

屏東縣第 66 屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：作數學，愛地球

關 鍵 詞：環保、 、 （最多三個）

編號：B1012

作數學，愛地球

摘要

從日常生活中習以為常的小細節，透過細心的觀察，多一點發想，多一點的為什麼？從鋪地磚到寶特瓶排列的方式，依據正方形、正三角形、圓形的性質，能否解省紙張的浪費？在固定的面積中是否可尋求排列個數的最優化？

壹、研究動機

老師在教完國二多邊形的性質後，問了大家一個問題，大家除了夠受地磚圖形之美，可曾留意地磚鋪設的方式？透過彼此七嘴八舌地討論，得到結論只有正三角形、正方形、正六邊形，不必裁切可密合地鋪地磚。下課後，大伙兒直衝福利社，大肆瘋狂採購之餘，承安突然大叫一聲，讓彼此面面相覷，以為發生甚麼騷擾事件，承安竟然問大家寶特瓶只能排成方方正正的？此一語驚醒夢中人，引起大家決定好好探討這一生活中的數學問題。

貳、研究目的

- 一、在邊長 $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ 的正方形可排入幾種直徑為 1cm 的圓？
- 二、在邊長 $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ 的正方形，幾種直徑為 1cm 的圓中，所有

圓的面積與原正方形面積之比例關係？

三、在邊長 $X\text{cm} \times Y\text{cm}$ 的長方形，幾種直徑為 1cm 的圓中，所有

圓的面積與原長方形面積之比例關係？

叁、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP 繪圖軟體、EXCEL、國中課本

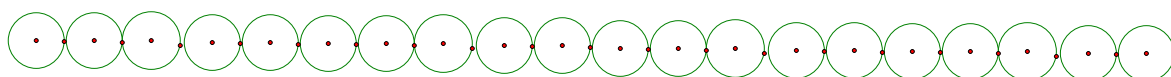
肆、研究過程

將立體紙箱簡化成為一個平面，寶特瓶簡化成為一個圓：

將 20 個直徑為 1cm 的小圓排列成長方形，共有幾種排法？

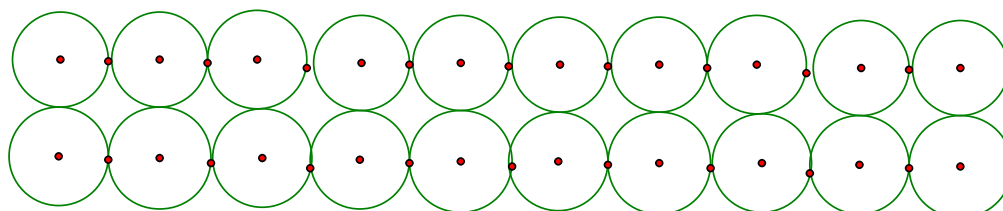
一、基本型(正方字型)：

(1) 1×20



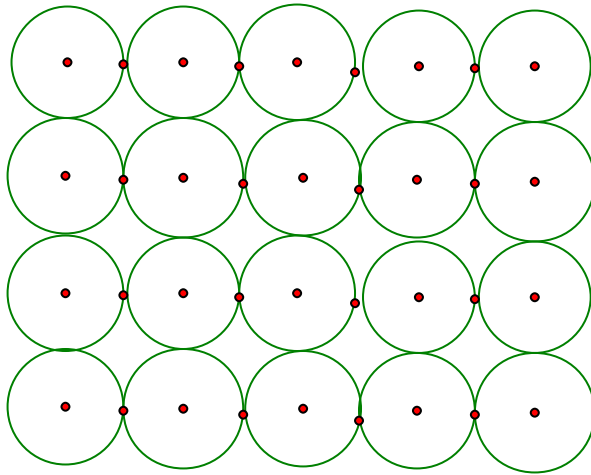
$$\frac{20 \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 \times 20} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

(2) 2×10



$$\frac{20 \times \pi \times (\frac{1}{2})^2}{2 \times 10} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

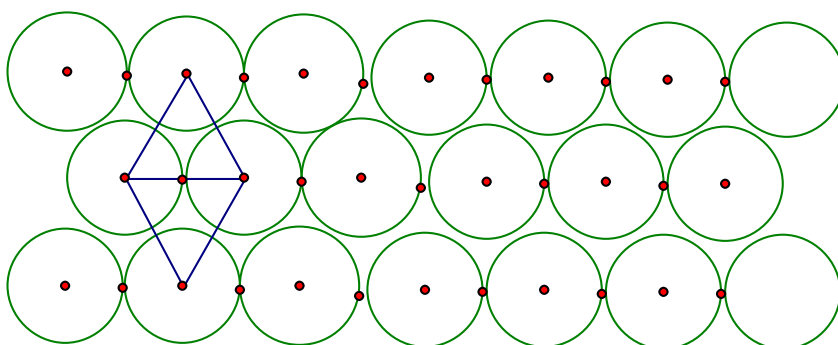
(3)4×5



$$\frac{20 \times \pi \times (\frac{1}{2})^2}{4 \times 5} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

二、正三角型：

(7, 6, 7)



$$\frac{20 \times \pi \times (\frac{1}{2})^2}{7 \times (\sqrt{3} + 1)} = \frac{5\pi}{7 \times (\sqrt{3} + 1)} \approx 0.821$$

→ 正方字型所需紙張面積：1×20=20

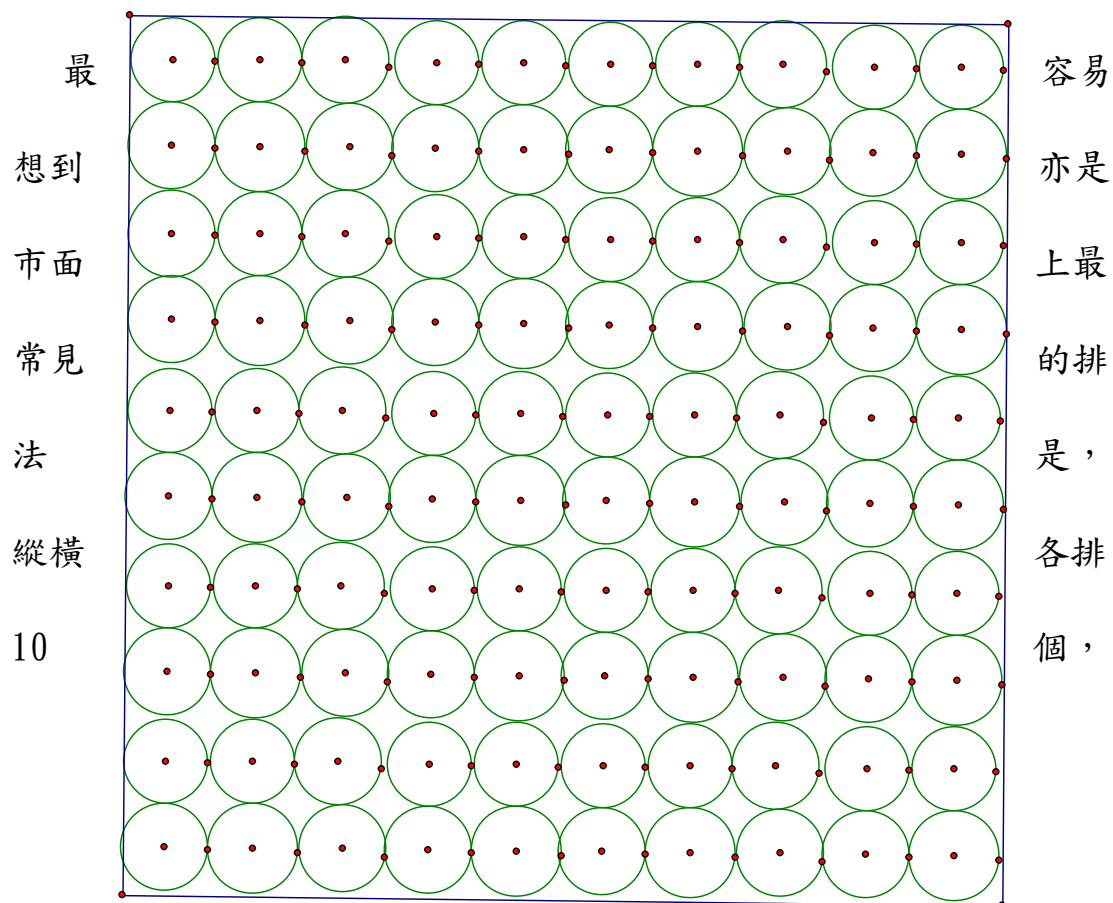
正三角形所需紙張面積：7×(√3+1)≈19.14

∴相同數目的圓，正三角形較節省包裝紙張

伍、進一步研究

在邊長 10cm×10cm 的正方形最多可排入幾個直徑為 1cm 的圓？

一、基本型(正方字型)



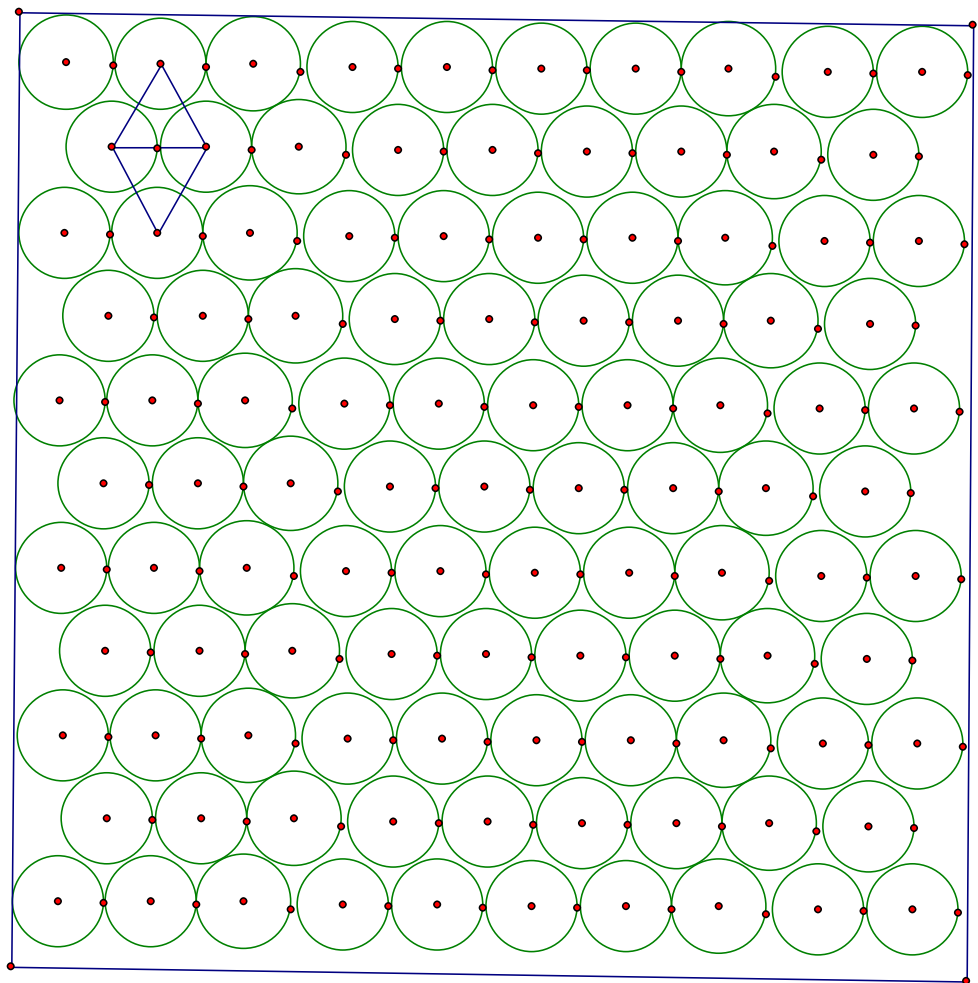
$$10 \times 10 = 100 \text{ 個}$$

二、正三角型

若為了解省空間，使用排空戲法，是否可排出更多的圓？

$$(1) 10-9-10-9-10-9-10-9-10$$

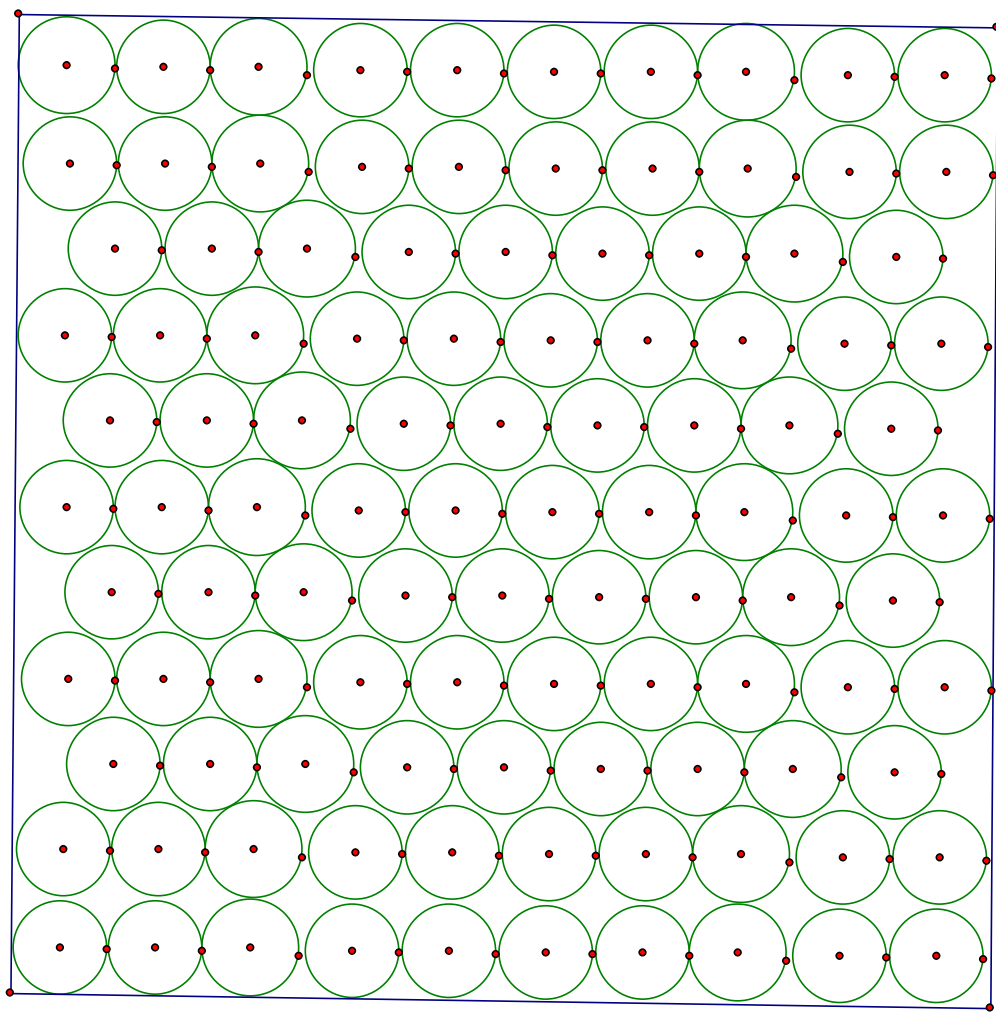
$$\rightarrow 10 \times 6 + 9 \times 5 = 105 ?$$



$$2 \times 0.5 + (11 - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 5\sqrt{3} \approx 9.66 < 10$$

$$(2) 10 - 10 - 9 - 10 - 9 - 10 - 9 - 10 - 9 - 10 - 10$$

$$\rightarrow 10 \times 7 + 9 \times 4 = 106 ?$$



$$2 \times 1 + 2 \times 0.5 + (9 - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 4\sqrt{3} \approx 9.928 < 10$$

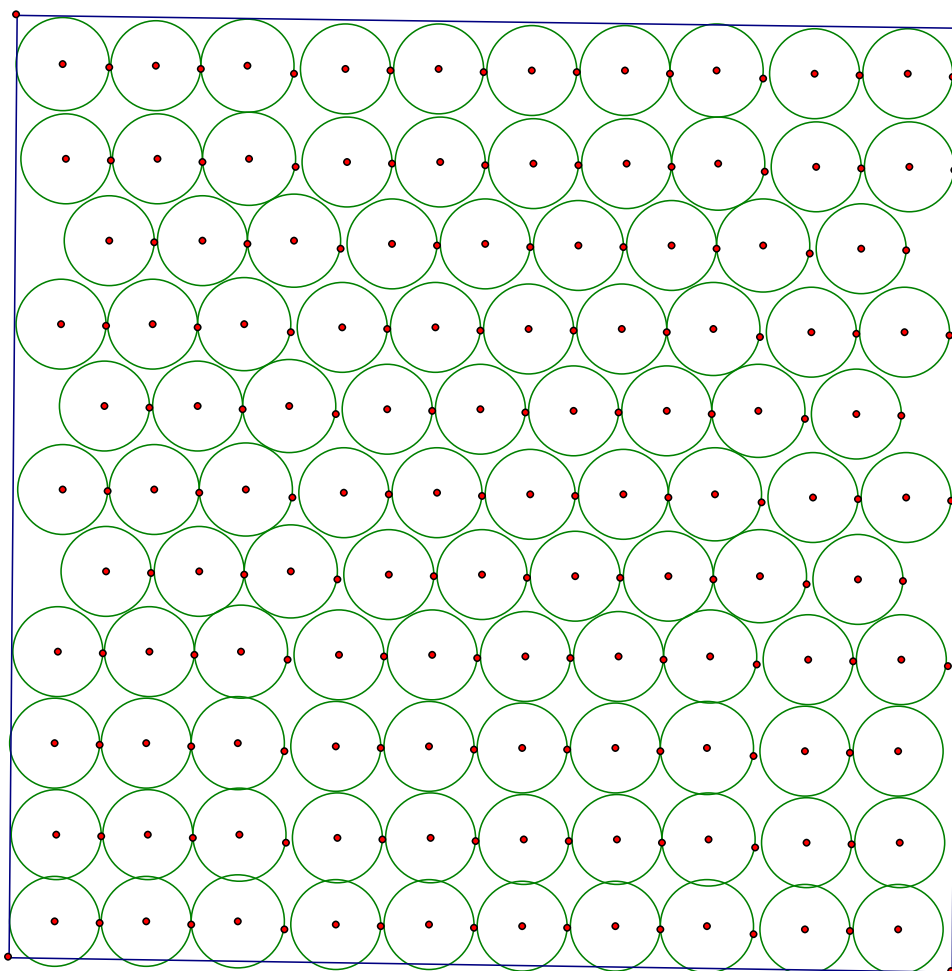
→ 正方字型所需紙張面積： $10 \times 10 = 100$

正三角形所需紙張面積： $10 \times (4\sqrt{3} + 3) \approx 99.28$

∴ 相同數目的圓，正三角形較節省包裝紙張

(3) 10-10-9-10-9-10-9-10-10-10-10

→ $10 \times 8 + 9 \times 3 = 107$?



$$4 \times 1 + 2 \times 0.5 + (7-1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 + 3\sqrt{3} \approx 10.196 > 10$$

→ 無法擺入第 11 排

→ 在邊長 10cm×10cm 的正方形最多可排入 106 個

直徑為 1cm 的圓

陸、推導公式

設在一長為 X 、寬為 Y 的長方形中，欲排入若干個半徑為 r 的圓，

且每兩橫列相同數目之圓心距離為 $2a$ ， p 為直行每排圓的個數，

q 為橫列每排圓的個數

一、基本型(正方字型)

$$\text{圓占比例} : \frac{n\pi r^2}{xy} \times 100\% = \frac{\left(\frac{x}{2r}\right) \times \left(\frac{y}{2r}\right) \times \pi r^2}{xy} \times 100\% = \frac{\pi}{4} \times 100\% \approx 78.5\%$$

不受 x, y, r 影響

二、正三角型

$$\rightarrow 2a = 2 \times 2r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}r, a = \sqrt{3}r$$

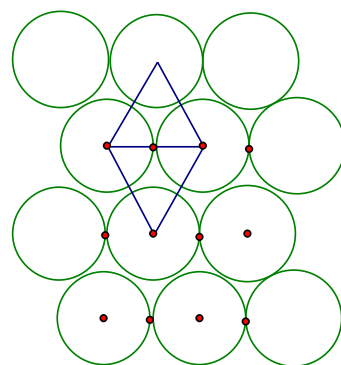
$$\rightarrow y = 2r + (p-1)a$$

$$y = 2r + (p-1)\sqrt{3}r$$

$$\therefore p = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{y}{r} - 2 \right)$$

$$x = 2r \times q + r$$

$$\rightarrow q = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{r} - 1 \right)$$



$$\therefore \text{圓的總個數} : n = [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{y}{r} - 2)] \times [\frac{1}{2}(\frac{x}{r} - 1)]$$

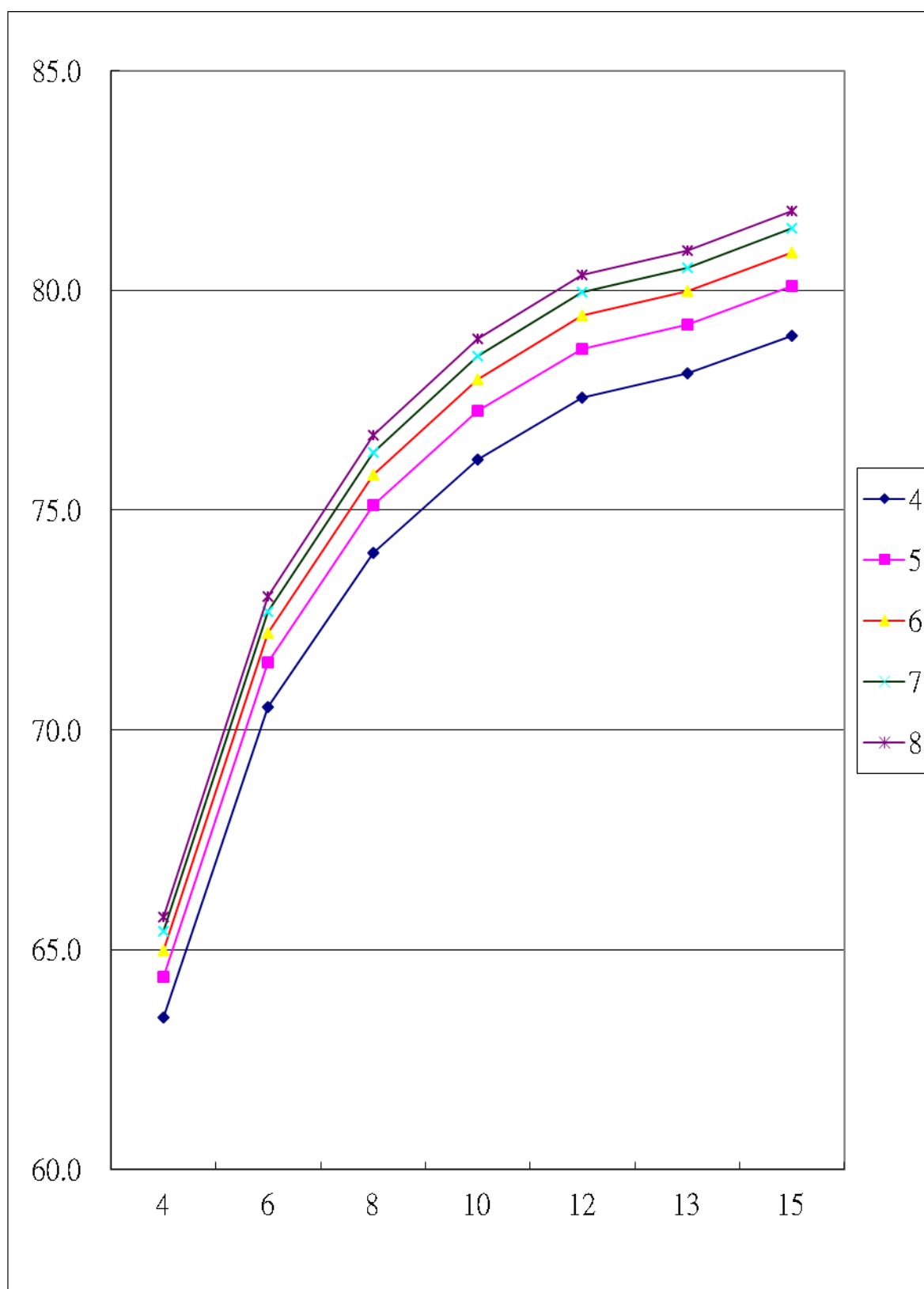
$$\text{圓占比例} : \frac{n\pi r^2}{xy} \times 100\%$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}(\frac{x}{r} - 1)[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{y}{r} - 2)]}{\frac{x}{r} \times \frac{y}{r}} \times 100\%$$

→ 受 $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$ 之值影響

$\frac{x}{r}$ 為橫軸, $\frac{y}{r}$ 為縱軸

	4	6	8	10	12	13	15
4	63.5	70.5	74.0	76.2	77.6	78.1	79.0
5	64.4	71.5	75.1	77.2	78.7	79.2	80.1
6	65.0	72.2	75.8	78.0	79.4	80.0	80.9
7	65.4	72.7	76.3	78.5	80.0	80.5	81.4
8	65.7	73.0	76.7	78.9	80.3	80.9	81.8



→ 當 $\frac{x}{r} \geq 12, \frac{y}{r} \geq 5$ 及 $\frac{x}{r} \geq 10, \frac{y}{r} \geq 7$ 時，” 正三角型” 圓占比例優於 ” 基本型” ；反之，” 基本型” 圓占比例優於 ” 正三角型”

三、實測

1、依據實際測量福利社寶特瓶紙箱，底面

長：39cm，寬：26cm，高：23cm 的 24

瓶裝礦泉水，礦泉水底部的圓半徑

3.25cm，按公式可知 $\frac{39}{3.25} = 12, \frac{26}{3.25} = 8$ ，

故合乎” 正三角型” 圓占比例優於

” 基本型” ；且經計算得之，

基本型面積 $39 \times 26 = 1014$ ，正三角型面積

$42.25 \times 23.39 \approx 988.1$ ，正三角型約可解省

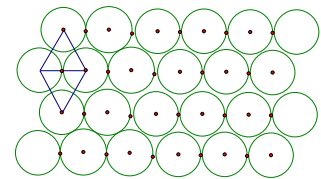
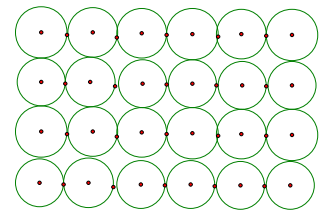
25.9 cm^2 的紙張。

實際總表面積：

基本型： $2 \times 39 \times 26 + 2 \times 39 \times 23 + 2 \times 26 \times 23 = 5018$

正三角型： $2 \times 42.25 \times 23.39 + 2 \times 42.25 \times 23 + 2 \times 23.39 \times 23 = 4995.90$

正三角型一箱約可節省 22.1 cm^2 的紙張。



2、依據實際測量福利社易開罐紙箱，底面

長：21cm，寬：14cm，高：11.5cm 的 6 瓶裝可樂，

可樂底部的圓半徑 3.5cm，按公式可

知 $\frac{21}{3.5} = 6, \frac{14}{3.5} = 4$ ，故合乎”基本型”

圓占比例優於”正三角型”；且經計算得之，

基本型面積 $21 \times 14 = 294$ ，正三角型面積

$24.5 \times 13.062 \approx 320.019$ ，基本型約可解省 26.02 cm^2 的

紙張。

實際總表面積：

基本型： $2 \times 21 \times 14 + 2 \times 21 \times 11.5 + 2 \times 14 \times 11.5 = 1393$

正三角型：

$2 \times 24.5 \times 13.062 + 2 \times 24.5 \times 11.5 + 2 \times 13.062 \times 11.5 = 1503.97$

基本型一箱約可節省 110.97 cm^2 的紙張。

柒、結論

一、在邊長 $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ 的正方形最多可排入 106 個

直徑為 1cm 的圓。

二、設在一長為 X、寬為 Y 的長方形中，欲排入若干個

半徑為 r 的圓，且每兩橫列相同數目之圓心距離為 2a，

m 為直行每排圓的個數，n 為橫列每排圓的個數

當面積固定排成基本型(正方字型)時，圓占比例：

$$\frac{n\pi r^2}{xy} \times 100\% = \frac{\left(\frac{x}{2r}\right) \times \left(\frac{y}{2r}\right) \times \pi r^2}{xy} \times 100\% = \frac{\pi}{4} \times 100\% \approx 78.5\%$$

不受 x, y, r 影響

三、當面積固定排成正三角形

$$\text{圓占比例：} \frac{n\pi r^2}{xy} \times 100\%$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{r} - 1\right) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{y}{r} - 2\right)\right]}{\frac{x}{r} \times \frac{y}{r}} \times 100\%$$

→ 受 $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$ 之值影響

四、當 $\frac{x}{r} \geq 12, \frac{y}{r} \geq 5$ 及 $\frac{x}{r} \geq 10, \frac{y}{r} \geq 7$ 時，”正三角型”圓占比

例優於”基本型”；反之，”基本型”圓占比

優於 ”正三角型”

五、實測結果，福利社販售 24 罐裝的礦泉水應使用正三角型

排列法較優，且可節省 25.9 cm^2 的紙張；實際總表面積：

正三角型一箱約可節省 22.1 cm^2 的紙張。。反之，6 瓶罐

裝的可樂應使用基本型排列法較優，且可節省 26.02 cm^2 的

紙張；實際總表面積：基本型一箱約可節省 110.97 cm^2 的

紙張。

六、台灣每年至少用掉 45 億隻寶特瓶、650 億個鋁罐，其包裝紙盒的使用量相當可觀，若能適當使用工業自動化，配合數學精密的計算，必能減少森林樹木的砍伐及生態環境的破壞。減少溫室氣體排放，愛護這塊土地是我們每一個地球人責無旁貸的使命。

玖、參考書目

一、國中數學課本(八上)-----康軒出版社

二、國中數學課本(八下)-----康軒出版社