

屏東縣第 66 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：「騙子或老實人」的探討

關 鍵 詞：排列組合、同餘、連加

編號：B1020

目錄

摘要.....	P_2
壹、前言（含研究動機、目的、文獻回顧）	P_2
貳、研究設備及器材.....	P_3
參、研究過程或方法.....	P_2
一、探索「騙子或老實人」所提的五個人的可能情形。	P_3
二、基於一之探索成果，進行「人數為任意正整數 N 之身分情況」的討論。	P_8
肆、研究結果.....	P_{10}
伍、討論.....	P_{10}
陸、結論.....	P_{11}
柒、參考資料及其他.....	P_{11}

「騙子或老實人」的探討

摘要

在找尋科展題目之際，偶然發現游森棚教授所刊登在科學研習月刊的文章。騙子或老實人一文提及，透過詢問坐在右手邊的人的回答，推測坐在圓桌上的人可能的身份，進而分析可能的情形。看似簡單的排列組合，卻能夠在一些步驟後，找到圓桌上的客人身份情形分析。

最終，根據一步一步的推論，順利的完成「從來賓的回答中，推測這 5 位坐在圓桌的來賓可能身份的情形」之騙子或老實人的相關探討。

壹、前言

在游森棚教授刊登於科學研習月刊的「騙子或老實人」曾寫道：

五個熟識的朋友在小吃店圍著圓桌而坐，但是每個人可能是騙子(永遠說謊)，也可能是老實人(永遠誠實)。老闆問每一個人坐在他的右手邊的人是騙子還是老實人，然後統計答案。

1. 有沒有可能這五個答案全部都是「老實人」？
2. 有沒有可能這五個答案中包含「兩個老實人、三個騙子」？
3. 考慮這五個人的所有可能情形，會有幾個答案中包含「三個老實人，兩個騙子」？

這樣簡單、純粹的美吸引著我們想要一窺其中奧秘。在一次的課堂討論中，開啟了與我們接下來想要研究的主題：「騙子或老實人」的探討的一段緣分，進而從每位來賓的回答中，找尋線索與接續探索其他可能的關鍵因素。

當我們嘗試討論上述題目後，大家對於答案充滿好奇，並發想出若干進一步探索的想法。經與老師共同討論後，期望本研究能順利達成下列目的。

- 一、探索「騙子或老實人」所提的五個人的可能情形。
- 二、基於一之探索成果，進行「人數為任意正整數 N 之身份情況」的討論。

貳、研究設備及器材

筆、紙、電腦。

參、研究過程或方法

運用題目所提供示例、窮舉證法和系統歸納相關示例結果，進而尋找各變項之間相互依賴關係，觀察其規律，形成猜測，更進一步驗證猜測之可行性，並藉由國中數學課程所學，將猜測進行推論並期待以代數化完備通用的數學形式。

根據題目所述，最靠近老闆的人為第 1 位客人，其身份別為 a_1 (Honest H 或 Liar L)，依順時鐘方向為第 2 位客人 a_2 ，往後依序為， a_3 、 $\dots$ 、 a_n 。考量老闆與客人身分別所產生的回答如下：

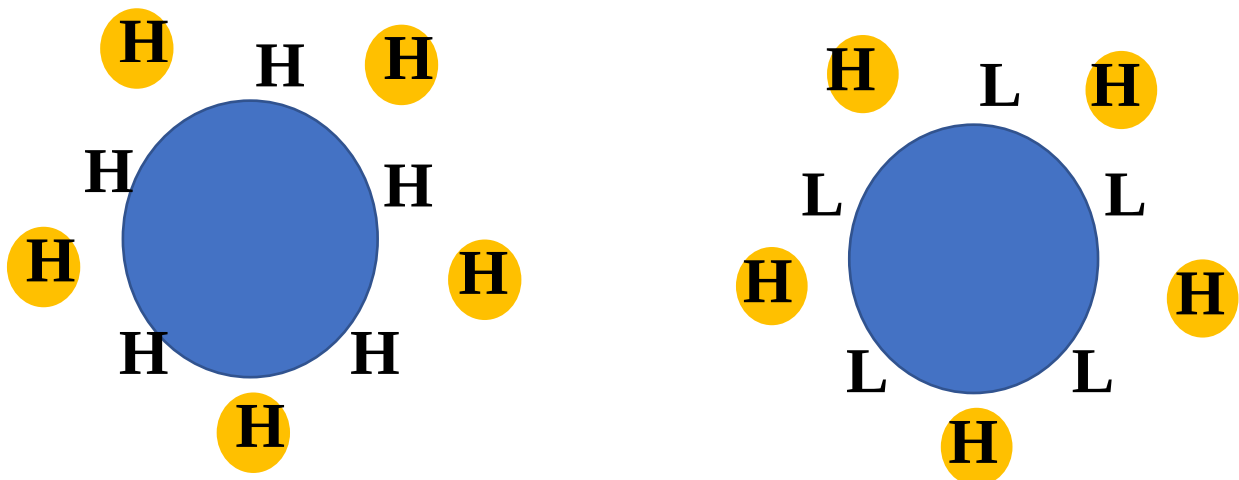
鄰居身分 a_i 回答者身分 a_j	老實人 Honest H	騙子 Liar L
老實人 Honest H	H	L
騙子 Liar L	L	H

觀察上表，回答老實人的情況，回答者本身與鄰居身分**相同**(皆為老實人或騙子)，回答騙子的情況，回答者本身與鄰居身分**相異**(其一為老實人另一為騙子或身分別對調)。

一、探索「騙子或老實人」所提的五個人的可能情形。

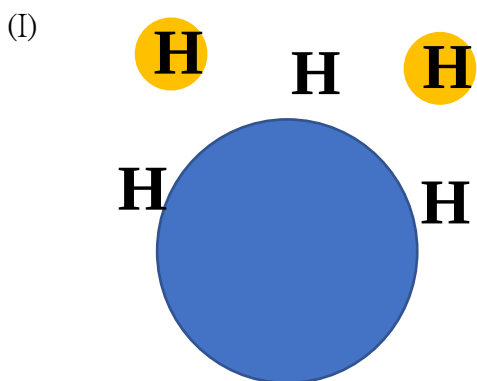
【第一題】有沒有可能這五個答案全部都是「老實人」？

根據上述推論，五個答案全部都是「老實人」的情況，即 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$ ，則回答者本身與鄰居身分**相同**，有以下兩種可能:皆為老實人或騙子。

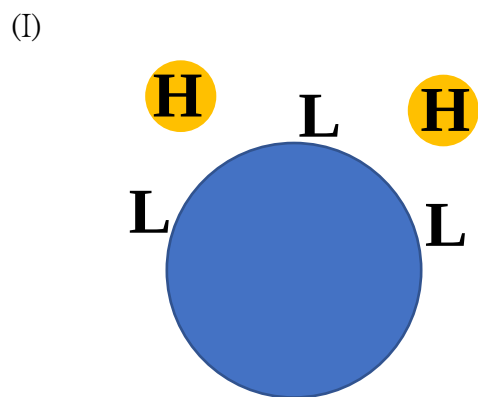


【第二題】有沒有可能這五個答案中包含「兩個老實人、三個騙子」？

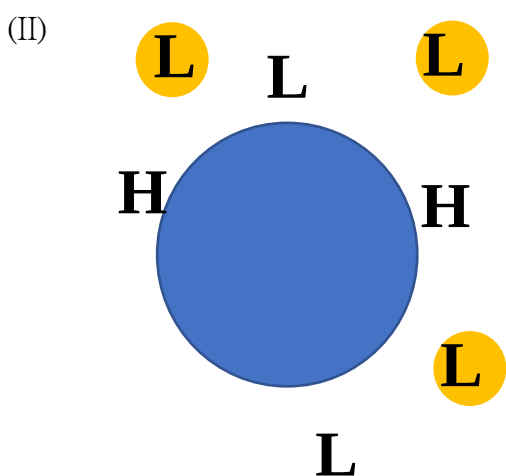
由上述觀察出發，回答老實人，則回答者本身與鄰居身分**相同**;回答騙子，則回答者本身與鄰居身分**相異**。而在封閉圓圈中，如第一位回答者身分為 $a_1=H$ ，在回到原點時仍為H，其中的身分變換次數需為偶數，例如:HL(身分轉換 2 次)、HLL(身分轉換 2 次)、HLHL(身分轉換 4 次)、HLHLH(身分轉換 4 次)...等。因此，根據前述例子經驗，「兩個老實人、三個騙子」(HHL LL)，其中身分轉換 3 次，在封閉圓圈其況下，無法回到原點，如下情況所述，故不可能這五個答案中包含「兩個老實人、三個騙子」。



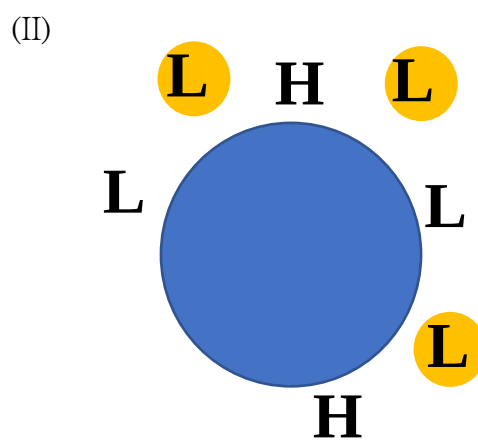
回答是兩個老實人，則需三個都是老實人



回答是兩個老實人，則需三個都是騙子



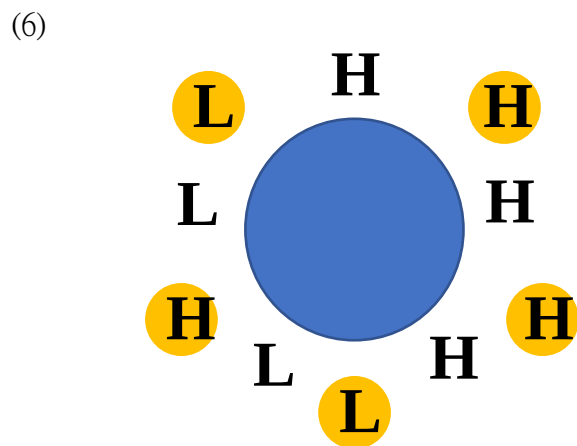
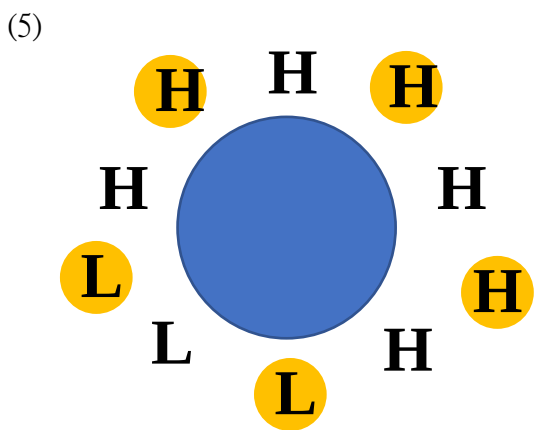
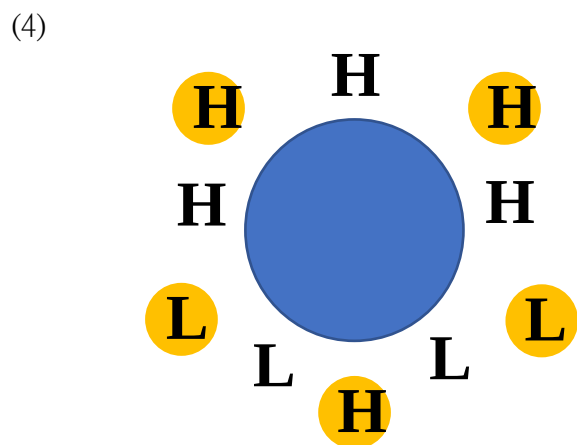
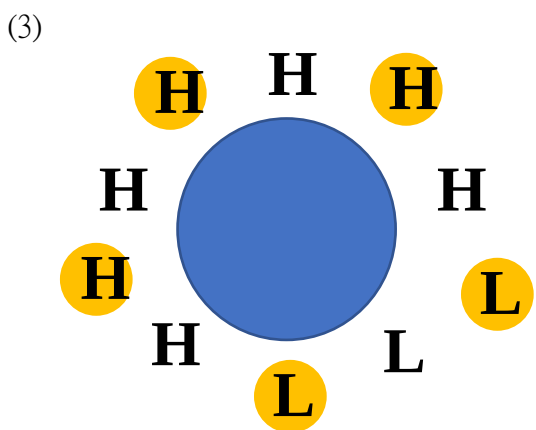
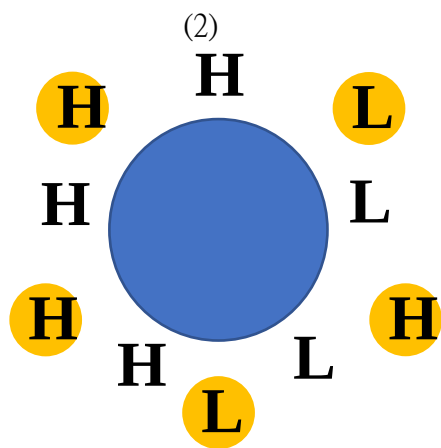
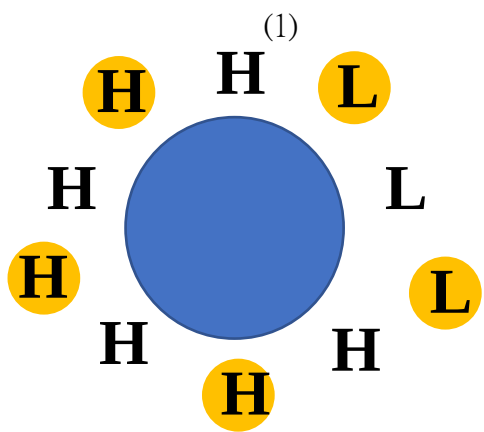
回答是三個騙子，需兩兩老實人與騙子交錯。



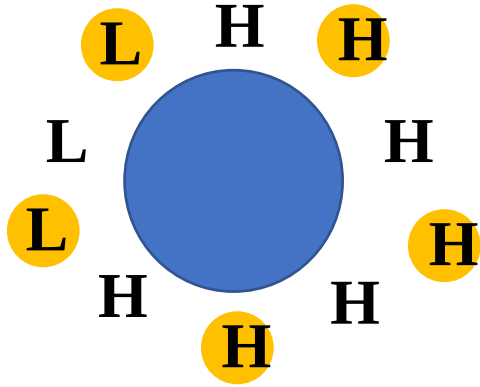
回答是三個騙子，需兩兩老實人與騙子交錯。

【第三題】考慮這五個人的所有可能情形，會有幾個答案中包含「三個老實人，兩個騙子」？

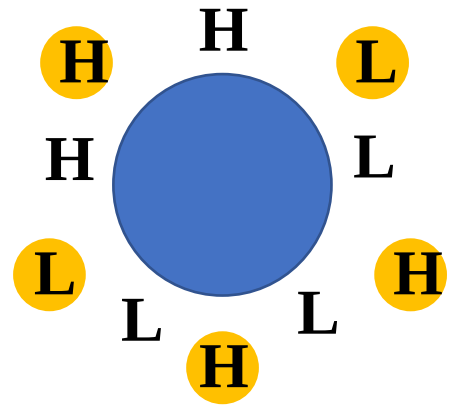
由上述觀察出發，回答老實人，則回答者本身與鄰居身分**相同**；回答騙子，則回答者本身與鄰居身分**相異**。而考量「三個老實人，兩個騙子」(HHHLL)，其中身分轉換 2 次，在封閉圓圈其況下，是有可能的。在五個人的座位間隔中，選定 2 個身分轉換的地方，方法數為 $C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2(5-2)!} = 10$ 種，然 $a_i = H$ 與 $a_i = L$ 所產生的情況恰好相反，故方法總數為 $2 \times 10 = 20$ 種。



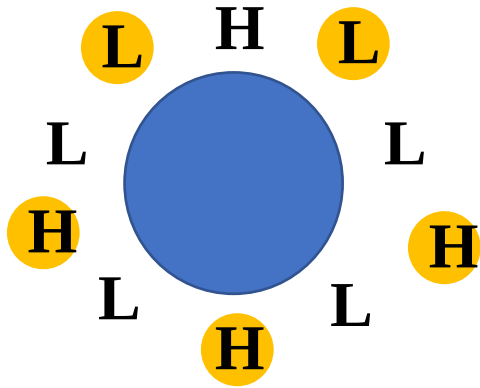
(7)



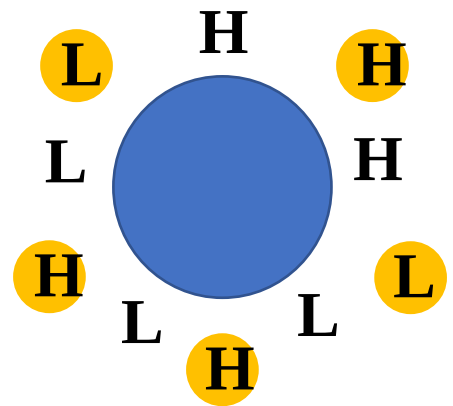
(8)



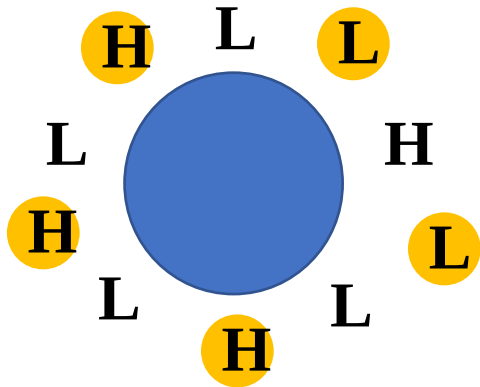
(9)



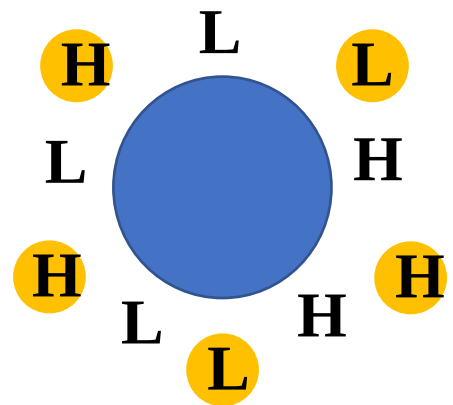
(10)



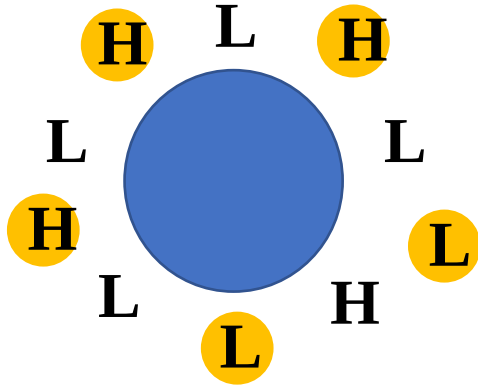
(11)



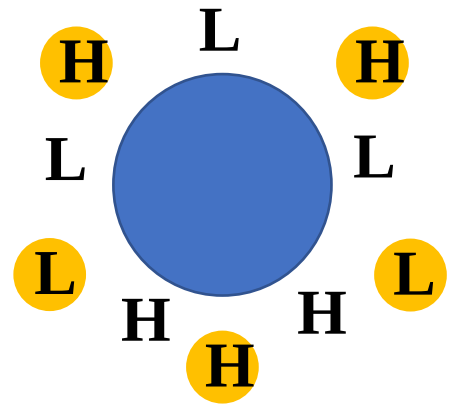
(12)



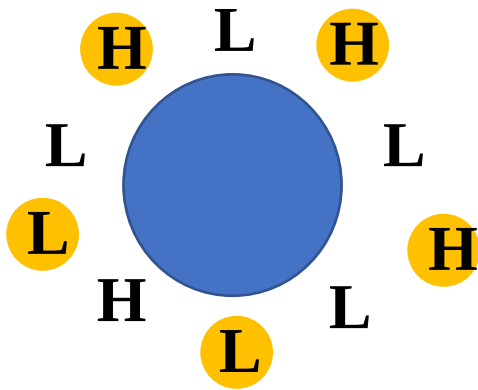
(13)



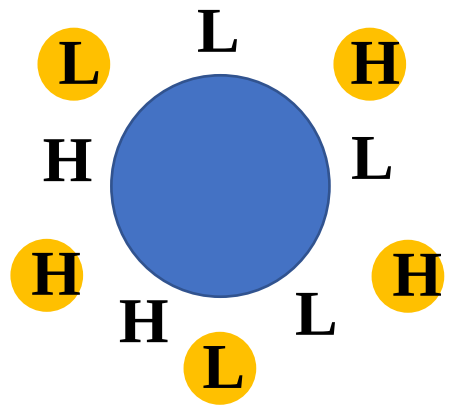
(14)



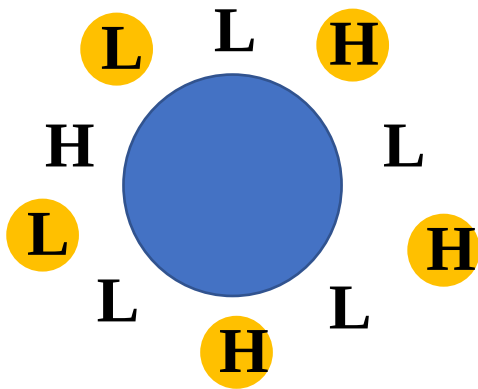
(15)



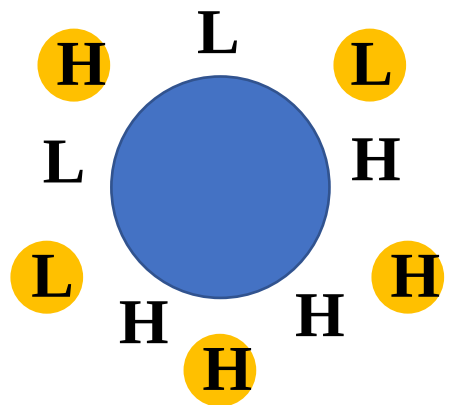
(16)



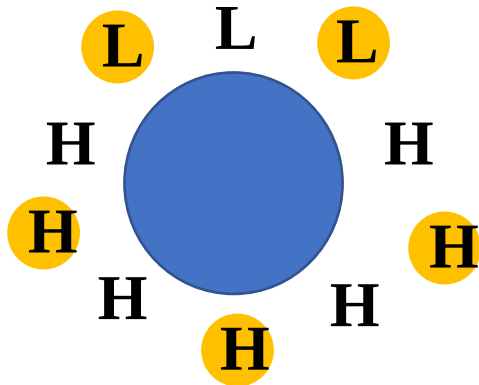
(17)



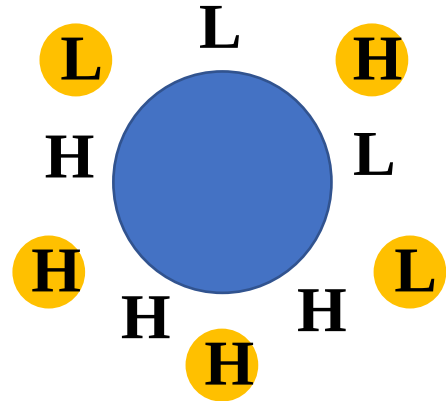
(18)



(19)



(20)



二、基於一之探索成果，進行「人數為任意正整數 N 之身分情況」的討論。

藉由上述討論，推測有 N 個人圍成圓桌，統計所有人的回答後，共有 k 個答案為「騙子」，以及 $(N-k)$ 個答案為「老實人」的情形如下：

定理一：

在任何封閉的圓桌邏輯系統中，回答「他是騙子」的總人數 k 恆為偶數。

證明：

令 $x_i \in \{0,1\}$ 代表第 i 個人的身分（0=老實人，1=騙子）。

令 $A_i \in \{0,1\}$ 代表第 i 個人說出口的「回答」（0=老實人，1=騙子）。

經由以下討論，可知所有的回答與回答者及其右手邊的人身分有以下關係：

$$A_i \equiv x_i + x_{i+1} \quad (\text{在 mod 2 運算下})$$

【情況一】第 i 個人的身分為老實人、第 $i+1$ 個人的身分為老實人

$$A_i \equiv x_i + x_{i+1} \equiv 0 + 0 \equiv 0 \quad (\text{第 } i \text{ 個人回答老實人}) \text{ 成立!}$$

【情況二】第 i 個人的身分為老實人、第 $i+1$ 個人的身分為騙子

$$A_i \equiv x_i + x_{i+1} \equiv 0 + 1 \equiv 1 \quad (\text{第 } i \text{ 個人回答騙子}) \text{ 成立!}$$

【情況三】第 i 個人的身分為騙子、第 $i+1$ 個人的身分為老實人

$$A_i \equiv x_i + x_{i+1} \equiv 1 + 0 \equiv 1 \quad (\text{第 } i \text{ 個人回答騙子}) \text{ 成立!}$$

【情況四】第 i 個人的身分為騙子、第 $i+1$ 個人的身分為騙子

$$A_i \equiv x_i + x_{i+1} \equiv 1 + 1 \equiv 0 \quad (\text{第 } i \text{ 個人回答老實人}) \text{ 成立!}$$

將圓桌上所有回答加總（在 mod 2 運算下）：

$$A_i \equiv x_i + x_{i+1}$$

$$\sum_{i=1}^N A_i \equiv \sum_{i=1}^N (x_i + x_{i+1}) \equiv 2 \cdot \sum_{i=1}^N x_i \equiv 0$$

因為每一個 x_i 都在總和中出現了兩次，所以在 mod 2 的運算下，恆有 $2 \cdot x_i \equiv 0 \pmod{2}$ 。

假設 $\exists k$ 個人回答「他是騙子」、 $(N-k)$ 個回答「他是老實人」

$$\because \sum_{i=1}^N A_i \equiv 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^N A_i \equiv k \cdot 1 + (N-k) \cdot 0$$

$$\therefore k \cdot 1 + (N-k) \cdot 0 \equiv 0$$

故 $k \equiv 0 \pmod{2}$ ，嚴格證明 k 必須是偶數。如果 k 是奇數，方程無解。

性質一：

對於任何一組合法（ k 為偶數）的回答序列，必定恰好對應 2 組互為補集的身分配置。

說明：

在缺乏外部參照的封閉系統中，我們永遠無法單憑回答，分辨這群人是處於「情況 A」或是「情況 A 的完全相反」。我們只能確認彼此之間的「相對關係」。如本作品之最初說明：

鄰居身分 a_i 回答者身分 a_j	老實人 Honest H	騙子 Liar L
老實人 Honest H	H	L
騙子 Liar L	L	H

觀察上表，回答老實人的情況，回答者本身與鄰居身分**相同**(皆為老實人或騙子)「情況 A」;回答騙子的情況，回答者本身與鄰居身分**相異**(其一為老實人另一為騙子或身分別對調)「情況 A 的完全相反」。

定理二：

對於 N 人圓桌，產生 k 個「騙子」回答（其中 k 為偶數）的身分組合總數 $S(N, k)$ 為：

$$S(N, k) = 2 \cdot C_k^N = 2 \binom{N}{k}$$

證明：

對於 N 人圓桌中，聽到「騙子」的回答有 k 個，即為在 N 個座位中，回答者本身與鄰居身分**相異**的情形有 k 個，也就是其中身份的轉換次數為 N 次，在 N 個座位

間隔中，選擇 k 個間隔為身份轉換的地方，又根據〈性質一〉必定恰好對應 2 組互為補集的身分配置，故產生 k 個「騙子」回答（其中 k 為偶數）的身分組合總數 $S(N, k)$ 為：

$$S(N, k) = 2 \cdot C_k^N = 2 \binom{N}{k}$$

如上，對於 5 人圓桌，產生 0 個「騙子」回答（其中 k 為偶數）的身分組合總數 $S(5, 0)$ 為：

$$S(5, 0) = 2 \cdot C_0^5 = 2 \binom{5}{0} = 2$$

根據上述定理與性質可得知， N 個熟識的朋友在小吃店圍著圓桌而坐，但是每個人可能是騙子(永遠說謊)，也可能是老實人(永遠誠實)。老闆問每一個人坐在他的右手邊的人是騙子還是老實人，然後統計答案。可能的答案總數為

$$\begin{aligned} \sum_{k \text{ 為偶數且 } k \leq N} S(N, k) &= \sum_{k \text{ 為偶數且 } k \leq N} 2 \cdot C_k^N \\ &= 2 \cdot \sum_{k \text{ 為偶數且 } k \leq N} \binom{N}{k} \end{aligned}$$

肆、研究結果

綜觀上述探索活動之主要研究結果，可統整如下：

一、探索「騙子或老實人」所提的五個人的可能情形。

(一) 五個答案全部都是「老實人」:2 種情形。

(二) 五個答案是「兩個老實人、三個騙子」:0 種情形。

(三) 五個答案是「三個老實人、兩個騙子」:20 種情形。

二、基於一之探索成果，進行「人數為任意正整數 N 之身分情況」的討論。

伍、討論

回顧本研究過程中所使用的研究方法，透過簡化問題、窮舉證法、系統性列表統整有關實作結果、尋求有關變項之間的規律性-形成猜測的解題策略。並且進一步運用代數化推演與論證的過程中，則經常運用了國中數學所學的代數式四則運算、同餘、排列組合等的方法；此外，我們也將在下列結論中，運用最近所學的函數概念來表達本研究之主要成果。顯然在參與科展的過程中，不僅可體驗探究活動的甘苦與成功樂趣，也從不同面向豐富我們在國中小所學的數學內涵。

陸、結論

(一)定理一：

在任何封閉的圓桌邏輯系統中，回答「他是騙子」的總人數 k 恆為偶數。

(二)性質一：

對於任何一組合法（ k 為偶數）的回答序列，必定恰好對應 2 組互為補集的身分配置。

(三)定理二：

對於 N 人圓桌，產生 k 個「騙子」回答（其中 k 為偶數）的身分組合總數 $S(N, k)$ 為：

$$S(N, k) = 2 \cdot C_k^N = 2 \binom{N}{k}$$

綜合上述， N 個熟識的朋友在小吃店圍著圓桌而坐，但是每個人可能是騙子(永遠說謊)，也可能是老實人(永遠誠實)。老闆問每一個人坐在他的右手邊的人是騙子還是老實人，然後統計答案。而可能的答案總數為

$$\begin{aligned} \sum_{k \text{ 為偶數且 } k \leq N} S(N, k) &= \sum_{k \text{ 為偶數且 } k \leq N} 2 \cdot C_k^N \\ &= 2 \cdot \sum_{k \text{ 為偶數且 } k \leq N} \binom{N}{k} \end{aligned}$$

柒、參考資料及其他

1.游森棚（2024年4月）•森棚教官數學題-騙子或老實人•取自

<https://www.ntsec.gov.tw/article/detail.aspx?a=249>