

屏東縣第66屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：「三段變速之豬羊變色」的數學模型

關 鍵 詞：矩陣、同餘、數學歸納法

編號：B1018

目錄

摘要.....	P_2
壹、前言（含研究動機、目的、文獻回顧）.....	P_2
貳、研究設備及器材.....	P_2
參、研究過程或方法.....	P_3
一、探討「三段變速之豬羊變色」所提的 3×3 、 4×4 、 5×5 的遊戲結果。	P_3
二、基於一之探討結果，推論「 $M \times N$ 棋盤有解」的數學模型。	P_9
肆、研究結果.....	P_{11}
伍、討論.....	P_{11}
陸、結論.....	P_{12}
柒、參考資料及其他.....	P_{12}

「三段變速之豬羊變色」的數學模型

摘要

在找尋科展題目之際，偶然發現游森棚教授所刊登在科學研習月刊的文章。三段變速之豬羊變色一文提及，透過給定的遊戲規則，在玩家點選 2×2 的田字形的有限次數下，使得西洋棋盤最終的顏色與一開始的顏色剛好互換，進而將情況從 3×3 、 4×4 、 5×5 的遊戲推廣至 $M \times N$ 的遊戲。

最終，根據一步一步的推論，順利的完成「透過給定的遊戲規則，在玩家點選 2×2 的田字形的有限次數下，使得西洋棋盤最終的顏色與一開始的顏色剛好互換」之三段變速之豬羊變色的通用數學模型。

壹、前言

游森棚教授所刊登在科學研習月刊的文章，「三段變速之豬羊變色」中曾寫道：

小佟正在電腦玩小遊戲，這個遊戲是這樣玩的：一開始螢幕有一個 $n \times n$ 的棋盤，格子用黑色與白色塗成西洋棋盤的樣式，其中左上角那一格是黑色。

每一次玩家可以用滑鼠選一個 2×2 的田字形，然後按下滑鼠，被選中的田字形中的格子

- 1.如果是白色，就會變成灰色。
- 2.如果是灰色，就會變成黑色。
- 3.如果是黑色，就會變成白色。

遊戲的目的是讓棋盤一樣用黑白兩色塗成西洋棋盤的樣式，但是左上角那一格是白色(也就是說與一開始的顏色剛好互換)，請你幫幫小佟完成 3×3 、 4×4 、 5×5 的遊戲。

看似簡單的點選遊戲，卻能夠在一些步驟後，找到能夠完任務的棋盤模組方式。這樣簡單、純粹的美吸引著我們想要一窺其中奧秘。在一次的課堂討論中，開啟了與我們接下來想要研究的主題：討論三段變速之豬羊變色的數學模組的一段緣分，進而從 3×3 、 4×4 、 5×5 的示例中，找尋線索與接續探索關鍵因素。

當我們嘗試上述題目後，大家對於答案充滿了好奇，並發想出若干進一步探索的想法。經與老師共同討論後，期望本研究能順利達成下列目的。

- 一、探討「三段變速之豬羊變色」所提的 3×3 、 4×4 、 5×5 的遊戲結果。
- 二、基於一之探討結果，推論「 $M \times N$ 棋盤有解」的數學模型。

貳、研究設備及器材

筆、紙、電腦。

參、研究過程或方法

運用題目所提供示例、窮舉證法和系統歸納相關示例結果，進而尋找各變項之間相互依賴關係，觀察其規律，形成猜測，更進一步驗證猜測之可行性，並藉由國中數學課程所學，將猜測進行推論並期待以代數化完備通用的數學形式。

一、探討「三段變速之豬羊變色」所提的 3×3 、 4×4 、 5×5 的遊戲結果。

為方便往後討論與觀察，我們將棋盤的位置和顏色(黑、白)、過程中變化的顏色(灰)及操作影響，進行編碼及定義：

一、**顏色編碼及棋盤初始狀態、目標狀態**：將棋盤顏色轉變過程中呈現的顏色進行編碼，白色為0、灰色為1、黑色為2。以 3×3 棋盤的初始狀態、目標狀態為例，如下所示：

初始狀態			→	目標狀態		
2	0	2		0	2	0
0	2	0		2	0	2
2	0	2		0	2	0

二、轉變過程、轉變次數及原始矩陣：

各顏色轉變過程及轉變次數：

1. 白色 0 → 灰色 1 → 黑色 2，白色 $\xrightarrow{d_{ij}=2}$ 黑色，過程中的轉換次數為 $d_{ij}=2$ 。

2. 黑色 2 → 白色 0，黑色 $\xrightarrow{d_{ij}=1}$ 白色，過程中的轉換次數為 $d_{ij}=1$ 。

以 3×3 棋盤為例的轉換需求次數，如下所示：

1	2	1
2	1	2
1	2	1

觀察上述轉換過程，可知每點擊 2×2 田字型一次，區域內的格子狀態就會「+1」。

而轉換過程的三種顏色對應編碼及轉換次數呈現週期循環，進一步觀察其數字變化，發現其為以 3 為模數的同餘系統(mod 3)，發現因此接下來的討論是在 mod 3 的情況下進行：

$$0 \text{ 白色(初始狀態)} + 2 (d_{ij} \text{ 轉換次數}) \equiv 2 \text{ 黑色(目標狀態)} \pmod{3}$$

2 黑色(初始狀態) + 1 (d_{ij} 轉換次數) $\equiv$ 0 白色(目標狀態) (mod 3)

以 3×3 棋盤為例， C_{ij} 代表第 i 行、第 j 列所在位置的原始矩陣，如下所示：

C_{11}	C_{21}	C_{31}
C_{12}	C_{22}	C_{32}
C_{13}	C_{23}	C_{33}

原始矩陣

$$O_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

三、初始矩陣、目標矩陣及差值矩陣：

初始矩陣

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

目標矩陣

$$G_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

需求差值矩陣

$$D_{3 \times 3} = G_{3 \times 3} - I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

在 $G_{3 \times 3} - I_{3 \times 3}$ 中，以 C_{11} 為例， $0-2 = -2 \equiv 1 \pmod{3}$ (需要點 1 次)

以 C_{21} 為例， $2-0 = 2 \equiv 2 \pmod{3}$ (需要點 2 次)

x_{ij} 為「左上角位於 (i,j) 的那個 2×2 田字型」被點擊的次數。然點擊順序不影響

結果(滿足交換律)，即 $x_{11} + x_{21} = x_{21} + x_{11} \equiv 2 \pmod{3}$ 。故只需在意每個 2×2 區域「被

點擊次數」。在 3×3 棋盤中，操作影響為 x_{11} 、 x_{21} 、 x_{12} 、 x_{22} ， x_{ij} 為整數且 $0 \leq x_{ij} \leq 2$ ，

$i, j \in \{1, 2\}$ 。

	X₁₁	X₂₁	
C_{11}	C_{21}	C_{31}	
C_{12}	C_{22}	C_{32}	
C_{13}	C_{23}	C_{33}	

對照需求矩陣 D 中的方格與操作影響 x_{ij} ，可列出以下 9 條方程式：

位在角落：

C_{11} (1,1) 所受影響 $x_{11} \equiv 1 \pmod{3}$

C_{13} (1,3) 所受影響 $x_{12} \equiv 1 \pmod{3}$

C_{31} (3,1) 所受影響 $x_{21} \equiv 1 \pmod{3}$

C_{33} (3,3) 所受影響 $x_{22} \equiv 1 \pmod{3}$

位在邊緣：

C_{21} (2,1) 所受影響 $x_{11} + x_{21} \equiv 2 \pmod{3}$ C_{12} (1,2) 所受影響 $x_{11} + x_{12} \equiv 2 \pmod{3}$

C_{32} (3,2) 所受影響 $x_{21} + x_{22} \equiv 2 \pmod{3}$ C_{23} (2,3) 所受影響 $x_{12} + x_{22} \equiv 2 \pmod{3}$

位在中央: C_{22} (2,2) 所受影響 $x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} = 4 \equiv 1 \pmod{3}$

經過逐項確認，需求差值矩陣 **D** 的數值與上述方程式完全吻合，即表示 3×3 棋盤可以透過田字型的操作使得後來棋盤的顏色與一開始的顏色剛好互換，因此 3×3 棋盤有唯一解，就是將左上、右上、左下、右下四個 2×2 的田字型區域，各點擊 1 次。

x_{ij} 為「左上角位於 (i,j) 的那個 2×2 田字型」被點擊的次數。在 4×4、5×5 棋盤中，操作影響為 x_{ij} 、 x_{hk} ， x_{ij} 、 x_{hk} 為整數且 $0 \leq x_{ij}, x_{hk} \leq 2, i, j \in \{1,2,3\}, h, k \in \{1,2,3,4\}$ 。

X_{11}	X_{21}	X_{31}	
C_{11}	C_{21}	C_{31}	C_{41}
C_{12}	C_{22}	C_{32}	C_{42}
C_{13}	C_{23}	C_{33}	C_{43}
C_{14}	C_{24}	C_{34}	C_{44}

X_{11}	X_{21}	X_{31}	X_{41}	
C_{11}	C_{21}	C_{31}	C_{41}	C_{51}
C_{12}	C_{22}	C_{32}	C_{42}	C_{52}
C_{13}	C_{23}	C_{33}	C_{43}	C_{53}
C_{14}	C_{24}	C_{34}	C_{44}	C_{54}
C_{15}	C_{25}	C_{35}	C_{45}	C_{55}

接下來，4×4及5×5棋盤的相關討論如下：

4×4棋盤

初始矩陣

$$I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

目標矩陣

$$G_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4×4棋盤

5×5棋盤

初始矩陣

$$I_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

目標矩陣

$$G_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

5×5棋盤

需求差值矩陣

$$D_{4 \times 4} = G_{4 \times 4} - I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

需求差值矩陣

$$D_{5 \times 5} = G_{5 \times 5} - I_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

對照需求矩陣 D 中的方格與操作影響 x_{ij} ，可列出以下各 16 及 25 條方程式：

位在角落 4×4棋盤 (mod 3)

$$C_{11} (1,1) \text{ 所受影響 } x_{11} \equiv 1$$

$$C_{41} (4,1) \text{ 所受影響 } x_{31} \equiv 2$$

$$C_{14} (1,4) \text{ 所受影響 } x_{13} \equiv 2$$

$$C_{44} (4,4) \text{ 所受影響 } x_{33} \equiv 1$$

5×5棋盤 (mod 3)

$$C_{11} (1,1) \text{ 所受影響 } x_{11} \equiv 1$$

$$C_{51} (3,1) \text{ 所受影響 } x_{41} \equiv 1$$

$$C_{15} (1,3) \text{ 所受影響 } x_{14} \equiv 1$$

$$C_{55} (3,3) \text{ 所受影響 } x_{44} \equiv 1$$

位在邊緣4×4棋盤 (mod 3)	5×5棋盤 (mod 3)	
$C_{21}(2,1)$ 所受影響 $x_{11} + x_{21} \equiv 2$	$C_{21}(2,1)$ 所受影響 $x_{11} + x_{21} \equiv 2$	$C_{12}(1,2)$ 所受影響 $x_{11} + x_{12} \equiv 2$
$C_{31}(3,1)$ 所受影響 $x_{21} + x_{31} \not\equiv 1$	$C_{31}(3,1)$ 所受影響 $x_{21} + x_{31} \equiv 1$	$C_{13}(1,3)$ 所受影響 $x_{12} + x_{13} \equiv 1$
$C_{12}(1,2)$ 所受影響 $x_{11} + x_{12} \equiv 2$	$C_{41}(4,1)$ 所受影響 $x_{31} + x_{41} \not\equiv 2$	$C_{14}(1,4)$ 所受影響 $x_{13} + x_{14} \not\equiv 2$
$C_{13}(1,3)$ 所受影響 $x_{12} + x_{13} \not\equiv 1$	$C_{25}(2,5)$ 所受影響 $x_{14} + x_{24} \equiv 2$	$C_{52}(5,2)$ 所受影響 $x_{41} + x_{51} \equiv 2$
$C_{42}(4,2)$ 所受影響 $x_{31} + x_{32} \equiv 1$	$C_{35}(3,5)$ 所受影響 $x_{24} + x_{34} \equiv 1$	$C_{53}(5,3)$ 所受影響 $x_{42} + x_{52} \equiv 1$
$C_{43}(4,3)$ 所受影響 $x_{42} + x_{43} \not\equiv 2$	$C_{45}(4,5)$ 所受影響 $x_{34} + x_{44} \not\equiv 2$	$C_{54}(5,4)$ 所受影響 $x_{43} + x_{53} \not\equiv 2$
$C_{24}(2,4)$ 所受影響 $x_{13} + x_{23} \equiv 1$		
$C_{34}(3,4)$ 所受影響 $x_{23} + x_{33} \not\equiv 2$		

位在中央

4×4棋盤 (mod 3)

5×5棋盤 (mod 3)

$$C_{22}(2,2) \text{ 所受影響 } x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} = 4 \equiv 1 \quad C_{22}(2,2) \text{ 所受影響 } x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} = 4 \equiv 1$$

$$C_{32}(3,2) \text{ 所受影響 } x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32} = 6 \not\equiv 2 \quad C_{32}(3,2) \text{ 所受影響 } x_{21} + x_{31} + x_{22} + x_{32} = 2 \equiv 2$$

$$C_{23}(2,3) \text{ 所受影響 } x_{12} + x_{22} + x_{13} + x_{23} = 6 \not\equiv 2 \quad C_{42}(4,2) \text{ 所受影響 } x_{31} + x_{41} + x_{32} + x_{42} = 2 \not\equiv 1$$

$$C_{33}(3,3) \text{ 所受影響 } x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} = 6 \not\equiv 1 \quad C_{23}(2,3) \text{ 所受影響 } x_{12} + x_{22} + x_{13} + x_{23} = 2 \equiv 2$$

$$C_{33}(3,3) \text{ 所受影響 } x_{22} + x_{32} + x_{23} + x_{33} = 1 \equiv 1$$

$$C_{43}(4,3) \text{ 所受影響 } x_{32} + x_{42} + x_{33} + x_{43} = 1 \not\equiv 2$$

$$C_{24}(2,4) \text{ 所受影響 } x_{13} + x_{23} + x_{14} + x_{24} = 2 \not\equiv 1$$

$$C_{34}(3,4) \text{ 所受影響 } x_{23} + x_{33} + x_{24} + x_{34} = 1 \not\equiv 2$$

$$C_{44}(4,4) \text{ 所受影響 } x_{33} + x_{43} + x_{34} + x_{44} = 1 \equiv 1$$

經過逐項確認，4×4、5×5 需求差值矩陣 **D** 的數值與上述方程式並不吻合，即表示 4×4、5×5 棋盤無法透過田字型的操作使得後來棋盤的顏色與一開始的顏色剛好互換，因此 4×4、5×5 棋盤無解。觀察 3×3、4×4、5×5 棋盤的需求差值矩陣 **D**，第一列加總在 mod 3 有以下的特性：

3×3棋盤	4×4棋盤	5×5棋盤
$D_{3 \times 3}$ $= G_{3 \times 3} - I_{3 \times 3}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$D_{4 \times 4}$ $= G_{4 \times 4} - I_{4 \times 4}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$D_{5 \times 5}$ $= G_{5 \times 5} - I_{5 \times 5}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
唯一解	無解	無解
$1+(-2)+1=0 \equiv 0$	$1+(-2)+1+(-2)=-2 \equiv 1$	$1+(-2)+1+(-2)+1=-1 \equiv 2$

6×6棋盤

$$D_{6 \times 6} = G_{6 \times 6} - I_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

位在角落 6×6 棋盤 (mod 3)

C_{11} (1,1) 所受影響 $x_{11} \equiv 1$

C_{15} (1,5) 所受影響 $x_{15} \equiv 2$

C_{51} (5,1) 所受影響 $x_{51} \equiv 2$

C_{55} (5,5) 所受影響 $x_{55} \equiv 1$

位在邊緣 6×6 棋盤 (mod 3)	
C_{21} (2,1)所受影響 $x_{11} + x_{21} \equiv 2$	C_{26} (2,6)所受影響 $x_{15} + x_{16} \equiv 1$
C_{31} (3,1)所受影響 $x_{21} + x_{31} \equiv 1$	C_{36} (3,6)所受影響 $x_{25} + x_{26} \equiv 2$
C_{41} (4,1)所受影響 $x_{31} + x_{41} \equiv 2$	C_{46} (4,6)所受影響 $x_{35} + x_{36} \equiv 1$
C_{51} (5,1)所受影響 $x_{41} + x_{51} \equiv 1$	C_{56} (5,6)所受影響 $x_{45} + x_{46} \equiv 2$
C_{12} (1,2)所受影響 $x_{11} + x_{12} \equiv 2$	C_{62} (1,2)所受影響 $x_{51} + x_{52} \equiv 1$
C_{13} (1,3)所受影響 $x_{12} + x_{13} \equiv 1$	C_{63} (1,3)所受影響 $x_{52} + x_{53} \equiv 2$
C_{14} (1,4)所受影響 $x_{13} + x_{14} \equiv 2$	C_{64} (1,4)所受影響 $x_{53} + x_{54} \equiv 1$
C_{15} (1,5)所受影響 $x_{14} + x_{15} \equiv 1$	C_{65} (1,5)所受影響 $x_{54} + x_{55} \equiv 2$
位在中央 6×6 棋盤 (mod 3)	
C_{22} 所受影響 $x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} \equiv 1$	C_{24} 所受影響 $x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} \equiv 1$
C_{32} 所受影響 $x_{21} + x_{31} + x_{22} + x_{32} \equiv 2$	C_{34} 所受影響 $x_{23} + x_{24} + x_{33} + x_{34} \equiv 2$
C_{42} 所受影響 $x_{31} + x_{41} + x_{32} + x_{42} \equiv 1$	C_{44} 所受影響 $x_{33} + x_{34} + x_{43} + x_{44} \equiv 1$
C_{52} 所受影響 $x_{41} + x_{51} + x_{42} + x_{52} \equiv 2$	C_{54} 所受影響 $x_{43} + x_{53} + x_{44} + x_{54} \equiv 2$
C_{23} 所受影響 $x_{12} + x_{13} + x_{22} + x_{23} \equiv 2$	C_{25} 所受影響 $x_{14} + x_{24} + x_{15} + x_{25} \equiv 2$
C_{33} 所受影響 $x_{22} + x_{23} + x_{32} + x_{33} \equiv 1$	C_{35} 所受影響 $x_{24} + x_{34} + x_{25} + x_{35} \equiv 1$
C_{43} 所受影響 $x_{32} + x_{33} + x_{42} + x_{43} \equiv 2$	C_{45} 所受影響 $x_{34} + x_{44} + x_{35} + x_{45} \equiv 2$
C_{53} 所受影響 $x_{42} + x_{52} + x_{43} + x_{53} \equiv 1$	C_{55} 所受影響 $x_{44} + x_{54} + x_{45} + x_{55} \equiv 1$

藉由驗證至6×6 棋盤，接下來藉由以下證明， **$N \times N$ 棋盤有解 $\Leftrightarrow N \equiv 0 \pmod 3$**

二、基於一之探討結果，推論「 $M \times N$ 棋盤有解」的數學模型。

定理一：模 3 可解性定理 (Mod 3 Solvability Theorem)

對於任意 $N \times N$ 的棋盤，本遊戲有解的充要條件為 N 必須是 3 的倍數。

$$N \times N \text{ 棋盤有解} \Leftrightarrow N \equiv 0 \pmod{3}$$

Proof: 一、 $N \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow N \times N$ 棋盤有解

步驟一、根據前面討論，已知 3×3 棋盤的初始矩陣及目標矩陣

初始矩陣	目標矩陣
$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$G_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

需求差值矩陣為：

$$D_{3 \times 3} = G_{3 \times 3} - I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

並已經證明其擁有唯一解：將四個 2×2 的田字型區域，各點擊 1 次（即 $x_{11} = x_{21} = x_{12} = x_{22} = 1$ ）。接下來將上述初始矩陣及目標矩陣互換，得：

初始矩陣	目標矩陣
$I'_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$G'_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

需求差值矩陣

$$D'_{3 \times 3} = G'_{3 \times 3} - I'_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

將四個 2×2 的田字型區域，各點擊 2 次（即 $x_{11} = x_{21} = x_{12} = x_{22} = 2$ ）即符合上述差值需求矩陣 $D'_{3 \times 3}$ 。

步驟二、令 $N = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$)， $N \times N$ 棋盤有解。

步驟三、令 $N' = 3(k+1)$ ($k \in \mathbb{N}$)，證明 $N' \times N'$ 棋盤有解。

$$D_{3(k+1) \times 3(k+1)} = \begin{pmatrix} D_{3k \times 3k} & R_{3k \times 3} \\ C_{3 \times 3k} & E_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

我們將邊長為 $3(k+1)$ 的目標需求差值矩陣 $D_{3(k+1) \times 3(k+1)}$ ，利用分塊矩陣的概念，切割成以下四大部分並進行討論：

$$D_{3(k+1) \times 3(k+1)} = \begin{pmatrix} \boxed{D_{3k \times 3k}} & \begin{matrix} \boxed{R_{3k \times 3_1}} \\ \boxed{R_{3k \times 3_2}} \\ \boxed{R_{3k \times 3_3}} \\ \vdots \\ \boxed{R_{3k \times 3_k}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \boxed{C_{3 \times 3k_1}} & \boxed{C_{3 \times 3k_2}} & \boxed{C_{3 \times 3k_3}} & \cdots & \boxed{C_{3 \times 3k}} \end{matrix} & \boxed{E_{3 \times 3}} \end{pmatrix}$$

(一)左上角 $D_{3k \times 3k}$ 矩陣：

根據步驟二的假設，原本 $N = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$)， $N \times N$ 棋盤的需求差值矩陣，可透過四個 2×2 的田字型區域的操作，必定存在一組操作策略能將其順利轉換，即 $N = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$)， $N \times N$ 棋盤有解。

(二)右側 $R_{3k \times 3}$ 矩陣及下方 $C_{3 \times 3k}$ 矩陣：

可進一步將 $R_{3k \times 3}$ 矩陣分割為 k 個獨立的 3×3 區塊矩陣，第 1 個 3×3 矩陣為 $(R_{3k \times 3})_1$ 、第 2 個 3×3 矩陣為 $(R_{3k \times 3})_2$ 、...、第 k 個 3×3 矩陣為 $(R_{3k \times 3})_k$ ，共 k 個，根據步驟一，上述 k 個獨立的 3×3 區塊矩陣皆有解，故 $R_{3k \times 3}$ 矩陣有解。

同理， $C_{3 \times 3k}$ 矩陣亦可分割為 k 個獨立的 3×3 區塊矩陣，第 1 個 3×3 矩陣為 $(C_{3k \times 3})_1$ 、第 2 個 3×3 矩陣為 $(C_{3k \times 3})_2$ 、...、第 k 個 3×3 矩陣為 $(C_{3k \times 3})_k$ ，共 k 個，根據步驟一，上述 k 個獨立的 3×3 區塊矩陣皆有解，故 $C_{3k \times 3}$ 矩陣有解。

(三)右下角 $E_{3 \times 3}$ ：恰好為 1 個獨立的 3×3 區塊。

根據步驟一，原本 $N = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$)， $N \times N$ 棋盤的需求差值矩陣，可透過四個 2×2 的田字型區域的操作，必定存在一組操作策略能將其順利轉換，即 $N = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$)， $N \times N$ 棋盤有解。

綜合上述(一)、(二)、(三)， $N' = 3(k+1)$ ($k \in \mathbb{N}$)，證明 $N' \times N'$ 棋盤有解。

二、 $N \times N$ 棋盤有解 $\Rightarrow N \equiv 0 \pmod{3}$

$\exists N=3k+1$ 或 $N=3k+2$ ， $N \times N$ 棋盤有解

根據數學歸納法可得到， $\forall N=3k+1$ 或 $N=3k+2$ ， $N \times N$ 棋盤有解。

$$\text{根據 } D_{4 \times 4} = G_{4 \times 4} - I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ 及 } D_{5 \times 5} = G_{5 \times 5} - I_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

結果，可知 4×4 棋盤及 5×5 棋盤無解。 $\rightarrow \leftarrow$

則若 $N \times N$ 棋盤有解 $\Rightarrow N \equiv 0 \pmod{3}$ 。

根據上述一、二、可知， $N \times N$ 棋盤有解 $\Leftrightarrow N \equiv 0 \pmod{3}$

性質一：

對於任意 $M \times N$ 的棋盤，本遊戲有解的充要條件為 N 必須是 3 的倍數。

$M \times N$ 棋盤有解 $\Leftrightarrow M \equiv 0 \pmod{3}$ 且 $N \equiv 0 \pmod{3}$

Proof: 根據定理一， $\exists M \times N$ 棋盤有解， $M=3h$ 、 $N=3k$ ， $h, k \in \mathbb{N}$ ，故無論正方形或長方形棋盤，如棋盤有解，長、寬皆為 3 的倍數。

肆、研究結果

綜觀上述兩個探索活動之主要研究結果，可統整如下：

- 一、經由實作、列表、統整及尋找規律性，發現「三段變速之豬羊變色」所提的 3×3 、 4×4 、 5×5 的遊戲結果。
- 二、基於一之探討結果，推論「 $M \times N$ 棋盤有解」的數學模型。

伍、討論

回顧本研究過程中所使用的研究方法，透過簡化問題、窮舉證法、系統性列表統整有關實作結果、尋求有關變項之間的規律性-形成猜測的解題策略。並且進一步運用代數化推演與論證的過程中，則經常運用了國中數學所學的代數式四則運算、聯立方程式、函數等的方法；此外，我們也將在下列結論中，運用最近所學的函數概念來表達本研究之主要成果。顯然在參與科展的過程中，不僅可體驗探究活動的甘苦與成功樂趣，也從不同面向豐富我們在國中小所學的數學內涵。

陸、結論

以函數觀點表示本研究之主要成果

為了彰顯本研究標題「討論三段變速之豬羊變色的數學模組」之具體意涵，以下將以我們這學期所學的「函數」觀點，來表示本研究之主要成果：

x_{ij} 為「左上角位於 (i,j) 的那個 2×2 田字型」被點擊的次數，需求差值矩陣 $D_{m \times n}$ 、目標矩陣 $G_{m \times n}$ 、初始矩陣 $I_{m \times n}$ 關係如下：

$$D_{m \times n} = f(m, n) = G_{m \times n} - I_{m \times n}$$

$$\sum_{i,j} x_{ij} = g(m, n), 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq i, j \leq n$$

如以下關係成立，則 $M \times N$ 棋盤有解

$$f(m, n) = g(m, n)$$

此時， $M=3h$ 、 $N=3k$ ， $h, k \in \mathbb{N}$ 。

柒、參考資料及其他

1.游森棚（2024年12月）•森棚教官數學題-三段變速之豬羊變色•取自

<https://www.ntsec.gov.tw/article/detail.aspx?a=249>