屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

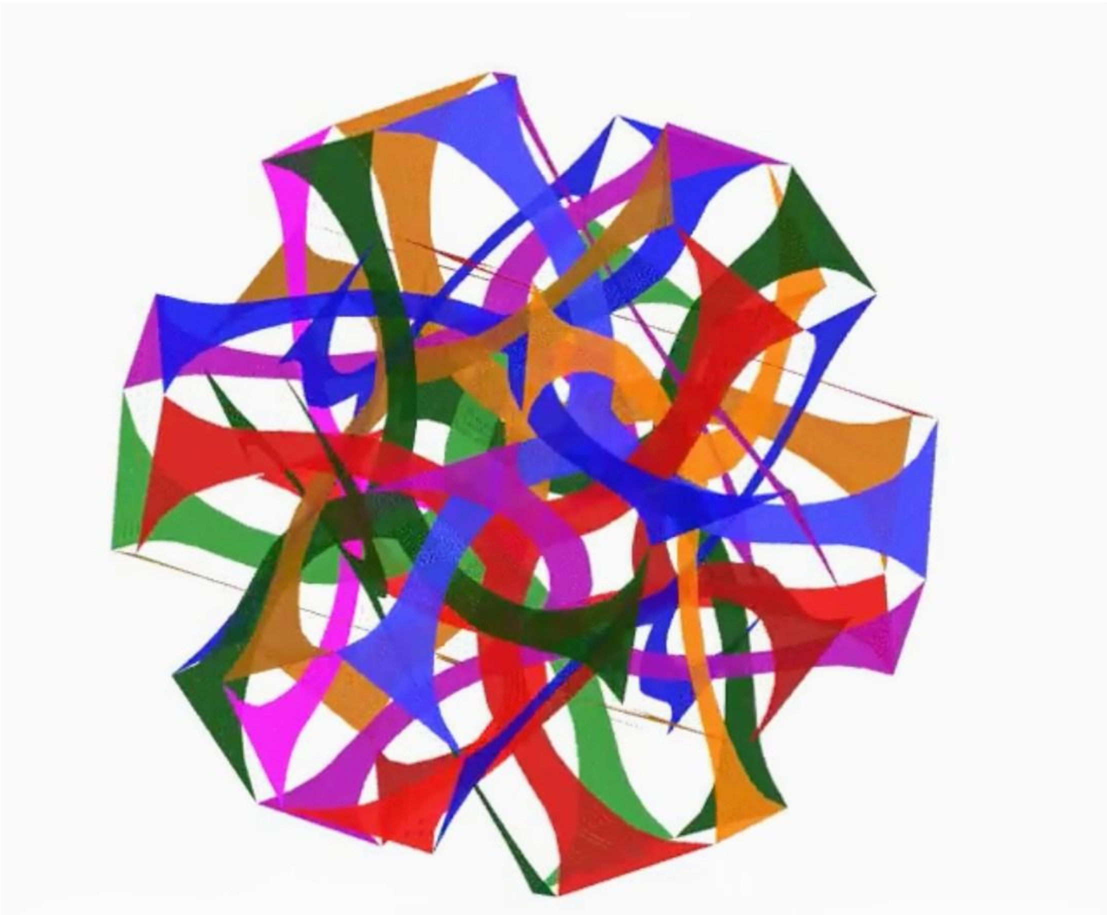
作品名稱：藝數之美~~~~形中有形

關鍵詞：遞迴關係式、數學歸納法、貝爾數

編號：B1010

藝數之美

形中有形



藝數之美~~~~形中有形

摘要

此研究是針對任意三角形各邊頂點，與對邊等分點連線所形成之小三角形與原三角形面積之比例關係。利用△相似形之性質與定理，求得三邊等分點所形成△面積與原△面積的比例關係，依此法對各邊長做比例上的變化，進一步追尋通則公式。再推廣至立體空間，藉由 3D 列印將抽象概念與實際立體結合，激發出令人讚嘆的火花。

壹、 研究動機

國立台灣科教館歷屆參展作品的資料中，發現很熱門的主題之一”莫利定理”。”將△三內角作三分線，靠近公共邊三分線的三個交點，可形成一個正△。這定理似乎與老師在課堂上曾經提過的一道補充題目：’正△將各邊三等分點，且由三頂點依序連接下一邊的第一等分點，所形成之三角形亦是正△。”頗為雷同；於是大伙兒突發奇想，立即詢問老師，是否可轉換方向，從角度切換成長度，尤其是各頂點依逆(順)時針方向連接鄰邊的等分點，連線所形成交點共有三交點所構成之三角形與原三角形是否有相對性？

貳、 研究目的

一、 探討△在不同比例下，各頂點與等分點連線之交點，依序連接交點所形成小△，觀察特性及其與原△之比例關係，並證明。
二、 探討正方形在不同比例下，各頂點與等分點連線之交點，依序連接交點所形成小正方形，觀察特性及其與原正方形之比例關係，並加以證明。
三、 探討平行四邊形在不同比例下，各頂點與等分點連線之交點，依序連接交點所形成小平行四邊形，觀察特性及其與原平行四邊形之比例關係，並加以證明。
四、 探討正五邊形、正六邊形在不同比例下，各頂點與等分點連線之交點，依序連接交點所形成小正五邊形、小正六邊形，觀察特性及其與原正五邊形、正六邊形之比例關係，並加以證明。
五、 探討正 n 邊形在不同比例下，各頂點與等分點連線之交點，依序連接交點所形成小正 n 邊形，觀察特性及其與原正 n 邊形之比例關係，並加以證明。

六、 正立方體各邊比例為 1:1 的依規則所形成的小正方形，
利用上下、左右、前後貫穿所形成立體圖形與原正立方體
之體積比例關係，並加以證明。

參、 研究設備及器材

紙、筆、GSP 繪圖軟體、電腦、123D Design、sketcup up 2019
3D 列印

肆、 研究過程

頂點與各等分點連線所形成交點之圖形和原圖形面積之比較規
則如下:

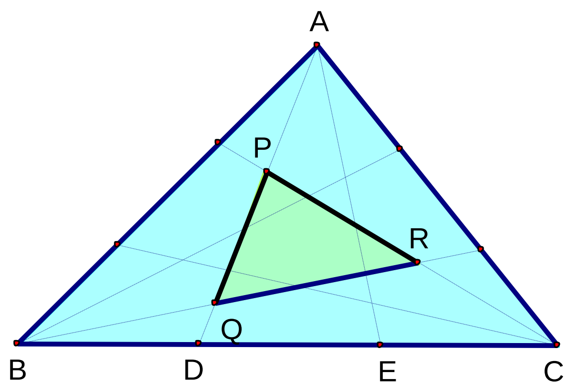
(一) 第一頂點與對邊第一等分點連線，第二頂點與對邊第一
等分點連線，兩線有第一交點，依序形成第二、三交點，
並連接三交點成一小△，與原三角形面積比例關係。

(二) 第一頂點與對邊第一等分點連線，第二頂點與對邊第二
等分點連線，兩線有第一交點，依序形成第二、三交點，
並連接三交點成一小△，與原三角形面積比例關係。

(三) 第一頂點與對邊第二等分點連線，第二頂點與對邊第二
等分點連線，兩線有第一交點，依序形成第二、三交點，
並連接三交點成一小△，與原三角形面積比例關係。

一.各邊比例均為 a:b:c 之三角形

(一)



在△ABC 中依據孟氏定理

$$\overline{AQ}:\overline{QD}=(b+c)(a+b+c):a^2$$

$\triangle$ABQ=$\dfrac{(b+c)(a+b+c)}{a^2+(b+c)(a+b+c)}$ $\triangle$ABD

$=\dfrac{(b+c)(a+b+c)}{a^2+(b+c)(a+b+c)}\times\dfrac{a}{(a+b+c)}$ $\triangle$ABC

$=\dfrac{a(b+c)}{a^2+(b+c)(a+b+c)}$ $\triangle$ABC

$\rightarrow\triangle$PQR=$[1-3\times\dfrac{a(b+c)}{a^2+(b+c)(a+b+c)}]$ $\triangle$ABC

$=\dfrac{a^2+(b+c)(b+c-2a)}{a^2+(b+c)(a+b+c)}$ $\triangle$ABC

得到公式 $\triangle$PQR:$\triangle$ABC

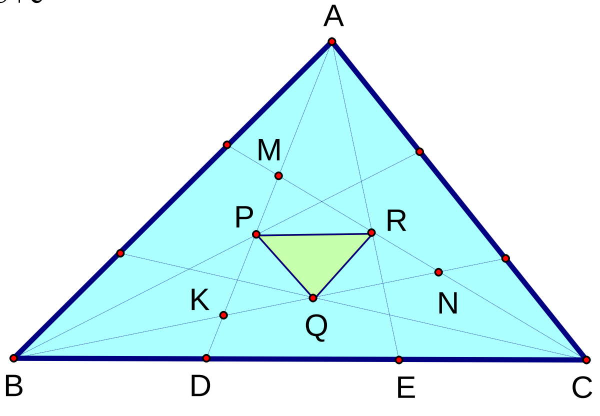
$=a^2+(b+c)(b+c-2a):a^2+(b+c)(a+b+c)$

$=(b+c-a)^2:a^2+(b+c)\times(a+b+c)$

PS.a=b+c→重心無法形成小三角形

(二)

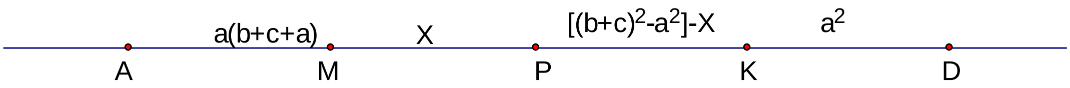
1.a≠b+c



$\overline{AK}:\overline{KD}=(b+c)(a+b+c):a^2$

$\overline{AP}:\overline{PD}=c(a+b+c):a(a+b)$

$$\overline{AM}:\overline{MD}=a(a+b+c):(b+c)^2$$



$$\rightarrow \overline{MP}:\overline{PK}=[c(b+c)^2-a^2(a+b)]:ab(a+b+c)$$

∴△PQR

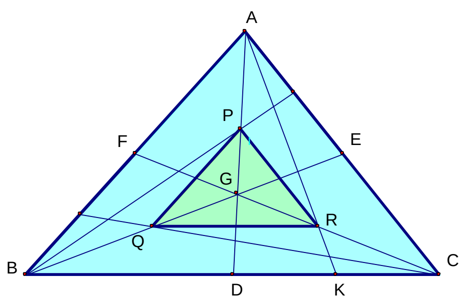
$$=\{1-3\times[\frac{c(b+c)^2-a^2(a+b)}{c(b+c)^2-a^2(a+b)+ab(a+b+c)}\times\frac{ab(a+b+c)}{c(b+c)^2-a^2(a+b)+ab(a+b+c)+a(a+b)}]\}\triangle KMN$$

$$=\{1-3\times[\frac{c(b+c)^2-a^2(a+b)}{c(b+c)^2-a^2(a+b)+ab(a+b+c)}\times\frac{ab(a+b+c)}{c(b+c)^2-a^2(a+b)+ab(a+b+c)}]\}\times\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)(a+b+c)}\triangle ABC$$

∴ 得到公式△PQR:△ABC=

$$\{1-3\times[\frac{c(b+c)^2-a^2(a+b)}{c(b+c)^2-a^2(a+b)+ab(a+b+c)}\times\frac{ab(a+b+c)}{c(b+c)^2-a^2(a+b)+ab(a+b+c)}]\}\times\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)(a+b+c)}:1$$

2.a =b+c



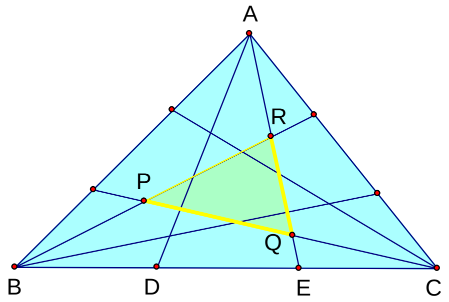
在△ACD 中依據孟氏定理

$$\overline{GR}:\overline{RC}=2b:3c \qquad \overline{GR}:\overline{GC}=\overline{PR}:\overline{AC}=2b:(2b+3c)$$

得到公式△PQR:△ABC

$$=(2b)^2:(2b+3c)^2$$

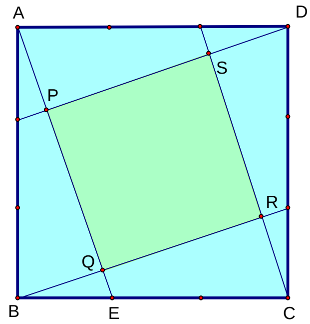
(三)



同(一)得到公式△PQR:△ABC$=(a+b-c)^2:c^2+(a+b)\times(a+b+c)$

二.各邊比例均為 1:b:c 之正方形

(一)



在△ABE 中依據母子相似定理

$$\overline{AQ}:\overline{QE}=(1+b+c)^2:1$$

△ABQ=$\frac{(1+b+c)}{(1+b+c)^2+1}$ △ABC $=\frac{1}{2}\times\frac{(1+b+c)}{(1+b+c)^2+1}$□ABCD

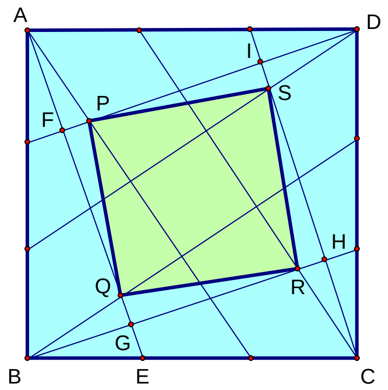
→□PQRS=$[1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{(1+b+c)}{(1+b+c)^2+1}]$□ABCD

$$=\frac{(b+c)^2}{(1+b+c)^2+1}$$□ABCD

∴得到公式□PQRS:□ABCD

$$=(b+c)^2:(1+b+c)^2+1$$

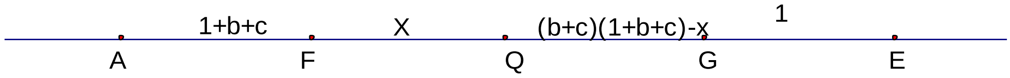
(二)



$$\overline{AG}:\overline{GE}=(1+b+c)^2:1$$

$$\overline{AQ}:\overline{QE}=(1+b+c)^2:(1+b)$$

$$\overline{AF}:\overline{FE}=(1+b+c):(b+c)(1+b+c)+1$$

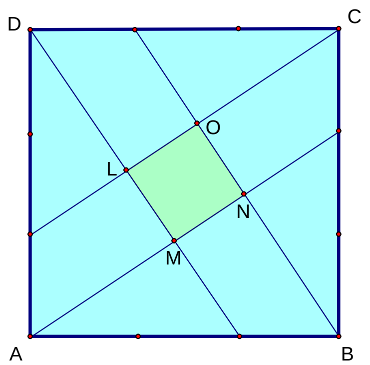


$$\rightarrow \overline{FQ}:\overline{QG}=[(b+c)(1+b+c)^2+c]:[(1+b)(b+c)-c]$$

∴經由(1)得到公式□PQRS:□ABCD

$$=[1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{(b+c)(1+b+c)^2+c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}\times\frac{(1+b)(b+c)-c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}]\times\frac{(b+c)^2}{(1+b+c)^2+1}:1$$

(三)

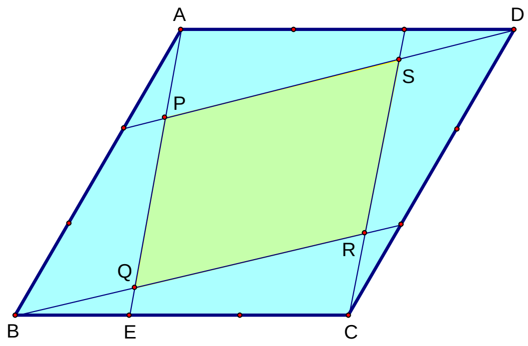


同(一) ∴得到公式□LMNO:□ABCD

$$=c^2:(1+b+c)^2+(1+b)^2$$

三.各邊比例均為 1:b:c 之平行四邊形

(一)



$$\overline{AQ}:\overline{QE}=(1+b+c)^2:1$$

$$\triangle\text{ABQ}=\frac{(1+b+c)}{(1+b+c)^2+1}\ \triangle\text{ABC}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{(1+b+c)}{(1+b+c)^2+1}\square\text{ABCD}$$

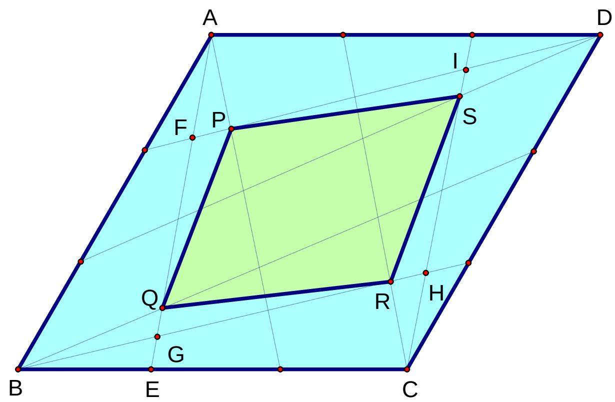
$$\rightarrow\square\text{PQRS}=[1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{(1+b+c)}{(1+b+c)^2+1}]\square\text{ABCD}$$

$$=\frac{(b+c)^2}{(1+b+c)^2+1}\square\text{ABCD}$$

∴得到公式□PQRS:□ABCD

$$=(b+c)^2:(1+b+c)^2+1$$

(二)



$$\overline{AG}:\overline{GE}=(1+b+c)^2:1$$

$$\overline{AQ}:\overline{QE}=(1+b+c)^2:(1+b)$$

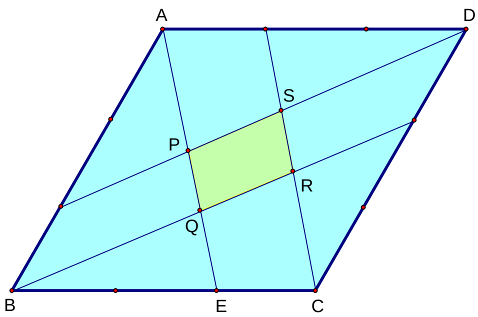
$$\overline{AF}:\overline{FE}=(1+b+c):(b+c)(1+b+c)+1$$

$$\rightarrow \overline{FQ}:\overline{QG}=[(b+c)(1+b+c)^2+c]:[(1+b)(b+c)-c]$$

∴經由(1)得到公式□PQRS:□ABCD

$$=[1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{(b+c)(1+b+c)^2+c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}\times\frac{(1+b)(b+c)-c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}]\times\frac{(b+c)^2}{(1+b+c)^2+1}:1$$

(三)



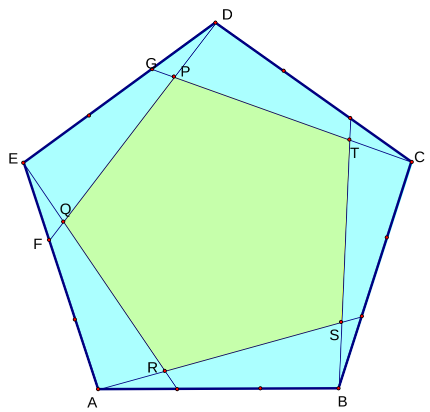
同(一) ∴得到公式□PQRS:□ABCD

$$=c^2:(1+b+c)^2+(1+b)^2$$

四.各邊比例均為 1:b:c 之正五邊形

(一)

設



$$\overline{DF}=r=\sqrt{(1+b+c)^2+1^2-2\times(1+b+c)\times1\times\cos108°}=\sqrt{(1+b+c)^2+1+2(1+b+c)\cos72°}$$

∵△DPG~△DEF $\therefore\frac{\overline{DG}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{GP}}{\overline{EF}}$

$$\frac{1}{r}=\frac{\overline{DP}}{(1+b+c)}=\frac{\overline{GP}}{1} \quad \rightarrow \overline{DP}=\frac{(1+b+c)}{r}, \overline{GP}=\frac{1}{r}$$

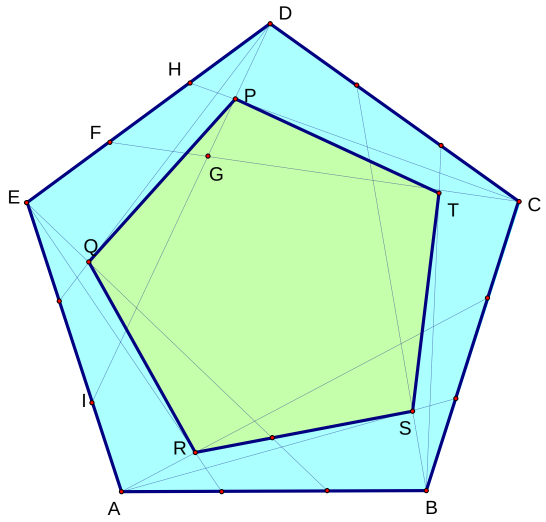
$$\overline{PQ}=r-\frac{(1+b+c)}{r}-\frac{1}{r}=\frac{r^2-(2+b+c)}{r}$$

得到公式正五邊形 PQRST:正五邊形 ABCDE

$$=\left(\frac{r^2-(2+b+c)}{r}\right)^2:(1+b+c)^2$$

(二)

設



$$\overline{DI}=r=\sqrt{(1+b+c)^2+(1+b)^2+2\times(1+b+c)\times(1+b)\times\cos 72^\circ}$$

∵△DFG~△DIE $\quad \therefore \dfrac{\overline{FG}}{\overline{IE}}=\dfrac{\overline{GD}}{\overline{ED}}=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{DI}}$

$$\frac{\overline{FG}}{(1+b)}=\frac{\overline{GD}}{(1+b+c)}=\frac{(1+b)}{r}$$

$$\rightarrow \overline{FG}=\frac{(1+b)^2}{r}, \overline{GD}=\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}$$

在△DFC 中依據孟氏定理

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{HF}}\times\frac{\overline{FC}}{\overline{CG}}\times\frac{\overline{GP}}{\overline{PD}}=1 \qquad \frac{1}{b}\times\frac{r}{r-\dfrac{(1+b)^2}{r}}\times\frac{\overline{GP}}{\overline{PD}}=1$$

$$\therefore \frac{\overline{GP}}{\overline{PD}}=\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2} \qquad \overline{GP}=\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}$$

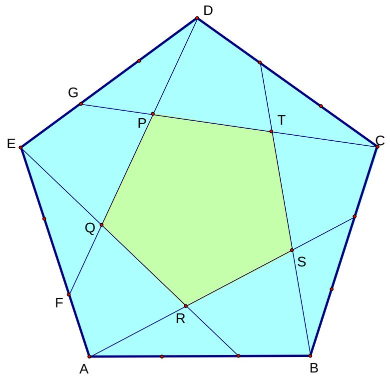
$$\overline{PD}==\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]} \qquad \overline{GT}=r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}$$

$$\overline{PT}^2=\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2+\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2$$
$$-2\times\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\cos 72°$$

得到公式正五邊形 PQRST:正五邊形 ABCDE

$$=\overline{PT}^2:(1+b+c)^2$$

(三)



設

$$\overline{DF}=r=\sqrt{(1+b+c)^2+(1+b)^2+2\times(1+b+c)\times(1+b)\times\cos 72°}$$

$\because$△DPG~△DEF $\therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{GP}}{\overline{EF}}$ $\quad \frac{(1+b)}{r}=\frac{\overline{DP}}{(1+b+c)}=\frac{\overline{GP}}{(1+b)}$

$$\rightarrow \overline{DP}=\frac{(1+b)(1+b+c)}{r},\overline{GP}=\frac{(1+b)^2}{r}$$

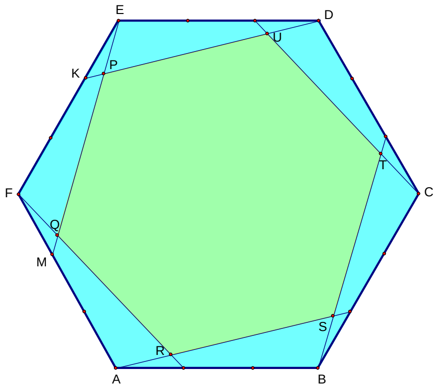
$$\overline{PQ}=r-\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}-\frac{(1+b)^2}{r}=\frac{r^2-(1+b)(2+2b+c)}{r}$$

得到公式 正五邊形 PQRST :正五邊形 ABCDE

$$=[\frac{r^2-(1+b)(2+2b+c)}{r}]^2:(1+b+c)^2$$

五.各邊比例均為 1:b:c 之正六邊形

(一)



設

$$\overline{EM} = r = \sqrt{(1+b+c)^2 + 1^2 - 2\times(1+b+c)\times 1\times\cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{(1+b+c)^2 + 1 + 2(1+b+c)\cos 60^\circ}$$

$\because \triangle EPK \sim \triangle EFM$ $\quad\therefore \dfrac{\overline{EP}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{PK}}{\overline{FM}} = \dfrac{\overline{EK}}{\overline{EM}}$

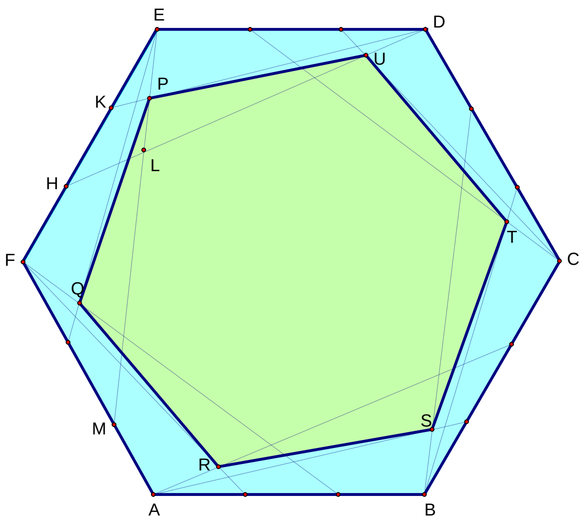
$$\frac{1}{r} = \frac{\overline{EP}}{(1+b+c)} = \frac{\overline{PK}}{1} \quad \rightarrow \overline{EP} = \frac{(1+b+c)}{r}, \overline{PK} = \frac{1}{r}$$

$$\overline{PQ} = r - \frac{(1+b+c)}{r} - \frac{1}{r} = \frac{r^2-(2+b+c)}{r}$$

得到公式 正六邊形 PQRSTU:正六邊形 ABCDEF

$$= \left(\frac{r^2-(2+b+c)}{r}\right)^2 : (1+b+c)^2$$

(二)



設

$$\overline{EM}=r=\sqrt{(1+b+c)^2+(1+b)^2+2\times(1+b+c)\times(1+b)\times\cos 60^\circ}$$

$\because$△EHL~△EFM $\qquad \therefore \dfrac{\overline{EM}}{\overline{EH}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{EL}}=\dfrac{\overline{FM}}{\overline{HL}}$

$$\frac{\overline{HL}}{(1+b)}=\frac{\overline{EL}}{(1+b+c)}=\frac{(1+b)}{r}\rightarrow\overline{HL}=\frac{(1+b)^2}{r},\overline{EL}=\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}$$

在△EHL 中依據孟氏定理

$$\frac{\overline{EK}}{\overline{KH}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{DL}}\times\frac{\overline{LP}}{\overline{PE}}=1 \qquad \frac{1}{b}\times\frac{r}{r-\dfrac{(1+b)^2}{r}}\times\frac{\overline{LP}}{\overline{PE}}=1$$

$$\therefore\frac{\overline{LP}}{\overline{PE}}=\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2}$$

$$\overline{LP}=\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]} \qquad \overline{PE}==\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}$$

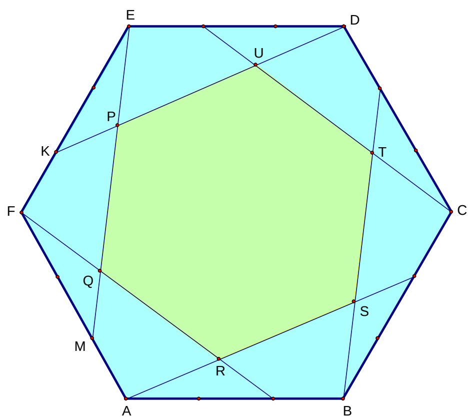
$$\overline{LU}=r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}$$

$$\overline{PU}^2=\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2+\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2$$
$$-2\times\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\cos 60^\circ$$

得到公式正六邊形 PQRSTU:正六邊形 ABCDEF

$$=\overline{PU}^2:(1+b+c)^2$$

(三)



設 $\overline{EM}=r=\sqrt{(1+b+c)^2+(1+b)^2+2\times(1+b+c)\times(1+b)\times\cos 60^\circ}$

$\because \triangle EPK \sim \triangle EFM$ $\therefore \frac{\overline{EP}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{PK}}{\overline{FM}}=\frac{\overline{EK}}{\overline{EM}}$

$$\frac{(1+b)}{r}=\frac{\overline{EP}}{(1+b+c)}=\frac{\overline{PK}}{(1+b)}$$

$$\rightarrow \overline{EP}=\frac{(1+b)(1+b+c)}{r},\overline{PK}=\frac{(1+b)^2}{r}$$

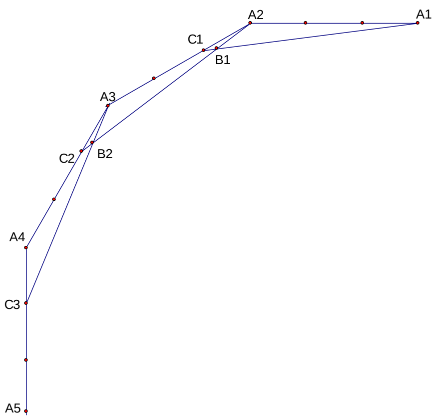
$$\overline{PQ}=r-\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}-\frac{(1+b)^2}{r}=\frac{r^2-(1+b)(2+2b+c)}{r}$$

得到公式正六邊形 PQRSTU：正六邊形 ABCDEF

$$=[\frac{r^2-(1+b)(2+2b+c)}{r}]^2:(1+b+c)^2$$

六.各邊比例均為 1:b:c 之正 n 邊形

(一)



設

$$\overline{A2C2}=r=\sqrt{(1+b+c)^2+1^2-2\times(1+b+c)\times1\times\cos(180-\theta)}$$

$$=\sqrt{(1+b+c)^2+1+2(1+b+c)\cos\theta},\theta=\frac{360°}{n}$$

$\because \triangle A2B1C1 \sim \triangle A2A3C2$ $\therefore \frac{\overline{A2B1}}{\overline{A2A3}}=\frac{\overline{B1C1}}{\overline{A3C2}}=\frac{\overline{A2C1}}{\overline{A2C2}}$

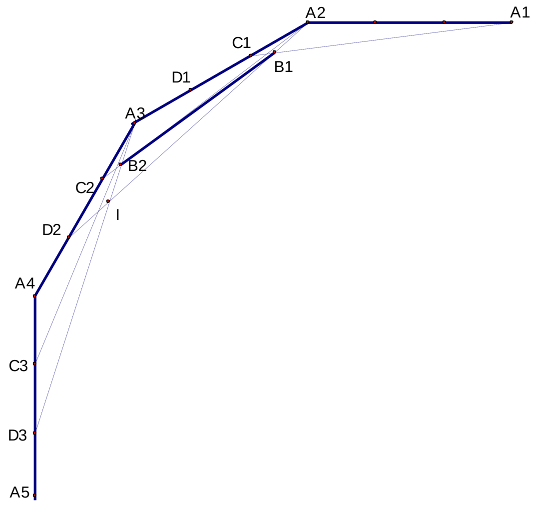
$$\frac{1}{r}=\frac{\overline{A2B1}}{(1+b+c)}=\frac{\overline{B1C1}}{1} \quad \rightarrow \overline{A2B1}=\frac{(1+b+c)}{r},\overline{B1C1}=\frac{1}{r}$$

$$\overline{B1B2}=r-\frac{(1+b+c)}{r}-\frac{1}{r}=\frac{r^2-(2+b+c)}{r}$$

得到公式正 n 邊形 B1B2…Bn:正 n 邊形 A1A2…An

$$=(\frac{r^2-(2+b+c)}{r})^2:(1+b+c)^2$$

(二)



設 $\overline{A2D2}=r=\sqrt{(1+b+c)^2+(1+b)^2+2\times(1+b+c)\times(1+b)\times\cos\theta},\theta=\frac{360°}{n}$

$\because \triangle A3D2I \sim \triangle A3D3A4 \qquad \therefore \frac{\overline{\overline{A3D2}}}{\overline{A3D3}}=\frac{\overline{\overline{D2I}}}{\overline{D3A4}}=\frac{\overline{\overline{A3I}}}{\overline{A3A4}}$

$\frac{(1+b)}{r}=\frac{\overline{D2I}}{(1+b)}=\frac{\overline{A3I}}{1} \qquad \rightarrow \overline{D2I}=\frac{(1+b)^2}{r},\overline{A3I}=\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}$

$\frac{\overline{\overline{A3C2}}}{\overline{C2D2}}\times\frac{\overline{\overline{D2A2}}}{\overline{A2I}}\times\frac{\overline{\overline{B2I}}}{\overline{A3B2}}=1 \qquad \rightarrow \frac{1}{b}\times\frac{r}{r-\frac{(1+b)^2}{r}}\times\frac{\overline{\overline{B2I}}}{\overline{A3B2}}=1$

$\therefore \frac{\overline{\overline{B2I}}}{\overline{A3B2}}=\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2} \qquad \overline{B2I}=\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}$

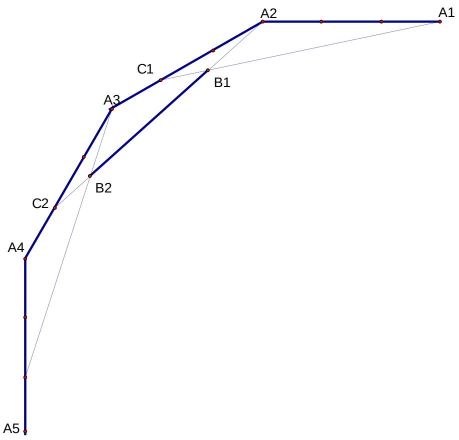
$\overline{A3B2}==\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]} \qquad \overline{B1I}=r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}$

$$\overline{B1B2}^2=\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2+\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2$$
$$-2\times\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\cos\theta$$

得到公式正 n 邊形 B1B2⋯Bn:正 n 邊形 A1A2⋯An

$$=\overline{B1B2}^2:(1+b+c)^2$$

(三)



設

$$\overline{A2C2}=r=\sqrt{(1+b+c)^2+(1+b)^2+2\times(1+b+c)\times(1+b)\times\cos\theta},\theta=\frac{360°}{n}$$

$\because\triangle$A2B1C1~$\triangle$A2A3C2 $\quad\therefore\dfrac{\overline{A2B1}}{\overline{A2A3}}=\dfrac{\overline{B1C1}}{\overline{A3C2}}=\dfrac{\overline{A2C1}}{\overline{A2C2}}$

$$\frac{1}{r}=\frac{\overline{A2B1}}{(1+b+c)}=\frac{\overline{B1C1}}{1}\quad\rightarrow\overline{A2B1}=\frac{(1+b+c)}{r},\overline{B1C1}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{(1+b)}{r}=\frac{\overline{A_2B_1}}{(1+b+c)}=\frac{\overline{B_1C_1}}{(1+b)}$$

$$\rightarrow\overline{A_2B_1}=\frac{(1+b)(1+b+c)}{r},\overline{B_2C_1}=\frac{(1+b)^2}{r}$$

$$\overline{B_1B_2}=r-\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}-\frac{(1+b)^2}{r}=\frac{r^2-(1+b)(2+2b+c)}{r}$$

得到公式正 n 邊形 B1B2…Bn：正 n 邊形 A1A2…An

$$=[\frac{r^2-(1+b)(2+2b+c)}{r}]^2:(1+b+c)^2$$

七.綜合整理表格(多邊形各邊比例均為 1:1:1)

多邊形	面積比例	公　式	比值	GSP 比值
任意三角形(1)	1:7	$1^2:1^2+(1+1)\times(1+1+1)$	0.14	0.16
任意三角形(2)	1:25	公式(1)	0.04	0.04
任意三角形(3)	1:7	$(1+1-1)^2:1^2+(1+1)\times(1+1+1)$	0.14	0.16
正方形(1)	4:10	$(1+1)^2:(1+1+1)^2+1$	0.40	0.39
正方形(2)	37:121	公式(2)	0.31	0.30

正方形(3)	1:13	$1^2:(1+1+1)^2+(1+1)^2$	0.08	0.08
平行四邊形(1)	4:10	$(1+1)^2:(1+1+1)^2+1$	0.40	0.39
平行四邊形(2)	37:121	公式(2)	0.31	0.30
平行四邊形(3)	1:13	$1^2:(1+1+1)^2+(1+1)^2$	0.08	0.08
正五邊形(1)	5.20:9	$(\frac{r^2-4}{r})^2:(1+1+1)^2$	0.58	0.59
正五邊形(2)	4.69:9	公式(3)	0.52	0.53
正五邊形(3)	2.69:9	$(\frac{r^2-10}{r})^2:(1+1+1)^2$	0.30	0.30
正六邊形(1)	6.23:9	$(\frac{r^2-4}{r})^2:(1+1+1)^2$	0.69	0.69
正六邊形(2)	5.89:9	公式(3)	0.65	0.66
正六邊形(3)	4.26:9	$(\frac{r^2-10}{r})^2:(1+1+1)^2$	0.47	0.47

備註：

1.公式(1)

$$\{1-3\times[\frac{c(b+c)^2-a^2(a+b)}{c(b+c)^2-a^2(a+b)+ab(a+b+c)}\times\frac{ab(a+b+c)}{c(b+c)^2-a^{2(}(a+b)+ab(a+b+c)}]\}\times\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)(a+b+c)}:1$$

2.公式(2)

$$[1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{(b+c)(1+b+c)^2+c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}\times\frac{(1+b)(b+c)-c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}]\times\frac{(b+c)^2}{(1+b+c)^2+1}:(1+b+c)^2$$

3.公式(3)

$$\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2+\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2$$

$$-2\times\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\cos\theta:(1+b+c)^2$$

※正 n 邊形(1) $r==\sqrt{10+6\cos\theta},\theta=\frac{360^\circ}{n}$ ；正 n 邊形(2)(3) $r==\sqrt{13+12\cos\theta},\theta=\frac{360^\circ}{n}$

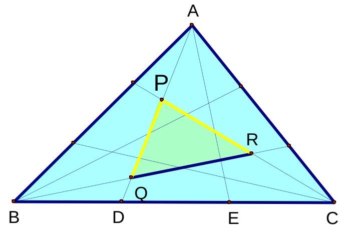
4.附圖(一)~圖(十五)

附圖一

ΔPQR面積 = 2.15 公分^2

ΔABC面積 = 13.77 公分^2

$$\frac{(\Delta \text{PQR面積})}{(\Delta \text{ABC面積})} = 0.16$$

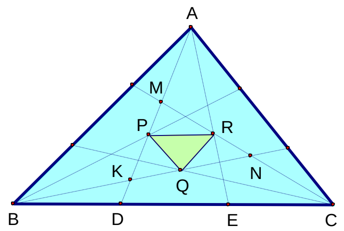


附圖二

ΔPQR面積 = 0.56 公分^2

ΔABC面積 = 13.77 公分^2

$$\frac{(\Delta \text{PQR面積})}{(\Delta \text{ABC面積})} = 0.04$$

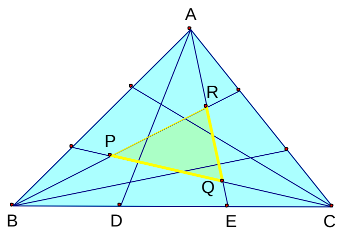


附圖三

ΔPQR面積 = 2.15 公分^2

ΔABC面積 = 13.77 公分^2

$$\frac{(\Delta \text{PQR面積})}{(\Delta \text{ABC面積})} = 0.16$$

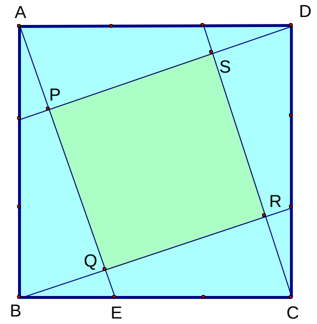


附圖四

PQRS面積 = 14.15 公分^2

ABCD面積 = 35.82 公分^2

$\frac{(\text{PQRS面積})}{(\text{ABCD面積})} = 0.39$

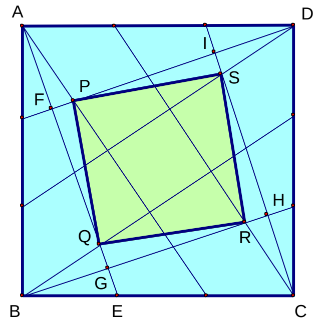


附圖五

PQRS面積 = 10.79 公分^2

ABCD面積 = 35.82 公分^2

$\frac{(\text{PQRS面積})}{(\text{ABCD面積})} = 0.30$

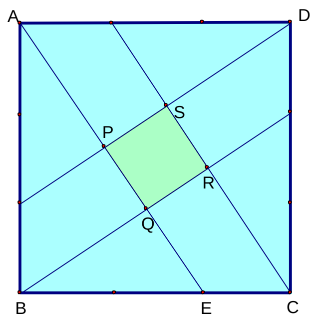


附圖六

PQRS面積 = 2.72 公分^2

ABCD面積 = 35.82 公分^2

$\frac{(\text{PQRS面積})}{(\text{ABCD面積})} = 0.08$

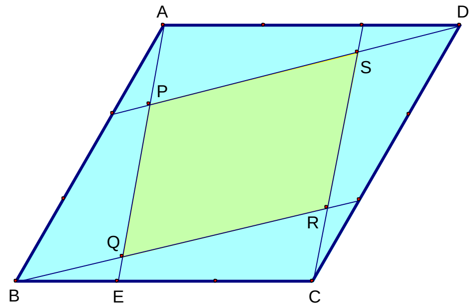


附圖七

PQRS面積 = 14.82 公分^2

ABCD面積 = 37.07 公分^2

$$\frac{(\text{PQRS面積})}{(\text{ABCD面積})} = 0.40$$

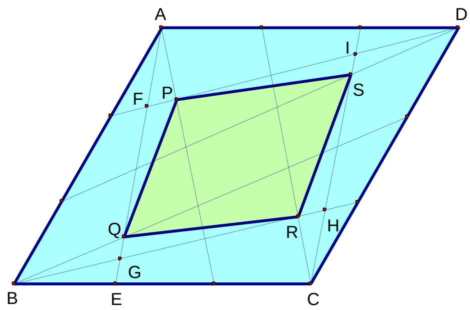


附圖八

PQRS面積 = 11.33 公分^2

ABCD面積 = 37.07 公分^2

$$\frac{(\text{PQRS面積})}{(\text{ABCD面積})} = 0.31$$

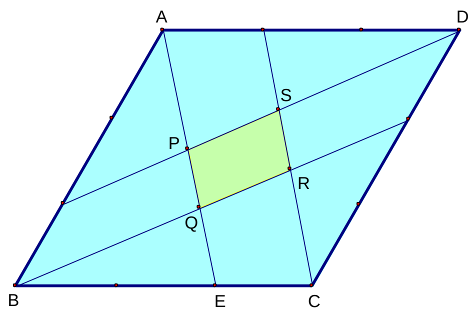


附圖九

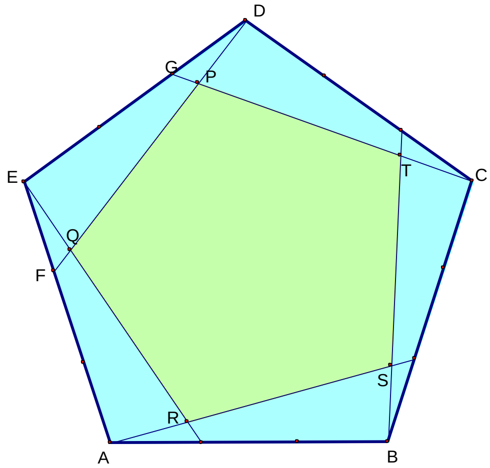
PQRS面積 = 2.85 公分^2

ABCD面積 = 37.07 公分^2

$$\frac{(\text{PQRS面積})}{(\text{ABCD面積})} = 0.08$$



附圖十



$(10+6\cdot\cos(72))^{0.5} = 3.44$　　$10+6\cdot\cos(72) = 11.85$

$\frac{(10+6\cdot\cos(72))-4}{(10+6\cdot\cos(72))^{0.5}} = 2.28$　　$\left(\frac{(10+6\cdot\cos(72))-4}{(10+6\cdot\cos(72))^{0.5}}\right)^2 = 5.20$

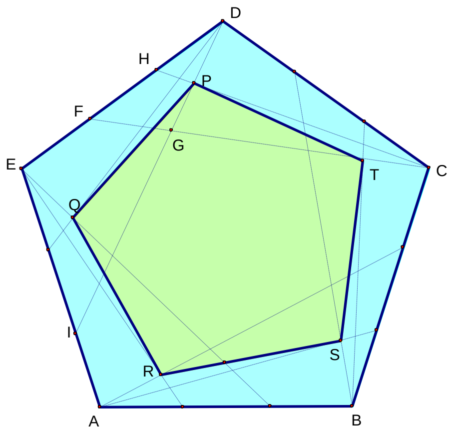
$$\frac{\left(\frac{(10+6\cdot\cos(72))-4}{(10+6\cdot\cos(72))^{0.5}}\right)^2}{9} = 0.58$$

PQRST面積 = 37.39 公分^2

ABCDE面積 = 63.83 公分^2

$\frac{(\text{PQRST面積})}{(\text{ABCDE面積})} = 0.59$

附圖十一



PQRST面積 = 33.55 公分^2　　ABCDE面積 = 63.83 公分^2

$\frac{(\text{PQRST面積})}{(\text{ABCDE面積})} = 0.53$

$13+12\cdot\cos(72) = 16.71$　　$(13+12\cdot\cos(72))^{0.5} = 4.09$

$$\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(72))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(72))-8)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(72))-2} = 2.28$$

$$\left(\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(72))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(72))-8)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(72))-2}\right)^2 = 5.18$$

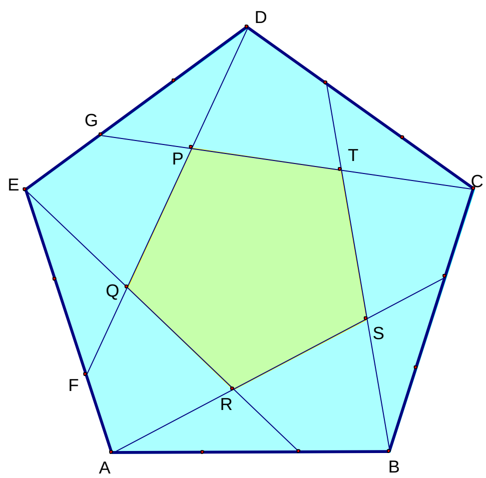
$$\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(72))-4)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}\cdot((13+12\cdot\cos(72))-2)} = 0.63$$

$$\left(\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(72))-4)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}\cdot((13+12\cdot\cos(72))-2)}\right)^2 = 0.40$$

$$\left(\left(\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(72))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(72))-8)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(72))-2}\right)^2+\left(\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(72))-4)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}\cdot((13+12\cdot\cos(72))-2)}\right)^2\right)-2\cdot\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(72))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(72))-8)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(72))-2}\cdot\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(72))-4)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}\cdot((13+12\cdot\cos(72))-2)}\cdot\cos(72) = 4.69$$

$$\frac{\left(\left(\left(\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(72))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(72))-8)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(72))-2}\right)^2+\left(\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(72))-4)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}\cdot((13+12\cdot\cos(72))-2)}\right)^2\right)-2\cdot\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(72))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(72))-8)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(72))-2}\cdot\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(72))-4)}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}\cdot((13+12\cdot\cos(72))-2)}\cdot\cos(72)\right)}{3^2} = 0.52$$

附圖十二



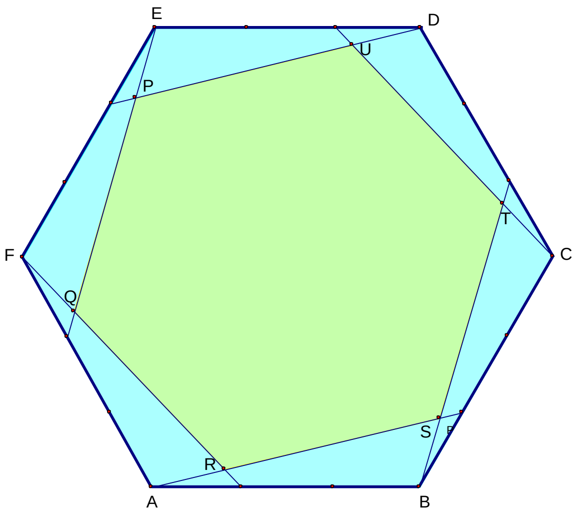
$13+12\cdot\cos(72) = 16.71$　　$(13+12\cdot\cos(72))^{0.5} = 4.09$

$$\frac{\left(\frac{(13+12\cdot\cos(72))-10}{(13+12\cdot\cos(72))^{0.5}}\right)^2}{3^2} = 0.30$$

PQRST面積 = 18.92 公分^2　　CDEAB面積 = 63.83 公分^2

$\frac{(\text{PQRST面積})}{(\text{CDEAB面積})} = 0.30$

附圖十三



$10+6\cdot\cos(60) = 13.00$

$(10+6\cdot\cos(60))^{0.5} = 3.61$

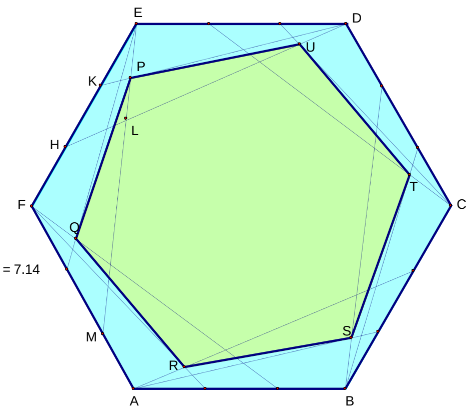
$$\frac{\left(\frac{(10+6\cdot\cos(60))-4}{(10+6\cdot\cos(60))^{0.5}}\right)^{2}}{3^{2}} = 0.69$$

PQRPTU面積 = 63.72 公分^2

EFABCD面積 = 91.71 公分^2

$$\frac{(\text{PQRPTU面積})}{(\text{EFABCD面積})} = 0.69$$

附圖十四



PQRSTU面積 = 60.33 公分^2

EFABCD面積 = 91.71 公分^2

$$\frac{(\text{PQRSTU面積})}{(\text{EFABCD面積})} = 0.66$$

$13+12\cdot\cos(60) = 19.00$

$(13+12\cdot\cos(60))^{0.5} = 4.36$

$$\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(60))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(60))-8)}{(13+12\cdot\cos(60))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(60))-2} = 2.67$$

$$\left(\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(60))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(60))-8)}{(13+12\cdot\cos(60))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(60))-2}\right)^{2} = 7.14$$

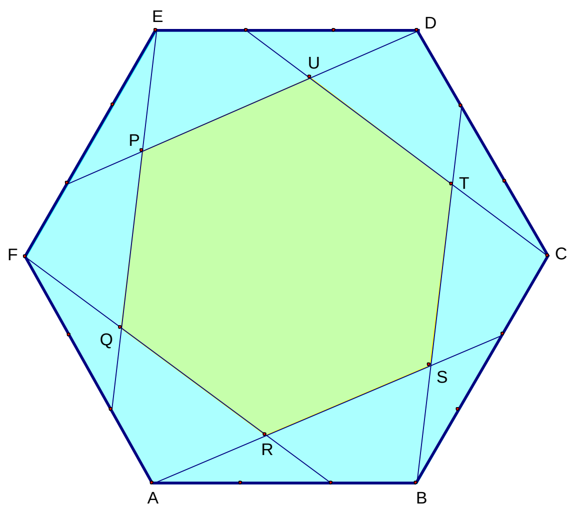
$$\frac{\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(60))-4)}{(13+12\cdot\cos(60))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(60))-2} = 0.61$$

$$\left(\frac{\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(60))-4)}{(13+12\cdot\cos(60))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(60))-2}\right)^{2} = 0.37$$

$$\left(\left(\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(60))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(60))-8)}{(13+12\cdot\cos(60))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(60))-2}\right)^{2}+\left(\frac{\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(60))-4)}{(13+12\cdot\cos(60))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(60))-2}\right)^{2}\right)-2\cdot\frac{\frac{((13+12\cdot\cos(60))-1)\cdot((13+12\cdot\cos(60))-8)}{(13+12\cdot\cos(60))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(60))-2}\cdot\frac{\frac{3\cdot((13+12\cdot\cos(60))-4)}{(13+12\cdot\cos(60))^{0.5}}}{(13+12\cdot\cos(60))-2}\cdot\cos(60) = 5.89$$

$$\frac{5.89}{9} = 0.65$$

附圖十五



$13+12\cdot\cos(60) = 19.00$

$(13+12\cdot\cos(60))^{0.5} = 4.36$

$$\frac{\left(\frac{(13+12\cdot\cos(60))-10}{(13+12\cdot\cos(60))^{0.5}}\right)^{2}}{3^{2}} = 0.47$$

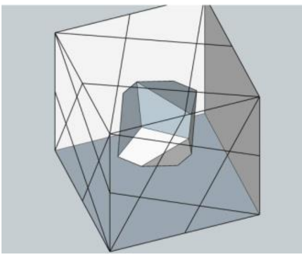
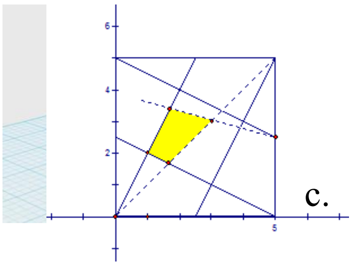
PQRSTU面積 = 43.37 公分^2

ABCDEF面積 = 91.71 公分^2

$$\frac{(\text{PQRSTU面積})}{(\text{ABCDEF面積})} = 0.47$$

八.正立方體各邊比例為 1:1，依規則順時針所形成的小正方形，利用上下、左右、

前後貫穿所形成 12 個四角錐體與原正立方體之體積比?

a.  b.  c.

※圖 a,b 利用順時針切割之底面積投影至平面

圖 c

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ y=-\frac{1}{2}(x-5) \end{cases} ;\ \begin{cases} y=x \\ y-3=-\frac{1}{4}(x-3) \end{cases} ;\ \begin{cases} y=-\frac{1}{2}(x-5) \\ y=x \end{cases} ;\ \begin{cases} y=2x \\ y-3=-\frac{1}{4}(x-3) \end{cases}$$

$\Rightarrow(x,y)=(1,2)$ ； $(x,y)=(3,3)$ ；$(x,y)=(\frac{5}{3}\ ,\frac{5}{3})$ ；$(x,y)=(\frac{5}{3}\ ,\frac{10}{3})$

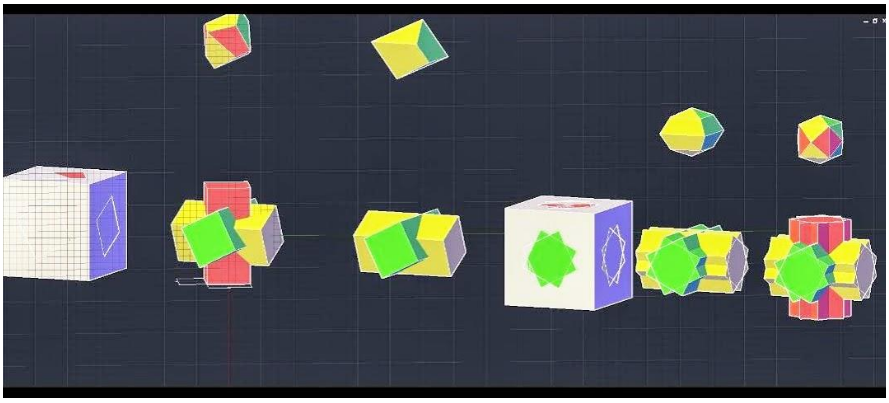
$$底面積=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{5}{3} & 1 & \frac{5}{3} & 3 & \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} & 2 & \frac{5}{3} & 3 & \frac{10}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(\frac{10}{3}+\frac{5}{3}+5+10-5-\frac{10}{3}-\frac{10}{3}-5)=\frac{5}{3}$$

利用公式得切割之同一面小正方形:原正方形面積比=1:5

$1:5=x^2:5^2$ => 小正方形邊長=$\sqrt{5}$

$$故體積比值=\frac{12\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times(\frac{5}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2})}{5\times5\times5}=\frac{1}{15}$$

九.正立方體各邊比例為 1:1，依規則順時針所形成的小正方形，逆時針所形成的另一小正方形，利用上下、左右、前後貫穿兩小正方形共同部分，形成一四角化立方體，則此四角化立方體與原正立方體之體積比?



∵此四角化立方體為卡塔蘭立體，具有旋轉對稱性，且可分成
一個正立方體外加六個正四角錐

設原立方體邊長=a ， 則小正方體邊長=$\frac{a}{3}$ ，正四角錐的高=$\frac{a}{12}$

∴體積比值=$\dfrac{(\frac{a}{3})^3+6\times\frac{1}{3}\times(\frac{a}{3})^2\times\frac{a}{12}}{a^3}=\dfrac{1}{18}$

伍. 結論

多邊形將各邊分同比例三段，第一頂點、第一分段點連線，與第二頂點、第二分段點連線之<u>交點 1</u>，第二頂點、第一分段點連線，與第三頂點、第二分段點連線之<u>交點 2</u>，依序持續找出所有交點，所有交點所形成新多邊形與原多邊形之面積比例關係:

一. 任意三角形，各邊比例均為 a：b：c 所形成新三角形

(一)a≠b+c

→新三角形 ：原三角形=

$$\{1-3\times[\frac{c(b+c)^2-a^2(a+b)}{c(b+c)^2-a^2(a+b)+ab(a+b+c)}\times\frac{ab(a+b+c)}{c(b+c)^2-a^2(a+b)+ab(a+b+c)}]\}\times\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)(a+b+c)}:1$$

(二)a=b+c

→新三角形 ：原三角形=$(2c)^2:(3b+2c)^2$

二.任意正方形，各邊比例均為 1：b：c 所形成新正方形

→新正方形 ：原正方形=

$$[1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{(b+c)(1+b+c)^2+c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}\times\frac{(1+b)(b+c)-c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}]\times\frac{(b+c)^2}{(1+b+c)^2+1}:1$$

三.任意平行四邊形，各邊比例均為 1：b：c 所形成新平行四邊形

→新平行四邊形 ：原平行四邊形=

$$[1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{(b+c)(1+b+c)^2+c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}\times\frac{(1+b)(b+c)-c}{(b+c)(1+b+c)^2+(1+b)(b+c)}]\times\frac{(b+c)^2}{(1+b+c)^2+1}:1$$

四.任意正 n 邊形，各邊比例均為 1：b：c 所形成新正 N 邊形

→新正 n 邊形 ：原正 n 邊形=

$$\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2+\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}^2$$

$$-2\times\{\frac{(1+b)(1+b+c)}{r}\times\frac{b[r^2-(1+b)^2]}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\{r-\frac{(1+b)^2}{r}-\frac{r(1+b)(1+b+c)}{r^2+b[r^2-(1+b)^2]}\}\times\cos\theta:(1+b+c)^2$$

$$r=\sqrt{(1+b+c)^2+(1+b)^2+2\times(1+b+c)\times(1+b)\times\cos\theta},\theta=\frac{360^\circ}{n}$$

五.正立方體各邊取中點,依規則進行切割,所形成的各面之小正方形,利用上下,左右,前後貫穿所形成 12 面四角椎體

→12 面四角椎體體積:正立方體體積=1:15

六.正立方體各邊比例為 1:1，依規則順時針所形成的小正方形，逆時針所形成的另一小正方形，利用上下、左右、前後貫穿兩小正方形共同部分，形成一四角化立方體，

→四角化立方體:原正立方體之體積=1:18

陸. 參考書目

一 .國中數學第三、四、五、六冊------康軒出版社

二 .高中數學第一、二、三冊------龍騰出版社

三.國立台灣科教館歷屆科展作品