讓我們意識到，圓形彩虹在幾何上扮演了「內外夾擠」的中介角色：它既要滿足外圓與正方形的切點，又要兼顧內圓對三角形的包覆。

七、誤差來源與實際應用限制

在現實觀測中，彩虹可能因為大氣折射或觀測角度，呈現橢圓形而非正圓形，這會導致實際比值與理論值產生微小偏差。此外，國小階段我們取 $\pi = 3.14$ 、 $\sqrt{3}=1.732$ 進行計算，若在國中階段使用精確的值，數值將會更加嚴謹。

陸、結論

一、本研究將自然現象轉化為「幾何面積比例」問題。

二、我們計算出了「彩虹比例常數」 $L = \frac{\pi}{4}(2k - k^2)$ 的存在：即面積比值只與「厚度比」有關，與「實際長度」無關。

三、透過此數學模型，我們可以用幾何方法快速估算不規則環狀物的覆蓋率。

四、現實中的彩虹寬度取決於雨滴的大小（水珠越大，彩虹越窄且鮮豔）。我們的數學模型中，當 k 趨近於 1（極薄），代表雨滴非常大；當 k 較小時（厚實），代表霧氣或細雨。透過我的比值表，我們只要觀察彩虹在天空中的『視覺厚度』，就能反推降雨的物理特性。」

五、未來應用：可應用於光學標誌設計、氣象數據視覺化分析，以及建築幾何美學的比例參考。未來希望進一步探究當彩虹內接『正 n 邊形』時，隨著邊數增加，這個比例常數是否會逐漸趨近於某個極限值？這將會是我們研究的下一個里程碑。

柒、參考資料及其他

- 一、國小六年級數學課本：圓面積、比與比值、等量公理。
- 二、幾何學基礎：圓形與多邊形的關係。