

屏東縣第 66 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：出『棋』致勝-以 AI 輔助棋盤遊戲

關鍵詞：棋盤遊戲、點對稱、棋逢敵手

編號：B1002

摘要

本研究是就科學研習雙月刊游森棚教授的特約專欄文中提到「如果某一空格，以它為中心伸出的長條十字中已經有兩個棋子，那就不能在此格中放棋子。」的棋盤遊戲去研究必勝策略。我們分成四個版本條件並結合「Claude 軟體」做出智慧棋盤輔助。

『棋盤 I』：棋盤中該位置的直行及橫列分別各有一子條件討論；

『棋盤 II』：再依前述條件又加上棋盤中該位置的直行有兩子或橫列有兩子探討；

『棋盤 III』：再依前二版條件又加上斜對角線有兩子探究；

『棋盤 IV』：再依前三版條件又加上棋盤中該位置的斜對角線有兩子研究。

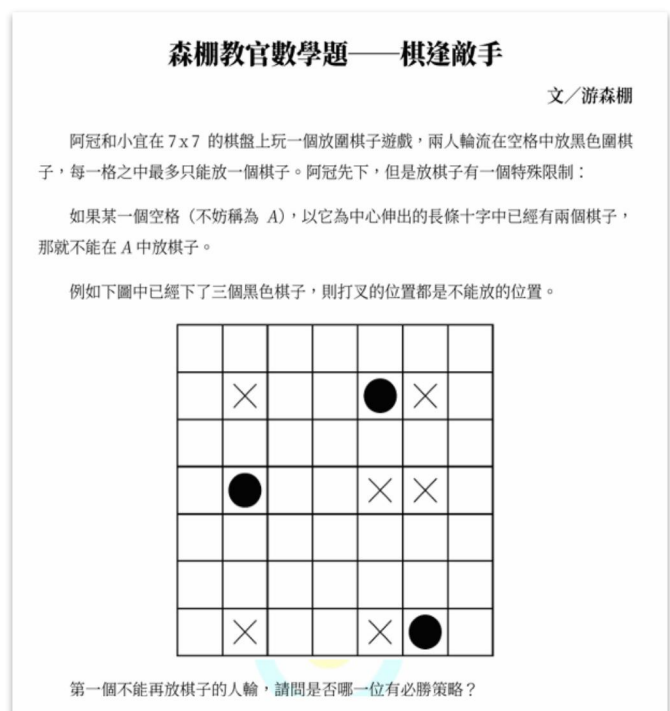
內容主要是探討『 $n \times n$ 正方形棋盤』的必勝策略，我們除了要解決文中提到的相關問題之外，我們也想研究『 $m \times n$ 長方形棋盤』會不會也有必勝策略？

壹、前言

我們在國立台灣科學育館的網頁：科學研習雙月刊第 64 卷第 1 期的『特約專欄』看到〈森棚教官數學題——棋逢敵手〉，如右圖所示。

文中提到「如果某一空格，以它為中心伸出的長條十字中已經有兩個棋子，那就不能在此格中放棋子。」我們以此為中心想法，增加不同的條件，研發出四種版本棋盤。在研究中，先探討『 $n \times n$ 正方形棋盤』的必勝策略，其中 n 為偶數或奇數。進而延伸到『 $m \times n$ 長方形棋盤』，其中 n 、 m 為奇數或偶數時，會不會有什麼不同的結果？

我們結合「Claude 軟體」做出 AI 棋盤輔助。利用 Claude 作為核心分析工具，讓系統能即時判斷棋局狀態、藉由它分析可能走法，進而研究必勝策略。透過棋盤實際操作與 AI 回饋的結合，使用者不僅能進行遊戲，還能理解每一步背後的邏輯與數學概念。棋盤遊戲設計分為與『玩家對戰』以及與『電腦對戰』，讓抽象的運算與推理變得具體、有趣，也為未來智慧學習工具的發展提供一個實際可行的方向。



貳、研究設備及器材

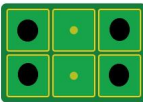
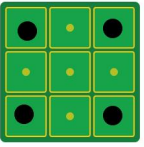
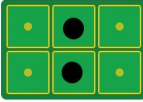
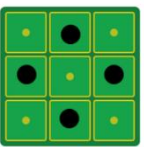
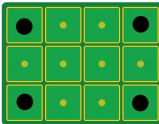
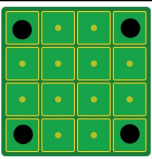
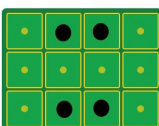
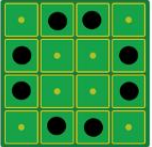
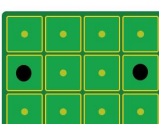
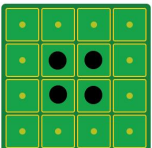
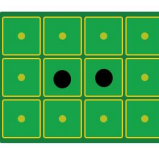
電腦、電腦軟體（Microsoft Word、Claude）

參、研究過程或方法

一、定義名詞與符號

(一) 直曰行、橫曰列。將棋盤予以坐標化，定義 (i,j) 為由上至下算的第 i 列，由左至右算的第 j 行。

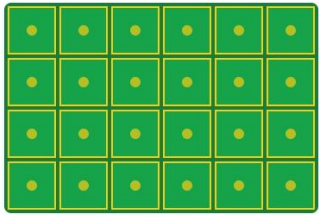
(二) 因為正方形及長方形棋盤皆有對稱性，下棋過程中，棋盤圖形若經過旋轉或翻轉(鏡射)與另一棋盤圖形重合，二者視為相同。下方以 2×2 、 3×3 、 4×4 、 2×3 、 3×4 棋盤舉例說明哪些下法是相同的，之後討論中只以一種方式呈現。其餘方陣棋盤依此類推。

棋盤格式	位置圖形	說明	棋盤格式	位置圖形	說明
2×2		第1步下在4個角落下法視為相同			第1步下在4個角落下法視為相同
3×3		第1步下在4個角落下法視為相同	2×3		第1步下在長邊上此2個位置下法視為相同
		第1步下在四邊上此4個位置下法視為相同	3×4		第1步下在4個角落下法視為相同
4×4		第1步下在4個角落下法視為相同			第1步下在長邊上此4個位置下法視為相同
		第1步下在四邊上此8個位置下法視為相同			第1步下在短邊上此2個位置下法視為相同
		第1步下在中心4個位置下法視為相同			第1步下在內部此2個位置下法視為相同

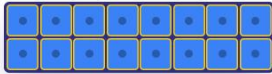
(三) AI 棋盤說明

1、棋盤 I

規則	棋盤中該位置的直行及橫列分別各有一子，則該位置不能下。
----	-----------------------------

網址	https://claude.ai/public/artifacts/5e69787c-8b90-4219-8319-5f9dc73bab5c
棋盤樣式 (綠色)	十字規則黑白棋 玩家對戰 電腦對戰 列數: 4 × 行數: 6 ☒ 黑棋 ☐ 白棋 重新開始 悔棋  當前回合: 黑棋 黃色點表示可下棋位置
功能	悔棋: 可恢復上一步, 不須重新開始

2、棋盤 II

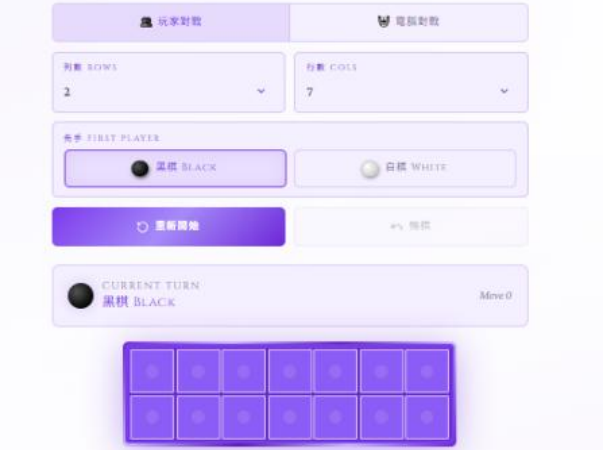
規則	條件 1: 棋盤中該位置的直行及橫列分別各有一子, 則該位置不能下。 條件 2: 棋盤中該位置的直行有兩子或橫列有兩子, 則該位置不能下。
網址	https://claude.ai/public/artifacts/0a546be5-1740-4711-93da-7ee537fb80f5
棋盤樣式 (藍色)	玩家對戰 電腦對戰 列數: 2 行數: 8 先手選擇: ☒ 黑棋 ☐ 白棋 重新開始 悔棋 當前回合: ● 黑棋 已下 0 步 
功能	悔棋: 可恢復上一步, 不須重新開始

3、棋盤 III

規則	條件 1: 棋盤中該位置的直行及橫列分別各有一子, 則該位置不能下。 條件 2: 棋盤中該位置的直行有兩子或橫列有兩子, 則該位置不能下。 條件 3: 棋盤中斜對角線有兩子, 則該條斜對角線不能下。
網址	https://claude.ai/public/artifacts/1dcb77ec-3fa7-47d1-b694-c62c4d000313
棋盤樣式 (黃色)	玩家對戰 電腦對戰 棋盤大小: 3 × 3 先手選擇: ☒ 黑棋 ☐ 白棋 重新開始 悔棋 當前回合: ● 黑棋 (先手) 已下 0 步 
功能	悔棋: 可恢復上一步, 不須重新開始

4、棋盤 IV

規則	條件 1: 棋盤中該位置的直行及橫列分別各有一子, 則該位置不能下。 條件 2: 棋盤中該位置的直行有兩子或橫列有兩子, 則該位置不能下。
----	--

	條件 3：棋盤中該位置的斜對角線有兩子，則該位置不能下。
網址	https://claude.ai/public/artifacts/cfc8187e-56dd-419e-b844-3b7b50a32aeb
棋盤樣式 (紫色)	
功能	悔棋：可恢復上一步，不須重新開始

- (四) 兩人依序下棋，先下棋者稱為先手(手執黑棋)，後下棋者稱為後手(手執白棋)。在四版棋盤中，兩人所下之棋子將出現 1、2、3、4...之有序編號，其中 1、3、5、...為先手所下；2、4、6、...為後手所下。
- (五) 本研究所提出之分析結果與結論都是建立在對弈雙方皆以獲勝為目標，且整體棋力水準相當的情況下所整理與歸納而成。在此情況下去討論先手或後手是否必勝。

二、研究過程

(一) 棋盤 I

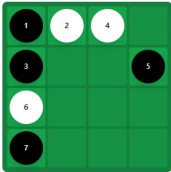
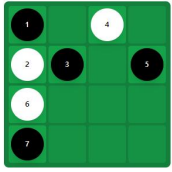
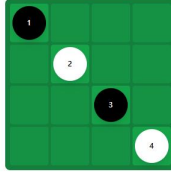
1、 $n \times n$ 正方形棋盤

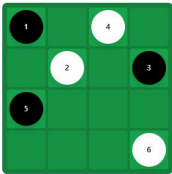
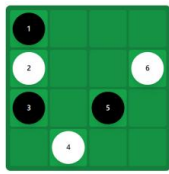
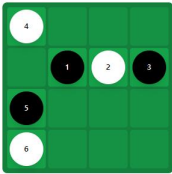
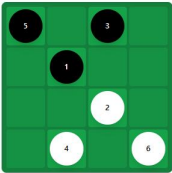
(1)偶 $\times$ 偶正方形棋盤：以 2×2 正方形棋盤及 4×4 正方形棋盤進行討論

(i) 2×2

							
回合	一	二	回合	一	二	回合	一
先手	(1,1)	(2,2)	先手	(1,1)	(2,2)	先手	(1,1)
後手	(1,2)		後手	(2,1)		後手	(2,2)
結果	先手勝		結果	先手勝		結果	後手勝，必勝下法

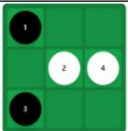
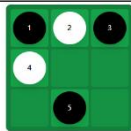
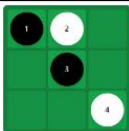
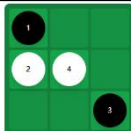
(ii) 4×4

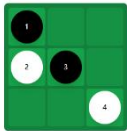
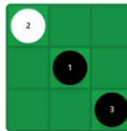
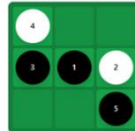
		
---	---	---

回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	
先手	(1,1)	(2,1)	(2,4)	(4,1)	先手	(1,1)	(2,2)	(2,4)	(4,1)	先手	(1,1)	(3,3)	
後手	(1,2)	(1,3)	(3,1)		後手	(2,1)	(1,3)	(3,1)		後手	(2,2)	(4,4)	
結果	先手勝				結果	先手勝				結果	後手勝		
													
回合	一	二	三		回合	一	二	三	回合	一	二	三	
先手	(1,1)	(2,4)	(3,1)		先手	(1,1)	(3,1)	(3,3)	先手	(2,2)	(2,4)	(3,1)	
後手	(2,2)	(1,3)	(4,4)		後手	(2,1)	(4,2)	(2,4)	後手	(2,3)	(1,1)	(4,1)	
結果	後手勝				結果	後手勝				結果	後手勝		
													
回合	一	二	三		回合	一	二	三					
先手	(2,2)	(1,3)	(1,1)		先手	(2,2)	(2,4)	(1,1)					
後手	(3,3)	(4,2)	(4,4)		後手	(3,3)	(3,1)	(4,4)					
結果	後手勝，必勝下法				結果	後手勝，必勝下法							

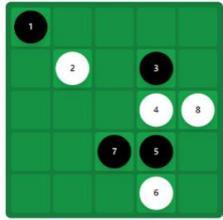
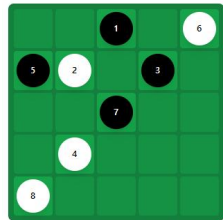
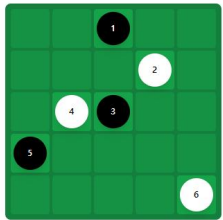
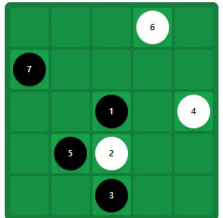
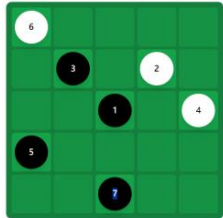
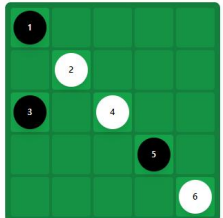
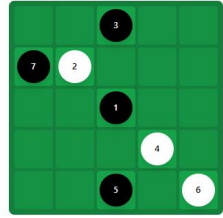
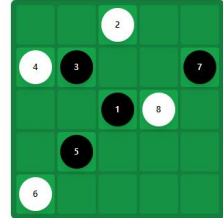
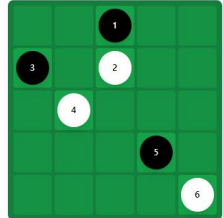
(2)奇×奇正方形棋盤：以 3×3 正方形棋盤及 5×5 正方形棋盤作為討論

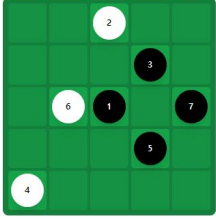
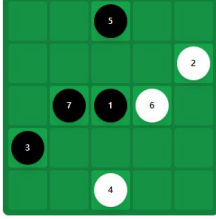
(i) 3×3

									
回合	一	二	回合	一	二	回合	一	二	三
先手	(1,1)	(3,3)	先手	(1,1)	(3,1)	先手	(1,1)	(1,3)	(3,2)
後手	(2,2)		後手	(2,2)	(2,3)	後手	(1,2)	(2,1)	
結果	先手勝		結果	後手勝		結果	先手勝		
									
回合	一	二	回合	一	二	回合	一	二	
先手	(1,1)	(2,2)	先手	(1,1)	(2,3)	先手	(1,1)	(3,3)	
後手	(1,2)	(3,3)	後手	(1,2)	(3,1)	後手	(2,1)	(2,2)	

結果	後手勝		結果	後手勝		結果	後手勝		
									
回合	一	二	回合	一	二	回合	一	二	三
先手	(1,1)	(2,2)	先手	(2,2)	(3,3)	先手	(2,2)	(2,1)	(3,3)
後手	(2,1)	(3,3)	後手	(1,1)		後手	(2,3)	(1,1)	
結果	後手勝		結果	先手勝，必勝下法		結果	先手勝，必勝下法		

(ii) 5 × 5

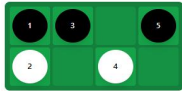
														
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	
先手	(1,1)	(2,4)	(4,4)	(4,3)	先手	(1,3)	(2,4)	(2,1)	(3,3)	先手	(1,3)	(3,3)	(4,1)	
後手	(2,2)	(3,4)	(5,4)	(3,5)	後手	(2,2)	(4,2)	(1,5)	(5,1)	後手	(2,4)	(3,2)	(5,5)	
結果	後手勝				結果	後手勝				結果	後手勝			
														
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	
先手	(3,3)	(5,3)	(4,2)	(2,1)	先手	(3,3)	(2,2)	(4,1)	(5,3)	先手	(1,1)	(3,1)	(4,4)	
後手	(4,3)	(3,5)	(1,4)		後手	(2,4)	(3,5)	(1,1)		後手	(2,2)	(3,3)	(5,5)	
結果	先手勝				結果	先手勝				結果	後手勝			
														
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	
先手	(3,3)	(1,3)	(5,3)	(2,1)	先手	(3,3)	(2,2)	(4,2)	(2,5)	先手	(1,3)	(2,1)	(4,4)	
後手	(2,2)	(4,4)	(5,5)		後手	(1,3)	(2,1)	(5,1)	(3,4)	後手	(2,3)	(3,2)	(5,5)	
結果	先手勝				結果	後手勝				結果	後手勝			

									
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四
先手	(3,3)	(2,4)	(4,4)	(3,5)	先手	(3,3)	(4,1)	(1,3)	(3,2)
後手	(1,3)	(5,1)	(3,2)		後手	(2,5)	(5,3)	(3,4)	
結果	先手勝				結果	先手勝，必勝下法			

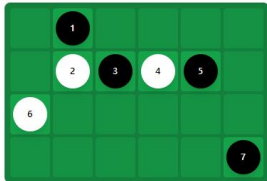
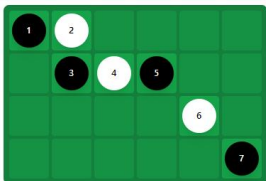
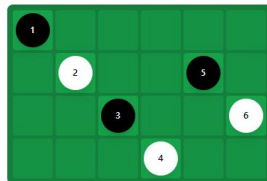
2、 $m \times n$ 長方形棋盤(其中 $m \neq n$)

(1) 偶 $\times$ 偶長方形棋盤：以 2×4 長方形棋盤及 4×6 長方形棋盤作為討論。

(i) 2×4

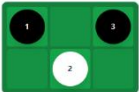
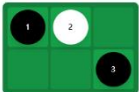
											
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	
先手	(1,1)	(1,2)	(1,4)	先手	(1,1)	(2,2)	(2,4)	先手	(1,1)	(1,3)	
後手	(2,1)	(2,3)		後手	(1,2)	(1,3)		後手	(2,2)	(2,4)	
結果	先手勝			結果	先手勝			結果	後手勝，必勝下法		

(ii) 4×6

														
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	
先手	(1,2)	(2,3)	(2,5)	(4,6)	先手	(1,1)	(2,2)	(2,4)	(4,6)	先手	(1,1)	(3,3)	(2,5)	
後手	(2,2)	(2,4)	(3,1)		後手	(1,2)	(2,3)	(2,5)		後手	(2,2)	(4,4)	(3,6)	
結果	先手勝				結果	先手勝				結果	後手勝，必勝下法			

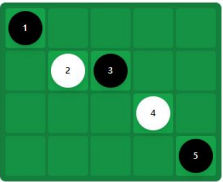
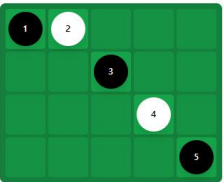
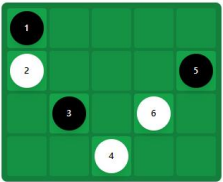
(2) 偶 $\times$ 奇長方形棋盤：以 2×3 長方形棋盤及 4×5 長方形棋盤作為討論。

(i) 2×3

								
回合	一	二	回合	一	二	回合	一	二
先手	(1,1)	(1,3)	先手	(1,1)	(2,3)	先手	(1,1)	(1,3)

後手	(2,2)		後手	(1,2)		後手	(2,1)	(2,3)
結果	先手勝		結果	先手勝		結果	後手勝，必勝下法	

(ii) 4×5

											
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三
先手	(1,1)	(2,3)	(4,5)	先手	(1,1)	(2,3)	(4,5)	先手	(1,1)	(3,2)	(2,5)
後手	(2,2)	(3,4)		後手	(1,2)	(3,4)		後手	(2,1)	(4,3)	(3,4)
結果	先手勝			結果	先手勝			結果	後手勝，必勝下法		

(3) 奇 $\times$ 偶長方形棋盤：棋盤經旋轉後為偶 $\times$ 奇長方形棋盤，故不重複討論。

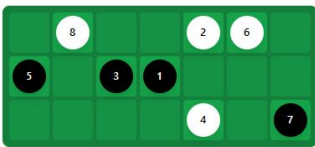
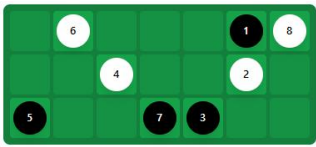
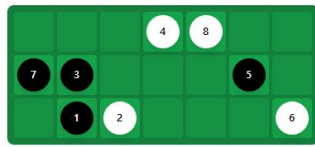
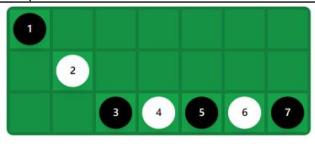
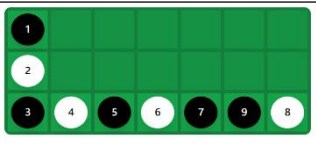
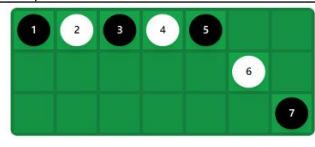
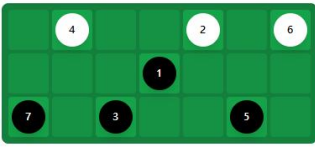
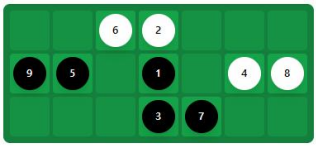
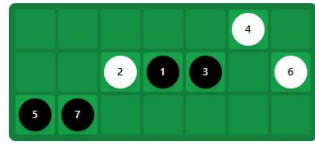
(4) 奇 $\times$ 奇長方形棋盤：以 3×5 長方形棋盤及 3×7 長方形棋盤作為討論。

(i) 3×5

回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三	
先手	(1,4)	(3,3)	(2,1)	先手	(2,3)	(3,2)	(2,1)	先手	(1,3)	(2,2)	(1,1)	
後手	(2,4)	(1,2)	(3,5)	後手	(3,4)	(1,4)	(2,5)	後手	(1,4)	(3,3)	(1,5)	
結果	後手勝			結果	後手勝			結果	後手勝			
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三	四
先手	(1,1)	(3,3)	(3,5)	先手	(1,1)	(1,3)	(3,5)	先手	(1,1)	(3,1)	(3,3)	(3,5)
後手	(2,2)	(3,4)		後手	(1,2)	(2,4)		後手	(2,1)	(3,2)	(3,4)	
結果	先手勝，必勝下法			結果	先手勝，必勝下法			結果	先手勝，必勝下法			
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三	四
先手	(2,3)	(3,2)	(2,1)	先手	(2,3)	(2,4)	(3,1)	先手	(2,3)	(3,3)	(3,1)	(3,4)
後手	(1,4)	(2,5)		後手	(2,2)	(1,5)		後手	(1,3)	(1,5)	(1,2)	

結果	先手勝，必勝下法	結果	先手勝，必勝下法	結果	先手勝，必勝下法
----	----------	----	----------	----	----------

(ii) 3×7

															
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	
先手	(2,4)	(2,3)	(2,1)	(3,7)	先手	(1,6)	(3,5)	(3,1)	(3,4)	先手	(3,2)	(2,2)	(2,6)	(2,1)	
後手	(1,5)	(3,5)	(1,6)	(1,2)	後手	(2,6)	(2,3)	(1,2)	(1,7)	後手	(3,3)	(1,4)	(3,7)	(1,5)	
結果	後手勝				結果	後手勝				結果	後手勝				
															
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	五	回合	一	二	三	四
先手	(1,1)	(3,3)	(3,5)	(3,7)	先手	(1,1)	(3,1)	(3,3)	(3,5)	(3,6)	先手	(1,1)	(1,3)	(1,5)	(3,7)
後手	(2,2)	(3,4)	(3,6)		後手	(2,1)	(3,2)	(3,4)	(3,7)		後手	(1,2)	(1,4)	(2,6)	
結果	先手勝，必勝下法				結果	先手勝，必勝下法				結果	先手勝，必勝下法				
															
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	五	回合	一	二	三	四
先手	(2,4)	(3,3)	(3,6)	(3,1)	先手	(2,4)	(3,4)	(2,2)	(3,5)	(2,1)	先手	(2,4)	(2,5)	(3,1)	(3,2)
後手	(1,5)	(1,2)	(1,7)		後手	(1,4)	(2,6)	(1,3)	(2,7)		後手	(2,3)	(1,6)	(2,7)	
結果	先手勝，必勝下法				結果	先手勝，必勝下法				結果	先手勝，必勝下法				

(二)棋盤 II

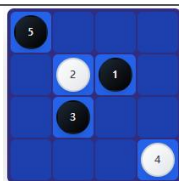
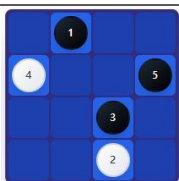
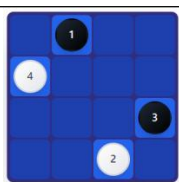
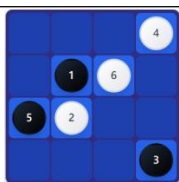
1、 $n \times n$ 正方形棋盤

(1)偶 $\times$ 偶正方形棋盤：以 2×2 正方形棋盤及 4×4 正方形棋盤作為討論

(i) 2×2

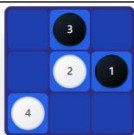
					
回合	一	二	回合	一	
先手	(1,1)	(2,1)	先手	(1,1)	
後手	(1,2)		後手	(2,2)	
結果	先手勝		結果	後手勝，必勝下法	

(ii) 4 × 4

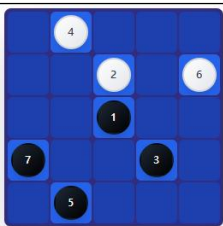
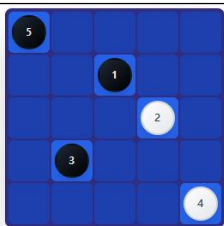
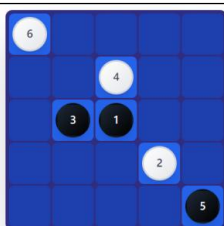
											
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三
先手	(2,3)	(3,2)	(1,1)	先手	(1,2)	(3,3)	(2,4)	先手	(2,2)	(4,2)	(3,1)
後手	(2,2)	(4,4)		後手	(4,3)	(2,1)		後手	(2,3)	(4,4)	(1,3)
結果	先手勝			結果	先手勝			結果	後手勝，必勝下法		
											
回合	一	二	三	回合	一	二	三				
先手	(2,1)	(3,4)		先手	(2,2)	(4,4)	(3,1)				
後手	(4,3)	(2,1)		後手	(3,2)	(1,4)	(2,3)				
結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法						

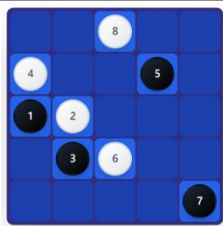
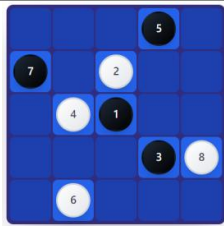
(2) 奇 × 奇正方形棋盤：以 3 × 3 正方形棋盤及 5 × 5 正方形棋盤作為討論

(i) 3 × 3

					
回合	一	二	回合	一	二
先手	(2,3)	(1,1)	先手	(2,3)	(1,2)
後手	(3,2)		後手	(2,2)	(3,1)
結果	先手勝		結果	後手勝，必勝下法	

(ii) 5 × 5

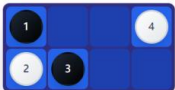
														
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三		回合	一	二	三	
先手	(3,3)	(4,4)	(5,2)	(4,1)	先手	(2,3)	(4,2)	(1,1)		先手	(3,3)	(3,2)	(5,5)	

後手	(2,3)	(1,2)	(2,5)		後手	(3,4)	(5,5)			後手	(4,4)	(2,3)	(1,1)	
結果	先手勝				結果	先手勝				結果	後手勝			
														
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四					
先手	(3,1)	(4,2)	(2,4)	(5,5)	先手	(3,3)	(4,4)	(1,4)	(2,1)					
後手	(3,2)	(2,1)	(4,3)	(1,3)	後手	(2,3)	(3,2)	(5,2)	(4,5)					
結果	後手勝，必勝下法				結果	後手勝，必勝下法								

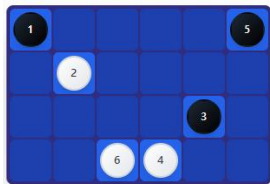
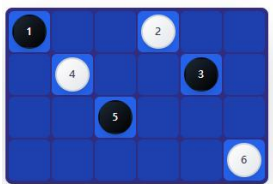
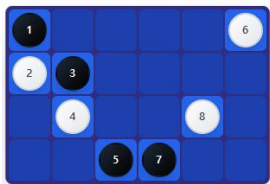
2. $m \times n$ 長方形棋盤(其中 $m \neq n$)

(1) 偶 $\times$ 偶 方形棋盤：以 2×4 長方形棋盤及 4×6 長方形棋盤作為討論。

(i) 2×4

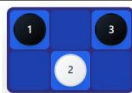
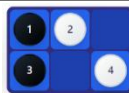
								
回合	一	二	回合	一	二	回合	一	二
先手	(1,1)	(2,2)	先手	(1,1)	(2,2)	先手	(1,1)	(1,4)
後手	(2,1)	(1,4)	後手	(1,3)	(2,4)	後手	(2,2)	(2,3)
結果	後手勝，必勝下法		結果	後手勝，必勝下法		結果	後手勝，必勝下法	

(ii) 4×6

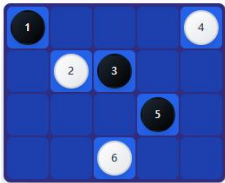
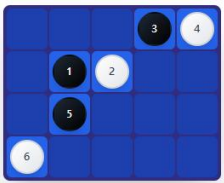
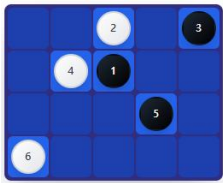
												
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三	四
先手	(1,1)	(3,5)	(1,6)	先手	(1,1)	(2,5)	(3,3)	先手	(1,1)	(2,2)	(3,4)	(4,4)
後手	(2,2)	(4,4)	(4,3)	後手	(1,4)	(2,2)	(4,6)	後手	(2,1)	(3,2)	(1,6)	(3,5)
結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法			

(2) 偶 $\times$ 奇 長方形棋盤：以 2×3 長方形棋盤及 4×5 長方形棋盤作為討論。

(i) 2×3

								
回合	一	二	回合	一	二	回合	一	二
先手	(1,1)	(1,3)	先手	(2,2)	(2,1)	先手	(1,1)	(2,1)
後手	(2,2)		後手	(1,3)		後手	(1,2)	(2,3)
結果	先手勝		結果	先手勝		結果	後手勝，必勝下法	
								
回合	一	二						
先手	(1,2)	(1,3)						
後手	(2,2)	(2,1)						
結果	後手勝，必勝下法							

(ii) 4×5

											
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三
先手	(1,1)	(2,3)	(3,4)	先手	(2,2)	(1,4)	(3,2)	先手	(2,3)	(1,5)	(3,4)
後手	(2,2)	(1,5)	(4,3)	後手	(2,3)	(1,5)	(4,1)	後手	(1,3)	(2,2)	(4,1)
結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法		

(3) 奇 $\times$ 偶長方形棋盤：棋盤經旋轉後為偶 $\times$ 奇長方形棋盤，故不重複討論。。

(4) 奇 $\times$ 奇方形棋盤：以 3×5 長方形棋盤及 3×7 長方形棋盤作為討論。

(i) 3×5

											
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三
先手	(1,1)	(3,3)	(2,5)	先手	(2,2)	(1,4)	(3,5)	先手	(1,1)	(3,2)	(2,4)
後手	(2,2)	(3,4)		後手	(2,3)	(1,1)		後手	(2,1)	(3,3)	(1,5)
結果	先手勝			結果	先手勝			結果	後手勝，必勝下法		

			
回合	一	二	三
先手	(1,3)	(2,2)	(2,5)
後手	(1,4)	(3,3)	(3,1)
結果	後手勝，必勝下法		

(ii) 3×7

											
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三
先手	(1,1)	(2,2)	(2,5)	先手	(2,4)	(1,4)	(2,7)	先手	(1,1)	(3,2)	(2,4)
後手	(1,2)	(3,3)	(3,4)	後手	(3,3)	(1,2)	(3,5)	後手	(2,1)	(3,3)	(1,5)
結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法		

(三)棋盤 III

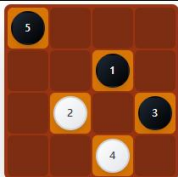
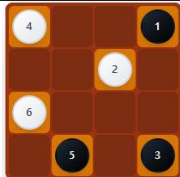
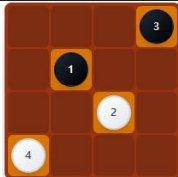
1. $n \times n$ 正方形棋盤

(1) 偶 $\times$ 偶正方形棋盤：以 2×2 正方形棋盤及 4×4 正方形棋盤作為討論

(i) 2×2

				
回合	一	二	回合	一
先手	(1,2)	(2,2)	先手	(2,1)
後手	(1,1)		後手	(1,2)
結果	先手勝		結果	後手勝，必勝下法

(ii) 4×4

											
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	
先手	(2,3)	(3,4)	(1,1)	先手	(1,4)	(4,4)	(4,2)	先手	(2,2)	(1,4)	

後手	(3,2)	(4,3)		後手	(2,3)	(1,1)	(3,1)	後手	(3,3)	(4,1)
結果	先手勝			結果	後手勝			結果	後手勝，必勝下法	

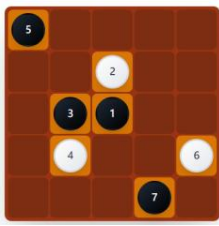
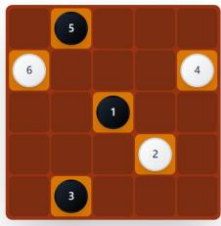
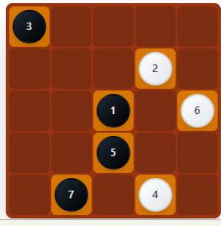
(2)奇 × 奇正方形棋盤：以 3 × 3 正方形棋盤及 5 × 5 正方形棋盤作為討論

(i)3 × 3

											
回合	一	二		回合	一	二	三	回合	一	二	三
先手	(2,1)	(3,3)		先手	(1,1)	(2,2)	(3,2)	先手	(1,1)	(1,2)	(2,3)
後手	(1,2)			後手	(2,1)	(1,3)		後手	(2,1)	(3,2)	
結果	先手勝			結果	先手勝			結果	先手勝		
											
回合	一	二	三	回合	一	二		回合	一	二	
先手	(2,2)	(3,3)	(1,2)	先手	(1,1)	(2,3)		先手	(2,1)	(3,2)	
後手	(2,3)	(3,1)		後手	(1,2)	(3,1)		後手	(2,3)	(1,3)	
結果	先手勝			結果	先手勝			結果	先手勝		
											
回合	一	二									
先手	(1,1)	(1,3)									
後手	(2,2)	(3,2)									
結果	後手勝，必勝下法										

(ii)5 × 5

回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四
先手	(3,3)	(4,4)	(4,5)	(5,2)	先手	(3,3)	(2,4)	(4,3)	(1,2)	先手	(3,3)	(2,4)	(2,2)	(5,2)

後手	(3,4)	(2,1)	(1,5)		後手	(3,4)	(2,2)	(4,1)		後手	(3,4)	(4,3)	(4,1)	
結果	先手勝				結果	先手勝				結果	先手勝			
														
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四
先手	(2,3)	(2,4)	(5,4)	(1,1)	先手	(3,3)	(3,2)	(1,1)	(5,4)	先手	(3,2)	(2,3)	(5,2)	(4,5)
後手	(3,3)	(4,5)	(5,2)		後手	(2,3)	(4,2)	(4,5)		後手	(4,3)	(3,4)	(1,4)	(2,1)
結果	先手勝				結果	先手勝				結果	先手勝			
														
回合	一	二	三		回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四
先手	(3,3)	(5,2)	(1,2)		先手	(3,3)	(2,4)	(4,1)	(4,5)	先手	(3,3)	(1,1)	(4,3)	(5,2)
後手	(4,4)	(2,5)	(2,1)		後手	(1,1)	(3,2)	(5,4)		後手	(2,4)	(5,4)	(3,5)	
結果	後手勝				結果	先手勝，必勝下法				結果	先手勝，必勝下法			

(四)棋盤 IV

1、 $n \times n$ 正方形棋盤

(1)偶 $\times$ 偶正方形棋盤：以 2×2 正方形棋盤及 4×4 正方形棋盤作為討論

(i) 2×2

					
回合	一	二	回合	一	
先手	(1,1)	(2,1)	先手	(1,1)	
後手	(1,2)		後手	(2,2)	
結果	先手勝		結果	後手勝，必勝下法	

(ii) 4×4

回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三
先手	(3,3)	(3,2)	(4,4)	先手	(2,3)	(3,4)	(4,1)	先手	(1,2)	(3,3)	(2,4)
後手	(2,3)	(1,2)		後手	(2,2)	(1,3)		後手	(4,3)	(2,2)	(3,1)
結果	先手勝			結果	先手勝			結果	後手勝，必勝下法		

(2)奇 × 奇正方形棋盤：以 3 × 3 正方形棋盤及 5 × 5 正方形棋盤作為討論

(i)3 × 3

回合	一	二	回合	一	二
先手	(2,3)	(1,1)	先手	(2,3)	(1,2)
後手	(3,2)		後手	(2,2)	(1,3)
結果	先手勝		結果	後手勝，必勝下法	

(ii)5 × 5

回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四
先手	(3,3)	(1,5)	(4,1)	(2,1)	先手	(3,3)	(4,4)	(1,2)	(3,5)	先手	(3,3)	(5,5)	(3,1)	(1,2)
後手	(4,4)	(3,2)	(5,3)		後手	(2,3)	(4,2)	(2,1)	(5,4)	後手	(2,4)	(5,2)	(4,3)	
結果	先手勝				結果	後手勝				結果	先手勝，必勝下法			
回合	一	二	三		回合	一	二	三	四					
先手	(3,3)	(2,4)	(5,2)		先手	(3,3)	(1,5)	(2,1)	(5,3)					
後手	(1,1)	(4,5)			後手	(2,2)	(3,4)	(4,1)						

結果	先手勝，必勝下法	結果	先手勝，必勝下法	
----	----------	----	----------	--

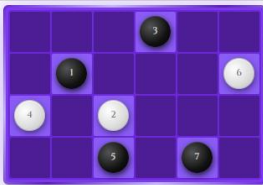
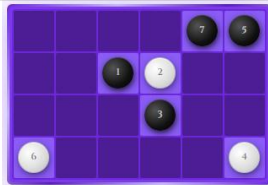
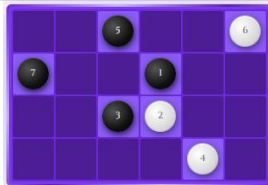
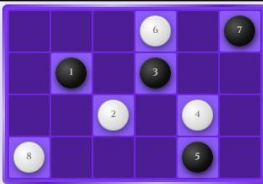
2. $m \times n$ 長方形棋盤(其中 $m \neq n$)

(1) 偶 $\times$ 偶方形棋盤：以 2×4 長方形棋盤及 4×6 長方形棋盤作為討論。

(i) 2×4

								
回合	一	二	回合	一	二	回合	一	二
先手	(1,1)	(2,4)	先手	(1,1)	(1,2)	先手	(1,1)	(1,4)
後手	(1,3)		後手	(2,1)	(2,3)	後手	(2,2)	(2,3)
結果	先手勝		結果	後手勝，必勝下法		結果	後手勝，必勝下法	

(ii) 4×6

														
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	四
先手	(2,2)	(1,4)	(4,3)	(4,5)	先手	(2,3)	(3,4)	(1,6)	(1,5)	先手	(2,4)	(3,3)	(1,3)	(2,1)
後手	(3,3)	(3,1)	(2,6)		後手	(2,4)	(4,6)	(4,1)		後手	(3,4)	(4,5)	(1,6)	
結果	先手勝				結果	先手勝				結果	先手勝			
														
回合	一	二	三	四										
先手	(2,2)	(2,4)	(4,5)	(1,6)										
後手	(3,3)	(3,5)	(1,4)	(4,1)										
結果	後手勝，必勝下法													

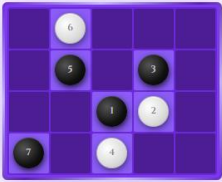
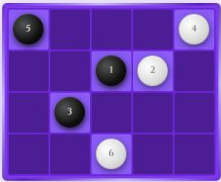
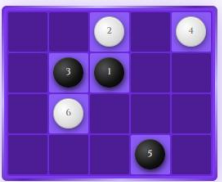
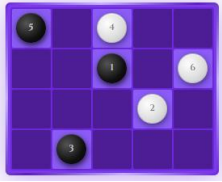
(2) 偶 $\times$ 奇長方形棋盤：以 2×3 長方形棋盤及 4×5 長方形棋盤作為討論。

(i) 2×3

								
回合	一	二	回合	一	二	回合	一	二

先手	(1,1)	(1,3)	先手	(2,2)	(2,1)	先手	(1,1)	(2,3)
後手	(2,2)		後手	(1,3)		後手	(1,2)	
結果	先手勝		結果	先手勝		結果	先手勝	
								
回合	一	二						
先手	(1,2)	(1,3)						
後手	(2,2)	(2,1)						
結果	後手勝，必勝下法							

(ii) 4 × 5

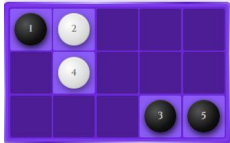
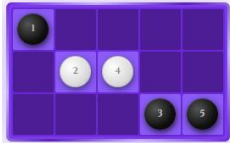
													
回合	一	二	三	四	回合	一	二	三	回合	一	二	三	
先手	(3,3)	(2,4)	(2,2)	(4,1)	先手	(2,3)	(3,2)	(1,1)	先手	(2,3)	(2,2)	(4,4)	
後手	(3,4)	(4,3)	(1,2)		後手	(2,4)	(1,5)	(4,3)	後手	(1,3)	(1,5)	(3,2)	
結果	先手勝				結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法			
													
回合	一	二	三										
先手	(2,3)	(4,2)	(1,1)										
後手	(3,4)	(1,3)	(2,5)										
結果	後手勝，必勝下法												

(3) 奇 × 偶長方形棋盤：棋盤經旋轉後為偶 × 奇長方形棋盤，故不重複討論。。

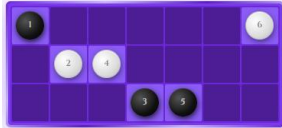
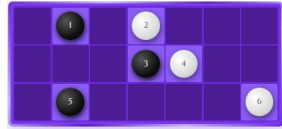
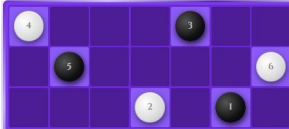
(4) 奇 × 奇方形棋盤：以 3 × 5 長方形棋盤及 3 × 7 長方形棋盤作為討論。

(i) 3 × 5

回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三

先手	(1,3)	(2,2)	(3,5)	先手	(1,1)	(3,2)	(3,5)	先手	(2,2)	(1,3)	(3,5)
後手	(1,4)	(3,4)	(2,1)	後手	(2,1)	(1,3)		後手	(2,3)	(1,1)	(3,4)
結果	後手勝			結果	先手勝			結果	後手勝		
											
回合	一	二	三	回合	一	二	三				
先手	(1,1)	(3,4)	(3,5)	先手	(1,1)	(3,4)	(3,5)				
後手	(1,2)	(2,2)		後手	(2,2)	(2,3)					
結果	先手勝，必勝下法			結果	先手勝，必勝下法						

(ii) 3×7

											
回合	一	二	三	回合	一	二	三	回合	一	二	三
先手	(1,1)	(3,4)	(3,5)	先手	(1,1)	(2,3)	(3,5)	先手	(1,1)	(2,3)	(1,7)
後手	(2,2)	(2,3)	(1,7)	後手	(1,2)	(2,4)	(3,6)	後手	(2,1)	(3,5)	(3,4)
結果	先手勝			結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法		
											
回合	一	二	三	回合	一	二	三				
先手	(1,2)	(2,4)	(3,2)	先手	(3,6)	(1,5)	(2,2)				
後手	(1,4)	(2,5)	(3,7)	後手	(3,4)	(1,1)	(2,7)				
結果	後手勝，必勝下法			結果	後手勝，必勝下法						

肆、研究結果

一、棋盤 I

(一) $n \times n$ 正方形棋盤：

1、偶 $\times$ 偶棋盤，後手必勝，致勝策略有二

策略	致勝步驟	步驟對應說明
策略一	Step1：第一回合先手下 (a, b) 。	

	Step2：第一回合後手下(c, d)，$c \neq a$ 且 $d \neq b$。 Step3：其餘回合分為以下兩種情況 (i)先手若下前面任一子同行(列)，後手亦下其同行(列)。 (ii)先手若下前面任一子不同行且不同列，後手亦下與前面任一子都不同行且不同列。	兩種情況下，剩餘行列均為偶數行或偶數列，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。
策略二	Step1：先手下(a, b)。 Step2：後手均採點對稱回應，即後手下在(a, b)的對稱點 $(n+1-a, n+1-b)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

2、奇 × 奇棋盤，先手必勝，致勝策略有二

策略	致勝步驟	步驟對應說明
策略一	Step1：第一回合先手下(a, b)。 Step2：其餘回合分為以下兩種情況 (i)後手若下前面任一子同行(列)，先手亦下其同行(列)。 (ii)後手若下前面任一子不同行且不同列，先手亦下與前面任一子都不同行且不同列。	兩種情況下，剩餘行列均為偶數行或偶數列，照後手、先手順序消耗，則先手必勝。
策略二	Step1：先手下正中心格$\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$。 Step2：後手下$(a, b)$，先手均採點對稱回應，即先手下在$(a, b)$的對稱點 $(n+1-a, n+1-b)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照後手、先手順序消耗，則先手必勝。

(二) $m \times n$ 長方形棋盤(其中 $m \neq n$)

1、偶 × 偶棋盤，後手必勝，致勝策略有二

策略	致勝步驟	步驟對應說明
策略一	Step1：第一回合先手下(a, b)。 Step2：第一回合後手下(c, d)，$c \neq a$ 且 $d \neq b$。	

	Step3：其餘回合分為以下兩種情況 (i)先手若下前面任一子同行(列)，後手亦下其同行(列)。 (ii)先手若下前面任一子不同行且不同列，後手亦下與前面任一子都不同行且不同列。	兩種情況下，剩餘行列均為偶數行或偶數列，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。
策略二	Step1：先手下(a, b)。 Step2：後手均採點對稱回應，即後手下在(a, b)的對稱點 $(m+1-a, n+1-b)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

2、偶 × 奇棋盤，後手必勝，致勝策略如下

策略	致勝步驟	步驟對應說明
策略	Step1：第一回合先手下(a, b)。 Step2：第一回合後手下(c, b)，$c \neq a$。 Step3：其餘回合分為以下兩種情況 (i)先手若下前面任一子同行(列)，後手亦下其同行(列)。 (ii)先手若下前面任一子不同行且不同列，後手亦下與前面任一子都不同行且不同列。	兩種情況下，剩餘行列均為偶數行或偶數列，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

3、奇 × 偶長方形棋盤：棋盤經旋轉後為偶 × 奇長方形棋盤，故不重複討論。

4、奇 × 奇長方形棋盤：先手必勝，致勝策略有二

策略	致勝步驟	步驟對應說明
策略一	Step1：第一回合先手下(a, b)。 Step2：其餘回合分為以下兩種情況 (i)後手若下前面任一子同行(列)，先手亦下其同行(列)。 (ii)後手若下前面任一子不同行且不同列，先手亦下與前面任一子都不同行且不同列。	兩種情況下，剩餘行列均為偶數行或偶數列，照後手、先手順序消耗，則先手必勝。
策略二	Step1：先手下正中心格$\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$。 Step2：後手下$(a, b)$，先手均採點對稱回應，即先	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照後手、先手順序

	手下在 (a, b) 的對稱點 $(m+1-a, n+1-b)$ 。	消耗，則先手必勝。
--	--------------------------------------	-----------

二、棋盤 II

(一) $n \times n$ 正方形棋盤：

1、偶 $\times$ 偶棋盤，後手必勝，致勝策略如下

策略	致勝步驟	步驟對應說明
策略	Step1：先手下(a, b)。 Step2：後手採點對稱下在$(n+1-a, n+1-b)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

2、奇 $\times$ 奇棋盤，後手必勝，致勝策略分兩種討論

(1)

回合	致勝步驟		步驟對應說明
一	Step1：先手下正中心格$\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$。 Step2：後手下$(a, b)$，$a = \frac{n+1}{2}$ 或 $b = \frac{n+1}{2}$。		
二	情況一	Step3：先手下(c, d)，當 $a = \frac{n+1}{2}$ 時， $d = \frac{n+1}{2}$；當 $b = \frac{n+1}{2}$ 時，$c = \frac{n+1}{2}$ Step4：後手採點對稱下在$(n+1-a, n+1-d)$。	此時 (a, d) 為禁區，所以後手下在 (a, d) 的對稱點，即為 $(m+1-a, n+1-d)$ ，此時棋盤所剩可下區域為點對稱圖形。
	情況二	Step3：先手下(c, d)，$c \neq \frac{n+1}{2}$ 且 $d \neq \frac{n+1}{2}$ Step4：後手採點對稱下在$(n+1-c, n+1-d)$。 (若此格為禁區，就下第 $n+1-d$ 行上任一格)	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。
三	情況一	Step5：先手下(e, f)。 Step6：後手採點對稱下在$(n+1-e, n+1-f)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

(2)

回合	致勝步驟	步驟對應說明
----	------	--------

一	Step1：先手下(a, b)，$a \neq \frac{n+1}{2}$ 或 $b \neq \frac{n+1}{2}$。 Step2：第一回合後手下(c, d)，$c=a$ 或 $d=b$。	此時造成一行(列)為禁區，剩偶數行(列)。
二	最後一回合前的其餘回合分為以下兩種情況 (i)先手若下前一子同行(列)，後手下與前一子不同行且不同列。 (ii)先手若下前一子不同行且不同列，後手下與前一子同行(列)。	

(二) $m \times n$ 長方形棋盤(其中 $m \neq n$)

1、偶 $\times$ 偶棋盤，後手必勝，致勝策略如下

策略	致勝步驟	步驟對應說明
策略	Step1：先手下(a, b)。 Step2：後手採點對稱下在$(m+1-a, n+1-b)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

2、偶 $\times$ 奇棋盤，後手必勝，致勝策略分兩種討論

(1)

回合	致勝步驟	步驟對應說明
一	Step1：先手下(a, b)，$b \neq \frac{n+1}{2}$。 Step2：後手採點對稱下在$(m+1-a, n+1-b)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

(2)

回合	致勝步驟	步驟對應說明
一	Step1：先手下(a, b)，$b \neq \frac{n+1}{2}$。 Step2：第一回合後手下(c, b)，$c \neq a$。	此時造成一行為禁區，剩偶數行。
二	最後一回合前的其餘回合分為以下兩種情況 (i)先手若下前一子同行(列)，後手下與前一子不同行且不同列。 (ii)先手若下前一子不同行且不同列，後手下與前一子同行(列)。	

3、奇×偶長方形棋盤：棋盤經旋轉後為偶×奇長方形棋盤，故不重複討論。

4、奇×奇長方形棋盤：後手必勝，致勝策略分兩種討論

(1)

回合	致勝步驟		步驟對應說明
一	Step1：先手下正中心格$\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$。 Step2：後手下$(a, b)$，$a = \frac{m+1}{2}$或$b = \frac{n+1}{2}$。		後手不下中心行或中心列以外之格是因為先手會採取點對稱下法打敗後手。
二	情況一	Step3：先手下(c, d)，當$a = \frac{m+1}{2}$時，$d = \frac{n+1}{2}$；當$b = \frac{n+1}{2}$時，$c = \frac{m+1}{2}$ Step4：後手採點對稱下在$(m+1-a, n+1-d)$	此時 (a, d) 為禁區，所以後手下在 (a, d) 的對稱點，即為 $(m+1-a, n+1-d)$ ，此時棋盤所剩可下區域為點對稱圖形。
	情況二	Step3：先手下(c, d)，$c \neq \frac{m+1}{2}$且$d \neq \frac{n+1}{2}$ Step4：最後一回合前的其餘回合分為以下兩種情況 (i)先手若下前一子同行(列)，後手下與前一子不同行且不同列。 (ii)先手若下前一子不同行且不同列，後手下與前一子同行(列)。	

回合	致勝步驟	步驟對應說明
一	Step1：先手下(a, b)，$a \neq \frac{n+1}{2}$或$b \neq \frac{n+1}{2}$。 Step2：第一回合後手下(c, d)，$c=a$或$d=b$。	此時造成一行(列)為禁區，剩偶數行(列)。
二	最後一回合前的其餘回合分為以下兩種情況 (i)先手若下前一子同行(列)，後手下前一子不同行且不同列。 (ii)先手若下前一子不同行且不同列，後手下與前一子同	

	行(列)。	
--	-------	--

三、棋盤 III

(一) $n \times n$ 正方形棋盤

1、偶 $\times$ 偶棋盤，後手必勝，致勝策略如下

策略	致勝步驟	步驟對應說明
策略	Step1 ：先手下 (a, b) 。 Step2 ：後手採點對稱下在 $(n+1-a, n+1-b)$ 。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

2、 $n \times n$ 正方形棋盤 (n 為奇數)

(1) $n=3$ ，後手必勝，致勝策略如下

回合	致勝步驟	步驟對應說明
一	Step1 ：先手下正中心格 $(2,2)$ 。 Step2 ：後手下 4 個角落任一格。	
二	僅剩兩步，後手必勝。	

(2) $n=5$ ，先手必勝，致勝策略如下

回合	致勝步驟			步驟對應說明
一	Step1 ：先手下正中心格 $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ 。			
	Step2	情況一	後手下對角線上任一格，分為以下兩種： (i)後手下 $(1,1)$ ，先手下 $(2,4)$ 。 (ii)後手下 $(2,2)$ ，先手下 $(1,5)$ 。	對角線上其餘坐標因棋盤經旋轉後亦相同，故不重複討論。
		情況二	後手下非對角線上任一格，分為以下兩種： (i)後手下中心行(列)，先手亦下中心行(列)與後手線對稱於對角線之格。	

			(ii)後手下非中心行(列)，先手皆以點對稱下法回應。	
			Step4：後手若下對角線上任一格，先手下另一對角線回應。	

四、棋盤 IV

(一) $n \times n$ 正方形棋盤：

1、偶 $\times$ 偶棋盤，後手必勝，致勝策略如下

策略	致勝步驟		步驟對應說明
策略	Step1：先手下 (a, b) 。	Step2：後手採點對稱下在 $(n+1-a, n+1-b)$ 。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

2、 $n \times n$ 正方形棋盤 (n 為奇數)

(1) $n=3$ ，後手必勝，致勝策略如下

回合	致勝步驟		步驟對應說明
一	Step1：先手下正中心格 $(2,2)$ 。	Step2：後手下 4 個角落任一格。	
二	僅剩兩步，後手必勝。		

(2) $n=5$ ，先手必勝，致勝策略如下

回合	致勝步驟			步驟對應說明
一	Step1：先手下正中心格 $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ 。			
	Step2	情況一	後手下對角線上任一格，分為以下兩種： (i)後手下 $(1,1)$ ，先手下 $(2,4)$ 。 (ii)後手下 $(2,2)$ ，先手下 $(1,5)$ 。	對角線上其餘坐標因棋盤經旋轉後亦相同，故不重複討論。

		情況二	後手下非對角線上任一格，分為以下兩種： (i)後手下中心行(列)，先手亦下中心行(列)與後手線對稱於對角線之格。 (ii)後手下非中心行(列)，先手皆以點對稱下法回應。 Step4：後手若下對角線上任一格，先手下另一對角線回應。	
--	--	-----	--	--

(二) $m \times n$ 長方形棋盤(其中 $m \neq n$)

1、偶 $\times$ 偶棋盤，後手必勝，致勝策略如下

策略	致勝步驟	步驟對應說明
策略	Step1：先手下(a, b)。 Step2：後手採點對稱下在$(m+1-a, n+1-b)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

2、偶 $\times$ 奇棋盤，後手必勝，致勝策略分兩種討論

(1)

回合	致勝步驟	步驟對應說明
一	Step1：先手下(a, b)，$b = \frac{n+1}{2}$。 Step2：後手採點對稱下在$(m+1-a, n+1-b)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

(2)

回合	致勝步驟	步驟對應說明
一	Step1：先手下(a, b)，$b \neq \frac{n+1}{2}$。 Step2：後手採點對稱下在$(m+1-a, n+1-b)$。	剩餘格為偶數，皆可依點對稱兩兩配對，照先手、後手順序消耗，則後手必勝。
二	若其餘回合後手無法採點對稱回應，則分為	

	以下兩種情況 (i)先手若下前面任一子同行(列)，後手下前面任一子同行(列)。 (ii)先手若下前面任一子不同行且不同列，後手下與前面任一子不同行且不同列。	
--	--	--

3、奇 $\times$ 偶長方形棋盤：棋盤經旋轉後為偶 $\times$ 奇長方形棋盤，故不重複討論。

4、奇 $\times$ 奇長方形棋盤：先手必勝，致勝策略如下

(1) 3×5 ，先手必勝，致勝策略如下

回合	致勝步驟	步驟對應說明
一	Step1 ：先手必下(1,1)。 Step2 ：後手下其餘任一格。	先手第一步下四個角落皆可，因棋盤經旋轉後亦相同，故不重複討論。
二	Step3 ：先手必下與前兩子不同行列。	剩餘兩步，照後手、先手順序消耗，則先手必勝。

(2) $3 \times n$ ($n \geq 7$ 的奇數)，後手必勝，致勝策略如下

回合	致勝步驟	步驟對應說明
一	Step1 ：先手下(a, b)。 Step2 ：後手採下同列回應，下在(a, c)， $c \neq b$ 。	每列照先手、後手順序消耗，則後手必勝。

伍、討論

我們在討論過程中發現有以下情況未討論出必勝策略：

1. 棋盤 III， $n \times n$ 正方形棋盤中， $n \geq 7$ 。
2. 棋盤 IV， $n \times n$ 正方形棋盤中， $n \geq 7$ 。
3. 棋盤 IV， $m \times n$ 長方形棋盤之奇 $\times$ 奇棋盤中， $m \geq 5$ 。

希望在未來可以想出解決克服之方法。

陸、結論

我們將四種棋盤有討論出的必勝方綜合整理如下：

總格數 棋盤	$n \times n$ 正方形棋盤		$m \times n$ 長方形棋盤(其中 $m \neq n$)		
	偶 $\times$ 偶	奇 $\times$ 奇	偶 $\times$ 偶	偶 $\times$ 奇	奇 $\times$ 奇
	偶數	奇數	偶數	偶數	奇數
I	後手	先手	後手	後手	先手
II	後手	後手	後手	後手	後手
III	後手	3×3 後手 5×5 先手			
IV	後手	3×3 後手 5×5 先手			
			後手	後手	3×5 先手 $3 \times n (n \geq 7)$ 後手

由以上整體討論，我們發現，在 $m \times n$ 的長方形棋盤中，這是一個關於列與行消耗的競賽。當所有的 m 個列都被佔用，且所有的 n 個行也被佔用時，遊戲必然結束。

- 最短步數： $\max(m, n)$ 步。第 1 步下完，只要之後每一步都下與前面任一子「不同行」且「不同列」，直到填滿較長的那一邊(行數或列數)，遊戲就會結束。
- 最長步數： $m+n-1$ 步。第 1 步下完，若之後每一步都下與前面任一子「同行」或「同列」，遊戲就會結束。

柒、參考資料及文獻

一、游森棚(2025 年 2 月)。特約專欄〈森棚教官數學題——棋逢敵手〉。國立台灣科學教育館：科學研習雙月刊第 64 卷第 1 期。

取自：<https://www.ntsec.gov.tw/article/detail.aspx?a=5692>

二、翰林 (2026)：國中數學課本第 2 冊(頁 54~58「直角坐標平面」、頁 212~217「線對稱」)。台南：翰林。