

屏東縣第66屆國民中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：探討「合作拿卡片」的數學模型

關 鍵 詞：函數、對數、集合

編號：B1019

目錄

摘要.....	P_2
壹、前言（含研究動機、目的、文獻回顧）.....	P_2
貳、研究設備及器材.....	P_2
參、研究過程或方法.....	P_3
一、探索「合作拿卡片」所提的兩種拿卡片方式（如上列）的設計原理。	P_3
二、基於一之探索成果，推演設計「末項為任意正整數 N 之卡片」的數學模型。	P_{12}
肆、研究結果.....	P_{15}
伍、討論.....	P_{15}
陸、結論.....	P_{15}
柒、參考資料及其他.....	P_{16}

探討「合作拿卡片」的數學模型

摘要

在找尋科展題目之際，偶然發現游森棚教授所刊登在科學研習月刊的文章。合作拿卡片一文提及，透過給定的取牌規則，兩人在有限的牌卡中尋找能夠取出最多牌卡的方式，進而將情況從20張牌卡推廣至100張卡片。看似簡單的取牌遊戲，卻能夠在一些步驟後，找到取出最多牌卡的方式。

最終，根據一步一步的推論，順利的完成「從給定的取牌規則中，在牌卡為1~N的編號情況下，所能取走的最多牌卡張數」之合作拿卡片的通用數學模型。

壹、前言

在游森棚教授刊登於科學研習月刊的「合作拿卡片」曾寫道：

有20張卡片上面標著分別是1，2，3，4，...，20。小冠和小誼兩人合作，如果小冠拿了編號為a的卡片，小誼就要拿走編號為 $2a+2$ 的卡片。如果小誼已經沒有卡片可以拿了，遊戲就結束。

- 1.請問兩人合作，最多一共可以拿走多少張卡片？
- 2.如果小誼必須拿走的編號是 $3a-2$ 呢？
- 3.如果小誼可以在 $2a+2$ 和 $3a-2$ 之中選一張拿走呢？
- 4.如果有100張卡片，編號是1，2，3，...，100呢？

這樣簡單、純粹的美吸引著我們想要一窺其中奧秘。在一次的課堂討論中，開啟了與我們接下來想要研究的主題：探討「合作拿卡片」的數學模型的一段緣分，進而從小誼拿走 $2a+2$ 、 $3a-2$ 的牌卡示例中，找尋線索與接續探索其他牌列的關鍵因素。

當我們嘗試討論上述題目後，大家對於答案充滿好奇，並發想出若干進一步探索的想法。經與老師共同討論後，期望本研究能順利達成下列目的。

- 一、探索「合作拿卡片」所提的兩種拿卡片方式（如上列）的設計原理。
- 二、基於一之探索成果，推演設計「末項為任意正整數N之卡片」的數學模型。

貳、研究設備及器材

筆、紙、電腦、牌卡。

參、研究過程或方法

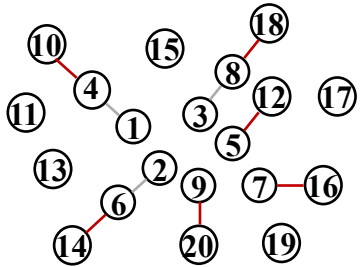
運用題目所提供示例、窮舉證法和系統歸納相關示例結果，進而尋找各變項之間相互依賴關係，觀察其規律，形成猜測，更進一步驗證猜測之可行性，並藉由國中數學課程所學，將猜測進行推論並期待以代數化完備通用的數學形式。

一、探索「合作拿卡片」所提的兩種拿卡片方式（如上列）的設計原理。

【問題一】以小冠拿了編號為 a 的卡片為起點，小誼拿走編號 $2a+2$ 為終點，稱為配對。再以 $2a+2$ 為小冠所拿卡片編號起點， $2(2a+2)+2=4a+6$ 為小誼所拿卡片編號終點，於編號超過 N 時(本題為 $N=20$)，即停止拿卡片。將此一連續拿牌的過程紀錄下來稱之為路徑或鏈，路徑中的卡片張數為點數，最大配對數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$ ，拿牌數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor * 2$ 。如果 $a \leq n < 2a+2$ ，則稱 a 為孤立點，無法進行配對。

項次 \ N=20	起點 Vertex	路徑 Path (或鏈 Chain)	點數 L	最大配對數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$	拿牌數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor * 2$
1	1	1→4→10→22	3	1	2
2	2	2→6→14→30	3	1	2
3	3	3→8→18→38	3	1	2
4	4	4→10→22	2	1	2
5	5	5→12→26	2	1	2
6	6	6→14→30	2	1	2
7	7	7→16→34	2	1	2
8	8	8→18→38	2	1	2
9	9	9→20→42	2	1	2
10	10	10→22	1	0	0
11	11	11→24	1	0	0
12	12	12→26	1	0	0
13	13	13→28	1	0	0
14	14	14→30	1	0	0
15	15	15→32	1	0	0
16	16	16→34	1	0	0
17	17	17→36	1	0	0
18	18	18→38	1	0	0
19	19	19→40	1	0	0
20	20	20→42	1	0	0

由上表所知，所有的數字會形成以下**6條長鏈**與**5個孤立點**：

路徑長度 項次	長度為3的鏈	長度為2的鏈	長度為1(孤立點)的鏈
1	1→4→10→22	5→12→26	11、13、15、17、19
2	2→6→14→30	7→16→34	
3	3→8→18→38	9→20→42	
拿走卡片張數	(長度3)：有3條鏈×每條拿2張=6張 (長度2)：有3條鏈×每條拿2張=6張 (長度1)：有5個孤立點×0張=0張 故兩人合作最多可以拿走12張卡片		

根據取牌規則得知，後一張牌卡編號 a_n 為前一張編號 a_{n-1} 的兩倍加上2，即 $a_n = 2a_{n-1} + 2$ 。左右各加上2， $a_n + 2 = 2(a_{n-1} + 2)$ ，即為首項是 $a_0 + 2$ ，公比為2的等比數列。

而第 k 項 $a_k + 2 = 2(a_{n-1} + 2)$ ， $a_k = 2^k(a_0 + 2) - 2$ ， a_0 為鏈的起點(也稱作**鏈頭**，通常為奇數)、 k 為此鏈的第 k 個數。由於 $2^k(a_0 + 2) - 2 \leq N$ ， $2^k(a_0 + 2) \leq N + 2$ ， $2^k \leq \frac{N+2}{a_0+2}$ ，

$k \leq \log_2 \frac{N+2}{a_0+2}$ 。因此任意數字 h 作為**鏈頭**時，這條鏈在 N 以內所能延伸長度，即為鏈長

$L(h, N)$ ， $k(h, N)_{\max} = \left\lfloor \log_2 \frac{N+2}{a_0+2} \right\rfloor$ 且 $L(h, N) = k(h, N)_{\max} + 1$ 。 $M(N)$ 為 N 張牌卡中可取走之最多

牌卡對數， $M(N) = \sum_{h \in S} \left\lfloor \frac{\log_2 \frac{N+2}{h+2} + 1}{2} \right\rfloor$ ，最多可取走卡片總張數 $T_{2a+2}(N) = 2 \cdot \sum_{h \in S} \left\lfloor \frac{\log_2 \frac{N+2}{h+2} + 1}{2} \right\rfloor$ ，

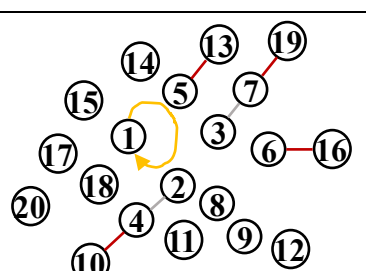
其中集合 $S = \{2\} \cup \{1, 3, 5, \dots\}$ (所有奇數)

【問題二】如果小誼必須拿走的編號改為 $3a-2$ ，則結果如下：

項次	N=20	起點 Vertex	路徑 Path (或鏈 Chain)	點數 L	最大配對數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$	拿牌數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor * 2$
1		1	1→1	1	0	0
2		2	2→4→10→28	3	1	2
3		3	3→7→19→55	3	1	2
4		4	4→10→28	2	1	2
5		5	5→13→37	2	1	2
6		6	6→16→46	2	1	2
7		7	7→19→55	2	1	2
8		8	8→22	1	0	0

項次 \ N=20	起點 Vertex	路徑 Path (或鏈 Chain)	點數 L	最大配對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$
9	9	9→25	1	0	0
10	10	10→28	1	0	0
11	11	11→31	1	0	0
12	12	12→34	1	0	0
13	13	13→37	1	0	0
14	14	14→40	1	0	0
15	15	15→43	1	0	0
16	16	16→46	1	0	0
17	17	17→49	1	0	0
18	18	18→52	1	0	0
19	19	19→55	1	0	0
20	20	20→58	1	0	0

由上表所知，所有的數字會形成以下**4條長鏈**、**1個不動點**與**9個孤立點**：

路徑長度 項次	長度為3的鏈	長度為2的鏈	不動點 Fixed point	長度為1(孤立點)的鏈
1	2→4→10→28	5→13→37	1	8、9、11、12、14、15、 17、18、20
2	3→7→19→55	6→16→46		
拿走卡片張數	(長度3)： 有2條鏈×每條拿2張=4張 (長度2)： 有2條鏈×每條拿2張=4張 (長度1)： 有9個孤立點×0張=0張 兩人合作，最多一共可以拿走8張卡片。			

根據取牌規則得知，後一張牌卡編號 a_n 為前一張編號 a_{n-1} 的三倍減掉2，即 $a_n = 3a_{n-1} - 2$ 。

左右減掉1， $a_n - 1 = 3(a_{n-1} - 1)$ ，即為首項是 $a_0 - 1$ ，公比為3的等比數列。

而第 k 項 $a_k - 1 = 3(a_{n-1} - 1)$ ， $a_k = 3^k(a_0 - 1) + 1$ ， a_0 為鏈的起點， $a_0 \in S =$

$\{h \in \mathbb{N} | 1 \leq h \leq N, h \not\equiv 1 \pmod{3}\}$ 、 k 為此鏈的第 k 個數。由於 $3^k(a_0 - 1) + 1 \leq N$ ， $3^k(a_0 - 1) \leq N - 1$ ， $3^k \leq \frac{N-1}{a_0-1}$ ， $k \leq \log_3 \frac{N-1}{a_0-1}$ 。因此任意數字 h 作為**鏈頭**時，這條鏈在 N 以內所能

延伸長度，即為鏈長 $L(h, N)$ ， $k(h, N)_{\max} = \left\lfloor \log_3 \frac{N-1}{a_0-1} \right\rfloor$ 且 $L(h, N) = k_{\max} + 1$ 。 $M(N)$ 為 N 張牌卡

中可取走之最多牌卡對數， $M(N) = \sum_{h \in S} \left\lfloor \frac{\log_3 \frac{N-1}{h-1} + 1}{2} \right\rfloor$ ，最多可取走卡片總張數 $T_{2a+2}(N) = 2 \cdot$

$\sum_{h \in S} \left\lfloor \frac{\log_3 \frac{N-1}{h-1} + 1}{2} \right\rfloor$ ，其中集合 $S = \{h \in \mathbb{N} | 1 \leq h \leq N, h \not\equiv 1 \pmod{3}\}$ 。

【問題三】如果小誼可以在2a+2和3a-2之中選一張拿走呢？

項次	起點 Vertex	路徑 Path (2a+2)	點數 L	最大配 對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$	路徑 Path (3a-2)	點數 L	最大配 對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$
1	1	1→4→10	3	1	2	1	1	0	0
2	2	2→6→14	3	1	2	2→4→10	3	1	2
3	3	3→8→18	3	1	2	3→7→19	3	1	2
4	4	4→10	2	1	2	4→10	2	1	2
5	5	5→12	2	1	2	5→13	2	1	2
6	6	6→14	2	1	2	6→16	2	1	2
7	7	7→16	2	1	2	7→19	2	1	2
8	8	8→18	2	1	2	8	1	0	0
9	9	9→20	2	1	2	9	1	0	0
10	10	10	1	0	0	10	1	0	0
11	11	11	1	0	0	11	1	0	0
12	12	12	1	0	0	12	1	0	0
13	13	13	1	0	0	13	1	0	0
14	14	14	1	0	0	14	1	0	0
15	15	15	1	0	0	15	1	0	0
16	16	16	1	0	0	16	1	0	0
17	17	17	1	0	0	17	1	0	0
18	18	18	1	0	0	18	1	0	0
19	19	19	1	0	0	19	1	0	0
20	20	20	1	0	0	20	1	0	0

項次	起點 Vertex	路徑 Path (2a+2)	點數 L	最大配 對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$	路徑 Path (3a-2)	點數 L	最大配 對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$

由上表所知，兩人合作，最多一共可以拿走 $2*6組=12張$ 卡片。

【問題四】如果有100張卡片，編號是1,2,3,...,100呢？

項次	起點 Vertex	路徑 Path (2a+2)	點數 L	最大配對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$
1	1	1→4→10→22→46→94	6	3	6
2	2	2→6→14→30→62	5	2	4
3	3	3→8→18→38→78	5	2	4
4	4	4→10→22→46→94	5	2	4
5	5	5→12→26→54	4	2	4
6	6	6→14→30→62	4	2	4
7	7	7→16→34→70	4	2	4
8	8	8→18→38→78	4	2	4
9	9	9→20→42→84	4	2	4
10	10	10→22→46→94	4	2	4
11	11	11→24→50	3	1	2
12	12	12→26→56	3	1	2
13	13	13→28→58	3	1	2
14	14	14→30→62	3	1	2
15	15	15→32→66	3	1	2
16	16	16→34→70	3	1	2

項次	起點 Vertex	路徑 Path (2a+2)	點數 L	最大配對數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$	拿牌數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor * 2$
17	17	17→36→74	3	1	2
18	18	18→38→78	3	1	2
19	19	19→40→82	3	1	2
20	20	20→42→86	3	1	2
21	21	21→44→90	3	1	2
22	22	22→46→94	3	1	2
23	23	23→48→98	3	1	2
24	24	24→50	2	1	2
25	25	25→52	2	1	2
26	26	26→54	2	1	2
27	27	27→56	2	1	2
28	28	28→58	2	1	2
29	29	29→60	2	1	2
30	30	30→62	2	1	2
31	31	31→64	2	1	2
32	32	32→66	2	1	2
33	33	33→68	2	1	2
34	34	34→70	2	1	2
35	35	35→72	2	1	2
36	36	36→74	2	1	2
37	37	37→76	2	1	2
38	38	38→78	2	1	2
39	39	39→80	2	1	2
40	40	40→82	2	1	2
41	41	41→84	2	1	2
42	42	42→86	2	1	2
43	43	43→88	2	1	2

項次	起點 Vertex	路徑 Path (2a+2)	點數 L	最大配對數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$	拿牌數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor * 2$
44	44	44→90	2	1	2
45	45	45→92	2	1	2
46	46	46→94	2	1	2
47	47	47→96	2	1	2
48	48	48→98	2	1	2
49	49	49→100	2	1	2
50	50	50	1	0	0

由上表所知，兩人合作，最多一共可以拿走 $2*6+2*(4*5)+2*(2*20)$ 組=132張卡片。

項次	起點 Vertex	路徑 Path (3a-2)	點數 L	最大配對數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$	拿牌數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor * 2$
1	1	1	0	0	0
2	2	2→4→10→28→82	5	2	4
3	3	3→7→19→55	4	2	4
4	4	4→10→28→82	4	2	4
5	5	5→13→37	3	1	2
6	6	6→16→46	3	1	2
7	7	7→19→55	3	1	2
8	8	8→22→60	3	1	2
9	9	9→25→73	3	1	2
10	10	10→28→82	3	1	2
11	11	11→31→91	3	1	2
12	12	12→34→100	3	1	2
13	13	13→37	2	1	2
14	14	14→40	2	1	2
15	15	15→43	2	1	2
16	16	16→46	2	1	2
17	17	17→49	2	1	2
18	18	18→52	2	1	2

項次	起點 Vertex	路徑 Path (3a-2)	點數 L	最大配對數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$	拿牌數 $\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor * 2$
19	19	19→55	2	1	2
20	20	20→58	2	1	2
21	21	21→61	2	1	2
22	22	22→64	2	1	2
23	23	23→67	2	1	2
24	24	24→70	2	1	2
25	25	25→73	2	1	2
26	26	26→76	2	1	2
27	27	27→79	2	1	2
28	28	28→82	2	1	2
29	29	29→85	2	1	2
30	30	30→88	2	1	2
31	31	31→91	2	1	2
32	32	32→94	2	1	2
33	33	33→97	2	1	2
34	34	34→100	2	1	2
35	35	35	1	0	0

由上表所知，兩人合作，最多一共可以拿走 $2*4+2*20$ 組=48張卡片。

項次	起點 Vertex	路徑 Path (2a+2)	點數 L	最大配 對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$	路徑 Path (3a-2)	點數 L	最大配 對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$
1	1	1→4→10→22→46→94	6	3	6	1	0	0	0
2	2	2→6→14→30→62	5	2	4	2→4→10→28→82	5	2	4
3	3	3→8→18→38→78	5	2	4	3→7→19→55	4	2	4
4	4	4→10→22→46→94	5	2	4	4→10→28→82	4	2	4
5	5	5→12→26→54	4	2	4	5→13→37	3	1	2
6	6	6→14→30→62	4	2	4	6→16→46	3	1	2
7	7	7→16→34→70	4	2	4	7→19→55	3	1	2
8	8	8→18→38→78	4	2	4	8→22→60	3	1	2
9	9	9→20→42→84	4	2	4	9→25→73	3	1	2
10	10	10→22→46→94	4	2	4	10→28→82	3	1	2
11	11	11→24→50	3	1	2	11→31→91	3	1	2
12	12	12→26→56	3	1	2	12→34→100	3	1	2
13	13	13→28→58	3	1	2	13→37	2	1	2
14	14	14→30→62	3	1	2	14→40	2	1	2
15	15	15→32→66	3	1	2	15→43	2	1	2
16	16	16→34→70	3	1	2	16→46	2	1	2
17	17	17→36→74	3	1	2	17→49	2	1	2
18	18	18→38→78	3	1	2	18→52	2	1	2
19	19	19→40→82	3	1	2	19→55	2	1	2
20	20	20→42→86	3	1	2	20→58	2	1	2
21	21	21→44→90	3	1	2	21→61	2	1	2
22	22	22→46→94	3	1	2	22→64	2	1	2
23	23	23→48→98	3	1	2	23→67	2	1	2
24	24	24→50	2	1	2	24→70	2	1	2
25	25	25→52	2	1	2	25→73	2	1	2
26	26	26→54	2	1	2	26→76	2	1	2
27	27	27→56	2	1	2	27→79	2	1	2

項次	起點 Vertex	路徑 Path (2a+2)	點數 L	最大配 對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$	路徑 Path (3a-2)	點數 L	最大配 對數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$	拿牌數 $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor * 2$
28	28	28→58	2	1	2	28→82	2	1	2
29	29	29→60	2	1	2	29→85	2	1	2
30	30	30→62	2	1	2	30→88	2	1	2
31	31	31→64	2	1	2	31→91	2	1	2
32	32	32→66	2	1	2	32→94	2	1	2
33	33	33→68	2	1	2	33→97	2	1	2
34	34	34→70	2	1	2	34→100	2	1	2
35	35	35→72	2	1	2	35	1	0	0
36	36	36→74	2	1	2				
37	37	37→76	2	1	2				
38	38	38→78	2	1	2				
39	39	39→80	2	1	2				
40	40	40→82	2	1	2				
41	41	41→84	2	1	2				
42	42	42→86	2	1	2				
43	43	43→88	2	1	2				
44	44	44→90	2	1	2				
45	45	45→92	2	1	2				
46	46	46→94	2	1	2				
47	47	47→96	2	1	2				
48	48	48→98	2	1	2				
48	49	49→100	2	1	2				
50	50	50	1	0	0				

二、基於一之探索成果，推演設計「末項為任意正整數 N 之卡片」的數學模型。

藉由上述觀察與試驗，能否進一步找出通式 $\alpha x + \beta$ 及特性，來作為所採取策略的依據？

將 N 張卡片視為頂點集 $V = \{1, 2, \dots, N\}$ ，規則形成有向邊 $E = \{(x, y) \mid y = \alpha x + \beta\}$ 。

對於一條鏈上的第 k 個數字 a_k （其中 $a_0 = h$ 為鏈頭），滿足：

$$a_k = \alpha a_{k-1} + \beta$$

利用上述(3a-2)例中的「不動點（Fixed Point）」概念可得以下關係：

令不動點 x^* 滿足 $x^* = \alpha x^* + \beta$ ，得 $x^* = \frac{\beta}{1-\alpha}$ 。

利用等量減法公理， $a_k - x^* = \alpha a_{k-1} + \beta - (\alpha x^* + \beta)$

$$a_k - x^* = \alpha(a_{k-1} - x^*)$$

$$\frac{a_k - x^*}{a_{k-1} - x^*} = \frac{a_{k-1} - x^*}{a_{k-2} - x^*} = \alpha$$

故 $a_1 - x^*$ 、 $a_2 - x^*$ 、 $\dots$ 、 $a_{k-1} - x^*$ 、 $a_k - x^*$ 為等比數列，公比為 α 。

可得 $a_k - x^* = \alpha^k(a_0 - x^*)$ ，經移項整理後， a_k 的一般項通式為：

$$a_k = \alpha^k(a_0 - x^*) + x^* = \alpha^k\left(h + \frac{\beta}{\alpha-1}\right) - \frac{\beta}{\alpha-1}。$$

接下來，我們需要找出最大的 k (步數)，使得數列值不超過 N ($a_k \leq N$)。

$$a_k = \alpha^k\left(h + \frac{\beta}{\alpha-1}\right) - \frac{\beta}{\alpha-1} \leq N$$

$$\alpha^k\left(h + \frac{\beta}{\alpha-1}\right) \leq \frac{(\alpha-1)N + \beta}{\alpha-1}$$

(一)假設 $\alpha > 1$ ，則 $\alpha - 1 > 0$ ，不等號方向不變：

$$\alpha^k\left(\frac{(\alpha-1)h + \beta}{\alpha-1}\right) \leq \frac{(\alpha-1)N + \beta}{\alpha-1}$$

$$\alpha^k \leq \frac{(\alpha-1)N + \beta}{(\alpha-1)h + \beta}$$

取對數(底數為 α)，

$$k \leq \log_{\alpha} \frac{(\alpha-1)N + \beta}{(\alpha-1)h + \beta}$$

因此，鏈的總長度(節點數) $L = k_{max} + 1$

$$L(h, N) = \left\lfloor \log_{\alpha} \frac{(\alpha-1)N + \beta}{(\alpha-1)h + \beta} \right\rfloor + 1$$

(二)若 $\alpha < 1$ ，則 $\alpha - 1 < 0$ ，不等號方向需改變：

$$\alpha^k\left(\frac{(\alpha-1)h + \beta}{\alpha-1}\right) \leq \frac{(\alpha-1)N + \beta}{\alpha-1}$$

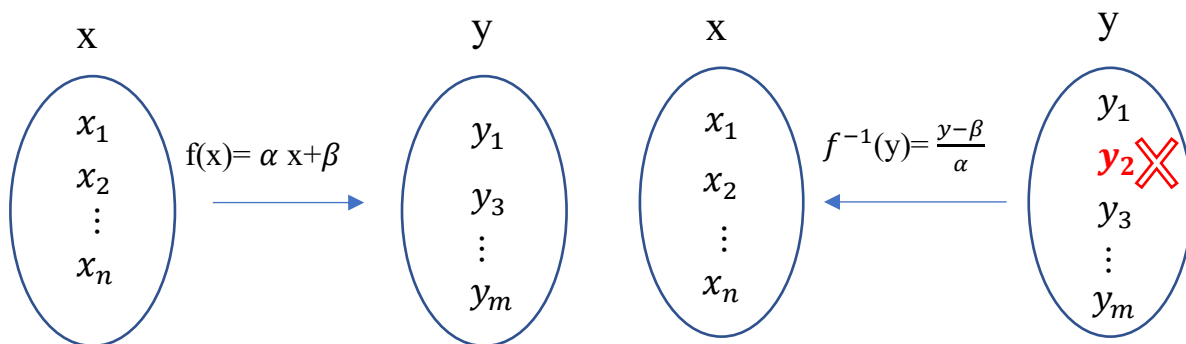
$$\alpha^k \geq \frac{(\alpha-1)N + \beta}{(\alpha-1)h + \beta}$$

取對數(底數為 α)，

$$k \geq \log_{\alpha} \frac{(\alpha-1)N+\beta}{(\alpha-1)h+\beta}$$

因此，鏈的總長度(節點數) $L = k_{\max} + 1$ 不存在於 $\alpha < 1$ 時。故只針對 $\alpha > 1$ 的情況下，討論鏈的總長度 L 之最大值。

藉由上述的推論，我們需要從鏈頭 h 出發找尋接下來的答案，而鏈頭是那些「沒有上游」的數字，也就是方程式 $y = \alpha x + \beta$ 沒有整數解的 y (如下圖 y_2)。



$x = \frac{y-\beta}{\alpha}$ 必須不是正整數。而這發生在兩種情況：

1. $y - \beta$ 不能被 α 整除。即 $y \not\equiv \beta \pmod{\alpha}$ 。
2. $x = \frac{y-\beta}{\alpha} < 1$ ，算出的 x 值不在一開始的 $1 \sim N$ 的範圍內。

將這些鏈頭 h 蒐集起來，即為如下所示的集合 S

$$S = \{ y \in V \mid y \not\equiv \beta \pmod{\alpha} \} \cup \{ y \in V \mid y \equiv \beta \pmod{\alpha} \text{ 且 } y < \alpha x + \beta \}$$

在一般化推廣中，必須各別討論 $f(x)=x$ 的情況：

不動點 (Fixed Point)：若 $x = \frac{y-\beta}{\alpha}$ 是正整數且在 $1 \sim N$ 範圍內，則該點會形成自環 $x \rightarrow x$ 。

故此卡片無法與「另一張」卡片配對。因而在計算總配對數時，必須將不動點從鏈頭集合或路徑中去除。最後 $y = \alpha x + \beta$ 的通式：

即

$$T_{\alpha x + \beta}(N) = 2 \cdot \sum_{h \in S, h \neq \text{fixed point}} \left\lfloor \frac{L(h, N)}{2} \right\rfloor$$

而 $L(h, N) = \left\lfloor \log_{\alpha} \frac{(\alpha-1)N+\beta}{(\alpha-1)h+\beta} \right\rfloor + 1$ 。

藉由上述式子可知，有 N 張卡片上面標著分別是 $1, \dots, N$ 。小冠和小誼兩人合作，如果小冠拿了編號為 x 的卡片，小誼就要拿走編號為 $\alpha x + \beta$ 的卡片。如果小誼已經沒有卡片可以拿了，遊戲就結束。最終，兩人可拿卡片張數為

$$T_{\alpha x + \beta}(N) = 2 \cdot \sum_{h \in S, h \neq \text{fixed point}} \left\lfloor \frac{L(h, N)}{2} \right\rfloor$$

張。

肆、研究結果

綜觀上述探索活動之主要研究結果，可統整如下：

一、經由實作、列表、統整及尋找規律性，發現「合作拿卡片」所提下問題：

「有20張卡片上面標著分別是1，2，3，4，...，20。小冠和小誼兩人合作，如果小冠拿了編號為 a 的卡片，小誼就要拿走編號為 $2a+2$ 的卡片。如果小誼已經沒有卡片可以拿了，遊戲就結束。

1.請問兩人合作，最多一共可以拿走多少張卡片？

2.如果小誼必須拿走的編號是 $3a-2$ 呢？

3.如果小誼可以在 $2a+2$ 和 $3a-2$ 之中選一張拿走呢？

4.如果有 100 張卡片，編號是 1，2，3，...，100 呢？

」的結果。

二、基於一之探討結果，推論「末項為任意正整數 N 之卡片且拿取卡片規則為 $\alpha x + \beta$ 」的數學模型。

伍、討論

回顧本研究過程中所使用的研究方法，透過簡化問題、窮舉證法、系統性列表統整有關實作結果、尋求有關變項之間的規律性-形成猜測的解題策略。並且進一步運用代數化推演與論證的過程中，則經常運用了國中數學所學的代數式四則運算、對數、函數等的方法；此外，我們也將在下列結論中，運用最近所學的函數概念來表達本研究之主要成果。顯然在參與科展的過程中，不僅可體驗探究活動的甘苦與成功樂趣，也從不同面向豐富我們在國中小所學的數學內涵。

陸、結論

以函數觀點表示本研究之主要成果

為了彰顯本研究標題「探討「合作拿卡片」的數學模型」之具體意涵，以下將以我們這學期所學的「函數」觀點，來表示本研究之主要成果：

N 張卡片為頂點集 $V = \{1, 2, \dots, N\}$ ，且 $S = \{y \in V \mid y \not\equiv \beta \pmod{\alpha}\} \cup \{y \in V \mid y \equiv \beta \pmod{\alpha} \text{ 且 } y < \alpha x + \beta\}$ ，小冠和小誼拿取牌卡為 x 及 $\alpha x + \beta$ ，兩人於遊戲結束前所領取牌卡張數最大值為：

$$T_{\alpha x + \beta}(N) = 2 \cdot \sum_{h \in S, h \neq \text{fixed point}} \left\lfloor \frac{L(h, N)}{2} \right\rfloor$$

而 $L(h, N) = \left\lfloor \log_{\alpha} \frac{(\alpha-1)N+\beta}{(\alpha-1)h+\beta} \right\rfloor + 1$ 。

柒、參考資料及其他

1.游森棚（2025年6月）•森棚教官數學題-合作拿卡片•取自

<https://www.ntsec.gov.tw/article/detail.aspx?a=249>