

屏東縣第 66 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：哇！這是什麼龜？

關 鍵 詞：凸形龜、視圖、展開圖

編號：A1009

摘 要

這是一場超級精彩的「幾何大冒險」！我們被像烏龜殼一樣的「凸形龜」吸引，決定挑戰只用「一張紙」畫出它的展開圖。這個酷炫結構是由 4 個正三角形與 12 個等腰梯形組成的。我們像小偵探一樣，利用「兩圓相割」的妙招，把圓形重疊處的弦當作梯形下底，精準畫出每個元件，並研究哪裡要摺成「山線」、哪裡要摺成「谷線」，好讓平面的紙能變身成帥氣的立體模型。在學習多邊形之後，加深加廣至尺規作圖以及展開圖，將幾何學的基本概念完美的結合。從觀察美術作品的組合，轉化到使用數學的作圖方法，結合各領域的基礎學習，綜合在日常生活中，使得學術領域的學習更多采多姿，提升我們的學習興趣，更增進探究的精神，培養動手做，愛思考，從做中學習，與他人合作，成就自己與他人。

壹、前 言

一、研究動機：

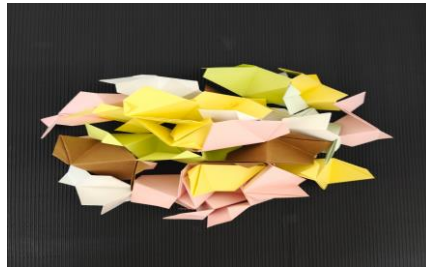
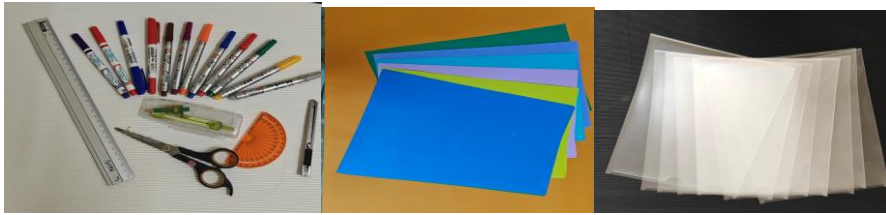
我們在佈置教室時，發現了超酷的立體摺紙，老師說這叫「凸型龜」。它的樣子真的很像烏龜殼，大家看了都好想學！雖然老師說要把它組合起來超級難，但我們幾個同學決定挑戰看看，想試試看能不能只用「一張紙」就畫出它的展開圖，把它變出來。我們發現，這個構造是由 4 個正三角形和 12 個等腰梯形組成的。為了畫得精準，我們還用了圓規畫出「相割的圓」，利用圓形重疊的地方來找梯形的底邊。最有趣的地方是，我們要像小偵探一樣，找出哪裡要摺成「山形」，哪裡要摺成「谷形」，只要摺對了，平平的紙就會像變魔術一樣，縮起來變成一個帥氣的立體龜殼。這場幾何大冒險雖然不容易，但我們都覺得超有成就感的！

二、研究目的：

- (一) 基本的元件組合
- (二) 了解元件的長寬比例
- (三) 利用各種幾何方法
- (四) 繪製出展開凸
- (五) 運用到生活中

貳、 研究設備及器材

- 1、 速乾簽字筆、壁報紙、直尺、圓規、剪刀、透明膠帶、美工刀、量角器、透明片
- 2、 凸形龜組合元件
- 3、 平板及電腦



參、 研究方法

一、名詞解釋

- (一) 視圖：指正視圖（前視圖）、俯視圖（上視圖）與側視圖（左/右視圖）。
- (二) 柏拉圖多面體：是滿足以下兩個條件的正多面體：
 - 1、每個面都是完全相同的正多邊形。
 - 2、每個頂點連接的面數也都相同。
- (三) 等腰梯形：是一組對邊平行（底邊），而另一組不平行的對邊（腰）長度相等的梯形。
- (四) 正六邊形：正六邊形由 6 條等長的邊，與 6 個相同的內角組成，每個內角為 120 度。
- (五) 兩圓相割：是指兩個圓形在平面上交於兩個相異點的狀態。

(六) 截角多面體：就是把一個多面體的每一個頂點「切掉」。

切掉頂點時，原本的頂點會變成一個新的面，而原本的邊則會縮短。

(七) 密鋪：用一種或多種幾何圖形，在不重疊且不留空隙的情況下，鋪滿整個平面的過程。

(八) 展開圖：將立體圖的每一個面打開，平鋪在平面上，形成的平面圖。

二、研究架構

- (一) 凸形龜的組合
- (二) 視圖
- (三) 尺規作圖
- (四) 與正多面體結合
- (五) 相割的圓
- (六) 展開圖
- (七) 生活中的應用

肆、研究過程與結果

一、凸形龜的組合：

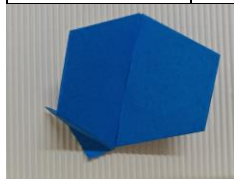
- (一) 我們將單位轉換為公分 (cm)，並以 4 開紙張標準尺寸 54.5cm × 39.3cm 為基準。

等分數量	欄 × 列	長度 (cm)	寬度 (cm)	長:寬
8 等分	2 × 4	13.63	19.65	1 : 1.44
10 等分	2 × 6	10.90	19.65	1 : 1.80
12 等分	2 × 8	9.08	19.65	1 : 2.16
14 等分	2 × 7	7.79	19.65	1 : 2.52
16 等分	2 × 8	6.81	19.65	1 : 2.89

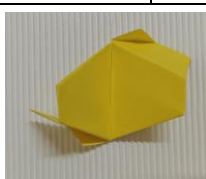
20 等分	2×10	5.50	19.65	1 : 3.57
-------	---------------	------	-------	----------

(二)組合元件的比例:凸形龜的基本紙張是長方形，所以我們將四開的壁報紙切割成不同的大小，將不同長方形的長固定長度，寬的長度因切割張數不同而改變，摺成凸型龜的元件，形成的等腰梯形，再量出上底、下底即腰的長度，並量出底角及頂角的度數，作成表格如下:

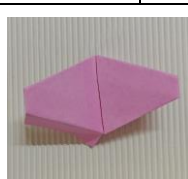
項目/張數	上底	下底	腰	頂角	底角
8 張	2.5cm	7.5cm	5cm	110 度	70 度
10 張	2.1cm	7.5cm	5cm	110 度	70 度
12 張	1.7cm	7.5cm	5cm	110 度	70 度
14 張	1.3cm	7.5cm	5cm	110 度	70 度
16 張	0.9cm	7.5cm	5cm	110 度	70 度
20 張	0.5cm	7.5cm	5cm	110 度	70 度



8 張



10 張



12 張



14 張



16 張



20 張

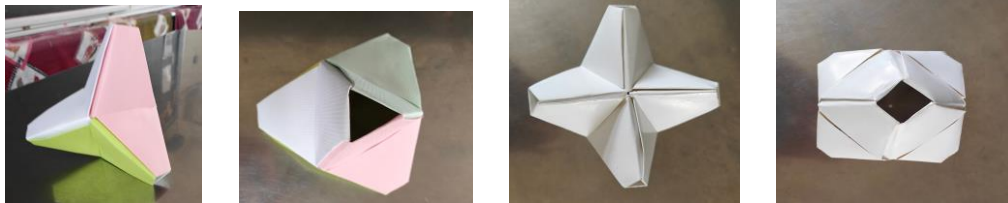
二、凸型龜組合元件的視圖:

(1)立體基本組合張數需要三張，兩張無法組合成立體，因此我們將元件組合，發現到張數超過 9 張時，凸形龜開始凹陷，無法凸起。

(2) 核心單元： 每一個形成空洞的正三角形，每一條邊都會接上一個等腰梯形（短底接三角形）。

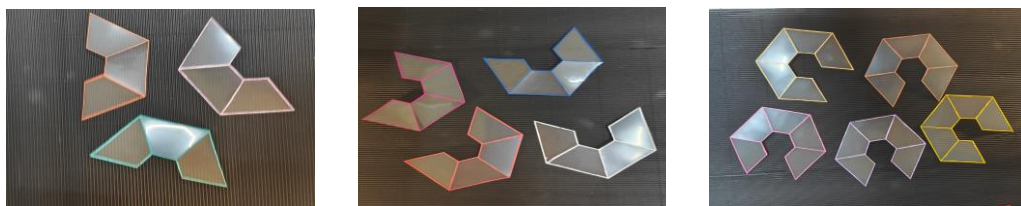
(3) 連接單元： 梯形與梯形之間透過斜邊相連。

(4) 封閉： 由於有 4 個正三角形，每個三角形接 3 個梯形，正好消耗掉所有 12 個梯形。視圖如下：



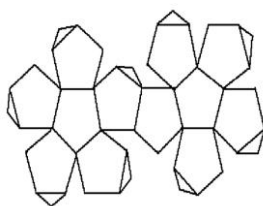
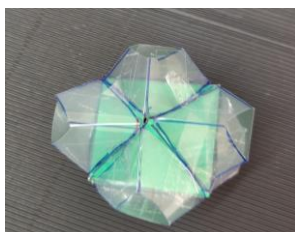
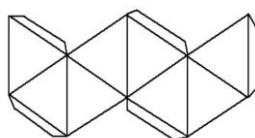
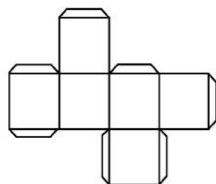
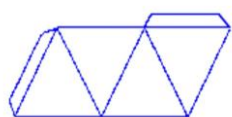
三、尺規作圖：我們使用透明片將組合的元件用尺規作圖法完成，步驟如下：

1. 圓規半徑 7.5cm 畫圓
2. 從圓周上一點開始，以半徑 7.5cm 沿圓周連續畫記六個等距點。
3. 把六個點依序連線，得到正六邊形。
4. 畫記的六個等距點連接至圓心。
5. 圓規展開 5cm，以連續畫記的六個等距點為圓心，在半徑上畫記。
6. 把新畫記的六個點連線，得到小的正六邊形。
7. 將六邊形外框剪下。
8. 將小的正六邊形剪去。



四、與正多面體結合：將柏拉圖正多面體分別繪製展開圖後，

製成立體，再將凸形龜元件與之相結合，得到的圖形如下：



五、相割的圓:我們在尺規作圖時發現，當我們把兩張透明片相疊時，梯形的下底是兩圓相割的弦。上底可以取任意線段，以相同圓心畫圓，以前述的尺規作圖劃出等腰梯形。

六、展開圖:

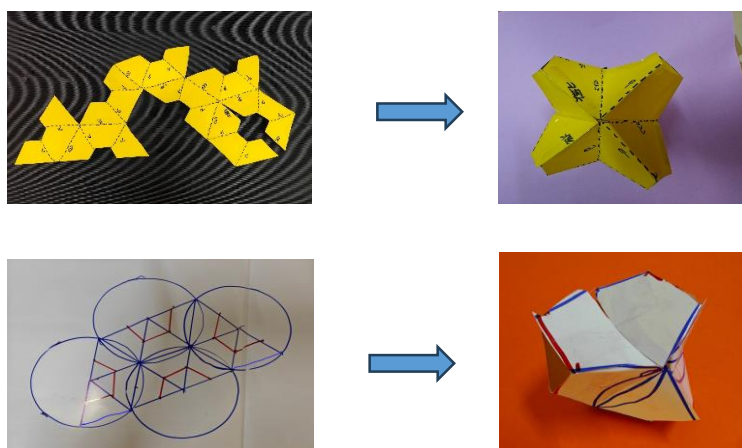
(一)我們利用圓的相割的方式，結合柏拉圖正多面體的展開圖，將梯形透明片排列之後，將展開圖下來，進行研究。

由於凸 型龜有許多凹凸之處，我們將凹凸線用不同的記號標

示。

(二)利用圓的相割，將等腰梯形相連接部分重疊，畫出相割的圓，對照柏拉圖正多面體展開圖，畫出凸形龜的展開圖。

以下是幾個正多面體的繪製圖：



七、生活中的應用：在傳統工藝或摺紙藝術中，凸形和龜這個詞彙常同時出現。

(一) **龜甲紋**：日本傳統圖騰。在布料裁斷或包裝紙的展開設計中，龜甲紋是極其重要的元素，象徵長壽。

(二) **摺紙數學**：許多摺紙大師設計的「摺紙烏龜」，其基礎就是一張極其複雜的展開圖。

(三) **龜形箱**：一種可以完全收納、摺疊，展開後又能形成封閉保護空間的設計。

(四) **脫殼**：雖然烏龜不會脫殼，但在動畫或幽默插畫中，將龜殼視為一件「可展開的衣服」。

(五) **拼圖**：龜甲的展開圖看起來就像一幅天然的幾何拼圖。

伍、討論

當我們使用 4 個正三角形與 12 個等腰梯形時，這在幾何上通常對應一個「截角四面體」的變體，或是將一個大三角形拆解後的構造。這種組合的邏輯通常是：4 個正三角形作為「頂點」或「中心面」，而 12 個等腰梯形則作為連接它們的「邊緣」或「側

面」。為了讓這 16 個面能組合成一個封閉的立體，展開圖的排列通常會呈現「星狀」或「鍊狀」：

(一)展開圖的正確畫法

1、想像一個巨大的正三角形，被分割成許多小區塊。

2、在這 4 個正三角形之間，填充由 12 個等腰梯形組成的「帶狀結構」，畫出 4 個較大的正三角形，分布在四個角落。

3、在這 4 個正三角形之間，填充由 12 個等腰梯形組成的「帶狀結構」，在這 4 個正三角形之間，填充由 12 個等腰梯形組成的「帶狀結構」。

4、確保等腰梯形的長底互相對接，短底則對接正三角形的邊。

(二) 展開圖的繪製：

1. 中心主體： 畫一個正三角形。
2. 第一層圍繞： 在三條邊上分別接上 3 個等腰梯形。
3. 在這 3 個梯形的「長底」外側，各接上一個正三角形。
4. 填補剩餘梯形： 剩下的梯形，需接在剩餘邊上。
5. 閉合邊緣： 將梯形向上摺疊時，這些梯形的斜邊會互相密合。

(三) 從立體到展開圖

- 1、基本立體凸形龜需要三張元件
- 2、組合成截角正方體需要四組基本元件
- 3、

(四)等腰梯形:在圓內的等腰梯形有何特性

- 1、腰長=上底
- 2、在圓內的等腰梯形，底角及頂角相同，通常與下底相同，上底不一定相同。
- 3、下底等於上底兩倍，這個梯形是「正六邊形的一半」。
- 4、如果兩個全等的等腰梯形可以拼成一個正六邊形，那麼等腰梯

形必定可以形成密鋪。

(五)等腰梯形尺規作圖：利用尺規作圖的方式畫出正六邊形，先用尺畫出一條任意長度的線段，線段為半徑畫圓，圓上任一點為圓心，再以半徑長度在圓上畫記，並以前一個記號為圓心繼續以半徑長度畫記，相鄰兩點連結即構成一正六邊形。再以圓心取任意小於半徑的長度畫同心圓，圓心六點分別與圓心連線，再將小圓與連弦香蕉的點連成線段，就能畫出抵繳 60 度的等腰梯形。

陸、結論

一、 幾何構造邏輯

若要將 12 個等腰梯形與 4 個正三角形組合成一個封閉立體，您腦海中可以想像一個「截角四面體」。梯形的存在是為了「過渡」正三角形之間的角度，使得平面能彎曲並閉合。每個正三角形的邊必須對應一個梯形的短底，而梯形的兩個斜邊則負責與鄰近的梯形側邊密合。這種對稱性確保了立體成型後的穩定度。

二、 等腰梯形與正六邊形的關係

資料中提到「下底為上底兩倍的梯形是正六邊形的一半」，這其實是幾何密鋪中最優雅的特性。當兩個這樣的梯形底對底拼接，或六個梯形環繞中心排列時，正好可以拼成一個正六邊形。這就是為什麼它們能作為密鋪單元，進而推導出截角多面體的表面積結構。

三、 圓相割與梯形的幾何關聯

利用兩圓相割產生的「共同弦」作為梯形的下底，是一個極具創意的作圖突破。

- 1、 **共圓性質：** 在幾何學中，只有等腰梯形才能擁有外接圓（圓內接四邊形對角互補）。
- 2、 **作圖原則：** 當兩圓相割時，其交點連線（弦）決定了梯形最寬的部分。透過調整同心圓的半徑來決定「上底」，可以確保每一片梯形在銜接時，其**腰長與角度**都能保持高度的對稱性與一致性。

三、柏拉圖多面體與凸型龜的結合:展開圖來排列梯形，本質上是對這些經典多面體進行了表面置換：

1. 結構重組：將原本多面體的一個平面，替換成由多個梯形構成的「凹凸結構」。
2. 摺線標記：資料中提到的「凹凸線用不同記號標示」，在紙藝與幾何模型中即為 山摺 與 谷摺。這是將平面展開圖成功轉化為 3D 立體的關鍵指令。

五、展開圖的實作

利用透明片重疊來對照柏拉圖多面體，可以視為一種「幾何投影」。當您將等腰梯形的相連接部分重疊時，實際上是在尋找立體結構在攤平狀態下的**最短路徑與最佳密鋪方式**。

柒、未來展望

我們還組合了許多不同的形體，期待將來更加一步研究哭三層，甚至多層的形體展開圖，讓喜歡立體模型的同好也能享受創意的樂趣。

